МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт *высокоточных систем им. В.П. Грязева*
Кафедра «Приборы управления»

Утверждено на заседании кафедры
«Приборы управления»
«22» января 2024 г., протокол № 1
Заведующий кафедрой

____________________ В.В. Матвеев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
«Математические основы Фурь-оптики и управления»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
12.03.03 Фотоника и оптоинформатика

с направленностью (профилем)
Интеллектуальные фотонные системы
Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 120303-01-24

Тула 2024 год

Разработчик методических указаний:

Матвеев В.В., зав. каф., д.т.н., доц.____ ____________________

Содержание практических (семинарских) занятий

№ п/п	Темы практических занятий
	5 семестр
1.	Комплексные числа и действия над ними
2.	Дифференцирование ФКП. Условие Коши-Римана.
3.	Интегрирование ФКП
4.	Особые точки. Классификация. Разложение в ряд Лорана в окрестности особых точек
5.	Лемма-Жордана. Применение вычетов для вычисления несобственных интегралов
6.	Интеграл Фурье. Комплексные формы интеграла Фурье.
7.	Понятие о спектрах.
8	Свойства преобразования Фурье
9.	Комплексные спектры некоторых специальных функций
10.	Преобразования Лапласа. Основные понятия
11	Разбор примеров на преобразование Лапласа
12	Применение преобразования Лапласа к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Введение

Современные фотонные системы, применяемые в различных областях науки и техники, в том числе и в космической отрасли, основаны на использовании математического аппарата Фурье-анализа. Понимание фундаментальных принципов Фурье-оптики является ключевым для проектирования, исследования и эффективной эксплуатации широкого круга оптических устройств и систем.

Математический аппарат преобразования Фурье и преобразования Лапласа играет ключевую роль в современной теории сигналов и систем. Эти интегральные преобразования позволяют перейти от описания сигналов и систем во временной области к их представлению в частотной области, что открывает широкие возможности для анализа, синтеза и обработки различных типов сигналов.

Дисциплина посвящена изучению теоретических основ и практическому применению данных интегральных преобразований в инженерной практике. Особое внимание уделяется формированию у студентов глубокого понимания математических свойств преобразований Фурье и Лапласа, а также навыков их эффективного использования при решении задач в различных областях науки и техники.

Практическое занятие №1. Комплексные числа и действия над ними

План занятия
1.Разбор примеров на доске
2. Самостоятельное выполнение заданий

Доказать следующие соотношения:

1. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
3. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
4. $\overline{\bar{z}_1 + \bar{z}_2} = z_1 + z_2$

Исходя из геометрической интерпретации комплексного числа, доказать неравенства:

5. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$
6. $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$

Доказать эти же неравенства алгебраическим путём. Выяснить в каждом случае, когда имеет место знак равенства.

Найти действительные решения уравнений:

7. $(3x - j)(2 + j) + (x - jy)(1 + 2j) = 5 + 6j$
8. $(x - jy)(a - jb) = j^5$, где $a \ne b$, a и b - заданные действительные числа;
9. $(4 + 2j)x + (5 - 3j)y = 13 + j$

Найти модуль и главное значение аргумента комплексных чисел:

10. $z = 2 + j5$ 11. $z = -2 + j2\sqrt{3}$
12. $z = -3 - j$ 13. $z = -\cos\dfrac{\pi}{5} + j\sin\dfrac{\pi}{5}$
14. $z = 2 - j5$ 15. $z = \cos\alpha - j\sin\alpha, (\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi)$
16. $z = -1 - j$ 17. $z = -4 + j4$
18. $z = 3j$ 19. $z = -2$
20. $z = 1 + j$ 21. $z = -j\pi$
22. $z = j3\pi$ 23. $z = j$

Представить комплексные числа в тригонометрической форме:

24. $z = -2$ 25. $z = 2j$
26. $z = -\sqrt{2} + j\sqrt{2}$ 27. $z = 1 - \sin\alpha + j\cos\alpha, (0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2})$
28. $z = -j$ 29. $z = -1 - j2$

Представить комплексные числа в показательной форме:

30. $z = 3 + j3$ 31. $z = 7 - j7$

32. $z=-2$

33. $z=-j$

34. $z=-1-j\sqrt{3}$

35. $z=5+j3$

36. $z=\sin\alpha-j\cos\alpha,(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi)$

37. $z=8j$

Выполнить указанные действия (записать в алгебраической форме):

38. $\frac{1}{j}$

39. $\frac{1-j}{1+j}$

40. $\frac{2}{1-j3}$

41. $\frac{1}{(a+jb)^2}+\frac{1}{(a-jb)^2}$

42. $\frac{2-j}{3+j}$

43. $\frac{8j}{4+j3}$

Вычислить:

44. $\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{1-j}\right)^{40}$

45. $(2-j2)^7$

46. $(\sqrt{3}-j3)^6$

47. $\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^8$

48. $(1+j\sqrt{3})^3$

49. $(-\sqrt{2}-j\sqrt{2})^4$

Найти все значения корня и построить их:

50. $\sqrt[4]{-j}$

51. $\sqrt{j}$

52. $\sqrt[4]{-1}$

53. $\sqrt[4]{1}$

54. $\sqrt[3]{-1+j}$

55. $\sqrt{2-j2\sqrt{3}}$

56. $\sqrt[5]{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6}+j\sin\frac{\pi}{6})}$

57. $\sqrt[3]{j}$

58. $\sqrt[3]{1}$

59. $\sqrt[6]{-8}$

60. $\sqrt[8]{1}$

61. $\sqrt{1-j}$

62. $\sqrt[3]{-2+j2}$

63. $\sqrt[5]{-4+j3}$

Пользуясь формулой Муавра, выразить через степени $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ следующие функции кратных углов:

64. $\sin 3\varphi$

65. $\cos 3\varphi$

66. $\sin 4\varphi$

67. $\cos 4\varphi$

68. $\sin\ 5\varphi$

69. $\cos\ 5\varphi$

Выяснить геометрический смысл указанных соотношений:

70. $\left|z-z_0\right|<R$

71. $\left|z-z_0\right|>R$

72. $|z|=3$

73. $|z+j|=4$

74. $|z+4|=5$

75. $|z+1-j|=1$

76. $\operatorname{Re} z\le 4$

77. $\operatorname{Im} z>-2$

78. $|z-2|+|z+2|=5$

79. $0<\operatorname{Re}(jz)<1$

80. $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\le 1$

81. $0\le \operatorname{Im} z\le 1$

82. $1\le |z+2+j|\le 2$

83. $|z-1|<|z-j|$

84. $1<\operatorname{Re} z<2$

85. $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)<-\frac{1}{2}$

Указать какие линии определяются следующими соотношениями:

86. $\operatorname{Im} z^2=2$

87. $\operatorname{Re} \overline{z^2}=1$

88. $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}$

89. $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)=1$

90. $\operatorname{Im}\overline{\left(z^2-\bar{z}\right)}=2-\operatorname{Im} z$

91. $z^2+\overline{z^2}=1$

92. $2z\bar{z}+(2+j)z+(2-j)\bar{z}=2$

93. $|z-2|=|1-2\bar{z}|$

Решить обратную задачу, т.е. написать в комплексной форме уравнения следующих линий:

94. координатных осей OX и OY;

95. прямой $y=x$;

96. прямой $y=kx+b$, где k,b - действительные

Найти логарифмы следующих чисел:

97. e

98. $(-j)$

99. j

100. $(-1-j)$

101. $3-2j$

102. (-8)

103. 4

104. $2+j2$

105. $j\sqrt{3}-\sqrt{3}$

106. $1+j\sqrt{3}$

Выделить действительную и мнимую части следующих функций:

107. $w=z-jz^2$

108. $w=z^2+j$

109. $w=j-z^3$

110. $w=\frac{1}{\bar{z}}$

111. $w=\frac{jz+1}{1+\bar{z}}$

112. $w=\frac{\bar{z}}{z}$

113. $w=e^{-z}$

114. $w=e^{z^2}$

115. $w=\sin z$

116. $w=\cos z$

117. $w=sh\, z$

118. $w=ch\, z$

119. $w = ch\,(z - j)$

120. $w = 2^{z^2}$

121. $w = tg\, z$

122. $w = \cos\,(2 + j)$

123. $w = \sin\, 2j$

124. $w = e^{z}$

Найти значение модуля и главное значение аргумента данных функций в указанных точках:

125. $w = \cos z\,,\quad z_0 = \pi + j\ln 2$

126. $w = sh\, z,\quad z_0 = 1 + j\dfrac{\pi}{2}$

127. $w = z\,e^{z},\quad z_0 = j\pi$

128. $w = ch^2 z,\quad z_0 = j\ln 3$

Вычислить:

129. j^{j}

130. $j^{1/j}$

131. 1^{j}

132. $(-1)^{\sqrt{2}}$

133. $\left(\dfrac{1+j}{\sqrt{2}}\right)^{2j}$

134. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + j\dfrac{1}{2}\right)^{1+j}$

135. $(1-j)^{(3-3j)}$

136. $(1-j)^{(1-j)}$

137. $(3-4j)^{(1+j)}$

138. $(-3+4j)^{(1+j)}$

Найти модуль и аргумент комплексных чисел:

139. $th\, j\pi$

140. 10^{j}

141. 3^{2-j}

142. e^{2+j}

143. e^{2-j3}

144. e^{3+j4}

Доказать, что

145. $\sin jz = j\, sh\, z$

146. $\cos jz = ch\, z$

147. $tg\, jz = j\, th\, z$

148. $ctg\, jz = -j\, cth\, z$

Записать в алгебраической форме следующие комплексные числа:

149. $\sin j\pi$

150. $\cos j\pi$

151. $tg\, j\dfrac{\pi}{2}$

152. $ctg\, j\pi$

153. $Arc\sin j$

154. $Arctg\, j\dfrac{1}{3}$

155. $sh\, j\dfrac{\pi}{2}$

156. $th\, j\pi$

Решить следующие уравнения:

157. $e^z + 1 = 0$ 158. $4\cos z + 5 = 0$

159. $shj\,z = -j$ 160. $\sin z = j\pi$

161. $e^{jx} = \cos x\pi$, x – действительное;

162. $e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$ 163. $ch\,z = j$

164. $\ln(z + j) = 0$ 165. $\ln(j - z) = 1$

166. $\sin z + \cos z = 2$ 167. $\sin z - \cos z = 3$

168. $\sin z - \cos z = j$ 169. $\mathrm{ch}\,z - \mathrm{sh}\,z = 1$

170. $sh\,z - ch\,z = 2j$ 171. $2\mathrm{ch}\,z + \mathrm{sh}\,z = j$

172. $\cos z = \mathrm{ch}\,z$ 173. $\sin z = j\,\mathrm{sh}\,z$

174. $\cos z = j\mathrm{sh}\,2z$

Практическое занятие №2. Дифференцирование ФКП. Условие Коши-Римана.

1.Разбор примеров на доске
2. Самостоятельное выполнение заданий

Пользуясь условиями Коши-Римана, выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими, а какие – нет:

175. $w = z^2\bar{z}$ 176. $w = ze^z$

177. $w = |z|\bar{z}$ 178. $w = e^{z^2}$

179. $w = |z|\mathrm{Re}\,\bar{z}$ 180. $w = \sin 3z - j$

181. $w = \bar{z}\,\mathrm{Re}\,z$ 182. $w = \bar{z}\,\mathrm{Im}\,z$

183. $w = |z|\mathrm{Im}\,z$ 184. $w = \mathrm{ch}\,z$

185. $w = \cos z$ 186. $w = \ln z$

Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z) по известной действительной U(x,y) или мнимой V(x,y) части и значению $f(z_0)$:

187. $U = x^2 - y^2 + 2x,$ $f(j) = 2j - 1$

188. $V = 2(\mathrm{ch}\,x\,\sin y - xy),$ $f(0) = 0$

189. $U = 2\sin x\,\mathrm{ch} y - x,$ $f(0) = 0$

190. $V = 2(2\mathrm{sh} x\,\sin y + xy),$ $f(0) = 3$

191. $V = -2\sin 2x\,\mathrm{sh} 2y + y,$ $f(0) = 2$

192. $V = 2\cos\mathrm{ch} y - x^2 + y^2 - 2,$ $f(0) = 2$

Практическое занятие №3. Интегрирование ФКП

План
1.Разбор примеров на доске

2. Самостоятельное выполнение заданий

Вычислить следующие интегралы:

193. $\int\limits_c \operatorname{Re} z\, dz$, c-прямая, соединяющая точки $z_0 = 0$ и $z_1 = 1 + j$

194. $\int\limits_c z \operatorname{Im} z^2\, dz$, $c: |z| = 1,\ -\pi \le \arg z \le 0$

195. $\int\limits_c e^{|z|^2} \operatorname{Re} z\, dz$, c-прямая, соединяющая точки $z_0 = 0$ и $z_1 = 1 + j$

196. $\int\limits_c \ln z\, dz$, $c: |z| = 1,\ \ z_0 = 1$ (обход против часовой стрелки)

197. $\int\limits_c \ln z\, dz$, $c: |z| = 1,\ z_0 = -1$ (обход против часовой стрелки)

198. $\int\limits_c z \operatorname{Re} z\, dz$, $c: |z| = 1$ (обход против часовой стрелки)

199. $\int\limits_c z \bar{z}\, dz$, $c: |z| = 1$ (обход против часовой стрелки)

200. $\int\limits_1^j z e^z\, dz$

201. $\int\limits_{1+j}^{-1-j} (2z+1)\, dz$

202. $\int\limits_0^{1+j} z^3\, dz$

203. $\int\limits_1^j (3z^4 - 2z^3)\, dz$

204. $\int\limits_c^1 e^z\, dz$, где c- дуга параболы $y=x^2$, соединяющая точки $z_0=0$ и $z_1=1+j$

205. $\int\limits_c e^z\, dz$, где c – отрезок прямой, соединяющий точки $z_0=0$ и $z_1=1+j$

206. $\int\limits_c \cos z\, dz$, c – отрезок прямой, соединяющей точки $z_0=\frac{\pi}{2}$ и $z_1=\pi + j$

207. $\int\limits_c \frac{dz}{\sqrt{z}}$, $c: |z| = 1,\ \pi \le \arg z \le 0$ (выбирается та ветвь функции $\sqrt{z}$, для которой $\sqrt{z} = 1$)

208. $\int\limits_{1+j}^{2j} (z^3 - z)\, e^{\frac{z^2}{2}}\, dz$

209. $\int\limits_{0}^{j} z\cos z\ dz$

Вычислить следующие интегралы:

210. $\oint\limits_{|z-1|=0,5} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+z}\ dz$

211. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{z}\cos z\pi}{z^2+2z}\ dz$

212. $\oint\limits_{|z-2|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z^4-1}\ dz$

213. $\oint\limits_{|z-1-j|=1} \frac{\sin \pi(z-1)}{z^2-2z+2}\ dz$

214. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z\, e^{\frac{1}{z+2}}}\ dz$

215. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos (z+j\pi)}{z(e^{z}+2)}\ dz$

216. $\oint\limits_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}$

217. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$

218. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2+1}\ dz$

219. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z\sin(z-1)}{z^2-z}\ dz$

Практическое занятие № 4. Особые точки. Классификация.

Разложение в ряд Лорана в окрестности особых точек

План

1.Разбор примеров на доске

2. Самостоятельное выполнение заданий

Вычислить следующие интегралы:

220. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\, dz$

221. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3}\ dz$

222. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{(z-1)^2(z-3)}\ dz$

223. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2}\ dz$

224. $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=6} \frac{z\,dz}{(z-2)^3(z+4)}\ dz$

225. $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{j\pi z}}{z^3-4z^2}$

226. $\displaystyle\int\limits_{|z|=0,5} \frac{1}{z^3}\cos\frac{\pi}{z+1}\ dz$

227. $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2}\ dz$

228. $\displaystyle\int\limits_{|z|=0,5} \frac{1-\sin z}{z^2}\,dz$

229. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=0,5} \frac{e^{jz}}{(z^2-1)^2}\,dz$

Разложить данные функции в ряд Тейлора:

230. $\sin z$ по степеням z

231. $\cos z$ по степеням z

232. e^z по степеням z

233. $\sin(2z+1)$ по степеням $(z+1)$

234. $\cos z$ по степеням $\left(z+\frac{\pi}{4}\right)$

235. e^z по степеням $(2z-1)$

236. z^5 по степеням $(z-j)$

237. $\operatorname{ch}(1-z)$ по степеням $(z-1+j\frac{\pi}{2})$

238. $\dfrac{1}{3z+1}$ по степеням $(z+2)$

239. $\operatorname{ch}(1-z)$ по степеням $(z+1+j\frac{\pi}{2})$

Разложить в ряд Лорана в окрестности точки z=0 следующие функции

240. $\dfrac{\sin z}{z^2}$

241. $\dfrac{\sin^2 z}{z}$

242. $\dfrac{e^z}{z}$

243. $\frac{e^z}{z^3}$ 244. $z^3 e^{\frac{1}{z}}$ 245. $z^4 \cos\frac{1}{z}$

246. $\frac{1}{z}\sin^2\frac{2}{z}$ 247. $\frac{1-\cos z}{z^2}$ 248. $\frac{e^z-1}{z}$

249. $\frac{1+\cos z}{z^4}$ 250. $\frac{1-e^{-z}}{z^3}$

У следующих функций найти нули и определить их порядки:

251. $f(z)=z^4+4z^2$

252. $f(z)=\frac{\sin z}{z}$

253. $f(z)=z^2\sin z$

254. $f(z)=\frac{sh^2 z}{z}$

255. $f(z)=1+ch\, z$

256. $f(z)=\frac{(1-sh\, z)^2}{z}$

257. $f(z)=(z+j\pi)shz$

258. $f(z)=\cos z+ch\, jz$

259. $f(z)=(z^2+\pi^2)(1+e^{-z})$

260. $f(z)=\cos z+ch\, jz$

Найти порядок нуля $z_0=0$ для следующих функций:

261. $f(z)=\frac{z^6}{(\frac{z}{2})^2-(\sin\frac{z}{2})^2}$

262. $f(z)=e^{\sin z}-e^{tg\, z}$

263. $f(z)=\frac{z^3}{1+z-e^z}$

264. $f(z)=2(ch\, z-1)-z^2$

265. $f(z)=\frac{(1-\cos 2z)^2}{z-sh\, z}$

266. $f(z)=(e^z-e^{z^2})\ln(1-z)$

267. $f(z)=z^2(e^{z^2}-1)$

268. $f(z)=6\sin z^3+z^3(z^6-6)$

Определить характер особой точки $z_0=0$ для следующих функций:

269. $\dfrac{1}{z-\sin z}$

270. $\dfrac{1}{\cos z-1+\dfrac{z^2}{2}}$

271. $\dfrac{1}{e^{-z}+z-1}$

272. $\dfrac{\sin z}{e^{-z}+z-1}$

273. $\dfrac{1}{1-\cos z}$

274. $\dfrac{shz}{z-shz}$

275. $z-\sin z$

Найти особые точки и определить их характер:

276. $f(z)=\dfrac{1}{1-\sin z}$

277. $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$

278. $f(z)=e^{\frac{1}{z+2}}$

279. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}$

280. $f(z)=\dfrac{z}{z^5+2z^4+z^3}$

281. $f(z)=\dfrac{1}{e^{-z}-1}+\dfrac{1}{z^2}$

282. $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}$

283. $f(z)=th\, z$

284. $f(z)=z\, ctg\, z$

Вычислить интегралы:

285. $\displaystyle\int\limits_{|z|=5}\frac{tgzdz}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$

286. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}}\, dz$

287. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{ch\, z\ dz}{(z^2+1)(z-3)}$

288. $\displaystyle\int\limits_{|z|=0,5}\frac{e^z\ dz}{0{,}25-\sin^2 z}$

289. $\displaystyle\int\limits_{|z-j|=2}\frac{e^z\ dz}{z^3(z-1)}$

290. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{zdz}{(z+1)^3(z-2)^2}$

291. $\oint\limits_{|z|=0,5} z^2 \sin\frac{1}{z} dz$

292. $\oint\limits_{|z|=6} \left(\cos\frac{1}{z} + z^3\right) dz$

293. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{z\ dz}{(z-1)(z-3)}$

294. $\oint\limits_{|z-2j|=1} \frac{1}{z^2+4} dz$

295. $\oint\limits_{|z-2|=0,1} \frac{z^2}{(z-2)^3} dz$

296. $\oint\limits_{|z-3j|=4} \frac{dz}{e^z-1}$

297. $\oint\limits_{|z-j|=2} \frac{e^{\pi z}}{z-j} dz$

298. $\oint\limits_{|z|=1} z\, tg\, \pi z \ dz$

299. $\oint\limits_{|z-j|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-jz^2} dz$

Вычислить интегралы:

300. $\oint\limits_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z}{z^2-z} dz$

301. $\oint\limits_{|z+1|=4} \frac{z\ dz}{e^z+3}$

302. $\oint\limits_{|z-j|=1} \frac{e^z\ dz}{z^4+2z^2+1}$

303. $\oint\limits_{c} \frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}\ dz$, где c: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

304. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z\ dz}{(z-1)^2(z+2)}$

305. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z\ dz}{z^3(z+1)}$

306. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2\ dz}{\sin^3 z\ \cos z}$

307. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^{jz}\ dz}{(z-\pi)^3}$

308. $\oint\limits_{c} \frac{e^{2z}\ dz}{z^3-1}$, где c: $x^2 + y^2 - 2x = 0$

309. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\ \sin\ z}{(z-1)^5}\ dz$

310. $\int\limits_{c} \dfrac{dz}{z^4+1}$ где c: $x^2+y^2=2x$

311. $\int\limits_{|z|=1} z^3 \sin \dfrac{1}{z}\, dz$

312. $\int\limits_{|z|=\frac{1}{3}} (z+1)e^{\frac{1}{z}}\, dz$

313. $\int\limits_{|z+2j|=2} \dfrac{e^{jz}\, dz}{(z^2-1)(z+3)}$

Вычислить следующие интегралы:

314. $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$

315. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $a>0$, $b>0$

316. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+1)^3}$

317. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x \sin x\, dx}{x^2-2x+10}$

318. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x\, dx}{(x^2+4x+13)^2}$

319. $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{dx}{1+x^6}$

320. $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{x^4+1}{x^6+1}\, dx$

321. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$

Практическое занятие №5. Лемма-Жордана. Применение вычетов для вычисления несобственных интегралов.

План

1.Разбор примеров на доске

2. Самостоятельное выполнение заданий

Вычислить интегралы:

322. $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{x \cos x\, dx}{x^2-2x+10}$

323. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x \sin x\, dx}{x^2+4x+20}$

324. $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{\cos x\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

325. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos x\, dx}{x^2+9}$

326. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{x^4+1}\ dx$, a>0 327. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x\ dx}{x^2+a^2}$, a>0

328. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2 \cos x\ dx}{(x^2+1)^2}$

Практическое занятие № 5. Интеграл Фурье. Комплексные формы интеграла Фурье.

План

1. Интеграл Фурье. Комплексная форма интеграла Фурье.

2.Предельный переход от ряда Фурье к интегралу Фурье.

3. Комплексная форма интеграла Фурье.

Ряд Фурье является удобным аппаратом для представления периодических функций. Интеграл Фурье является естественным обобщением ряда Фурье на непериодические функции.

Теорема 16.

Если функция $f(t)$ кусочно –дифференцируема на любом конечном интервале числовой оси (условие Дирихле) и удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости, т.е. интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = M < \infty$ существует, то такая функция $f(t)$ представима интегралом Фурье.

Напомним, что функция $f(t)$ называется кусочно–дифференцируемой на интервале (b,d), если как сама функция $f(t)$, так и её производная $f'(t)$ имеют в этом интервале конечное число разрывов непрерывности 1–го рода.

Рассмотрим периодическую функцию φ(t) с периодом T, удовлетворяющую следующему условию:

$$\varphi(t) = f(t),\ если\ -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

Тогда, т.к. функция φ(t) может быть разложена в ряд Фурье, то, очевидно, на интервале $[-{}^T/_2; {}^T/_2]$ и функция $f(t)$ может быть представлена рядом Фурье.

Составим частичную сумму:

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos\frac{2\pi}{T}kt + b_k \sin\frac{2\pi}{T}kt \right] \qquad (61)$$

(при $n \to \infty$, $f_n(t) \to f(t)$).

Где

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) d\tau$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cos \frac{2\pi}{T} k\tau d\tau$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \sin \frac{2\pi}{T} k\tau d\tau$$

Чтобы в дальнейшем не путать переменную интегрирования с временем (аргументом) t, обозначим её через τ.

Подставив значения коэффициентов в выражение для частичной суммы (61), получим:

$$f_n(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) d\tau + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{n} f(\tau) \cdot$$

$$\cdot \left[\cos \frac{2\pi}{T} k\tau \cdot \cos \frac{2\pi}{T} kt + \sin \frac{2\pi}{T} k\tau \cdot \sin \frac{2\pi}{T} kt \right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) d\tau + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{n} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cos \frac{2\pi}{T} k(t-\tau) d\tau$$

Обозначим $^{2\pi}/_{T} = \Delta\omega$ – частоту первой гармоники разложения. Тогда

$$f_n(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cos \Delta\omega k (t-\tau) d\tau \qquad (62)$$

Перейдём к пределу при $n \to \infty$, и $T \to \infty$, тогда

$$\lim_{\substack{T \to \infty \\ n \to \infty}} f_n(t) = f(t)$$

$$\lim_{\substack{T \to \infty \\ n \to \infty}} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) d\tau = 0,$$

т.к. $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(\tau) \right| d\tau = M < \infty$ – ограниченная величина.

Действительно, согласно полезному неравенству и условию теоремы

$$\left|\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\,d\tau\right| \le \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left|f(\tau)\right| d\tau$$

Но

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left|f(\tau)\right|d\tau = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(\tau)\right|d\tau = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cdot M = 0$$

При $T\to\infty$, $\Delta\omega={}^{2\pi}/_{T}\to 0$, т.е. приращение частоты при переходе от одной гармоники к соседней становится величиной бесконечно малой, и в этом случае приращение $\Delta\omega$ можно отождествить с дифференциалом $d\omega$.

Переход от одной гармоники к другой будет осуществляться всё более плавно, и предел второй суммы в формуле (62) может быть выражен соответствующим интегралом:

$$\lim_{\substack{T\to\infty\\ n\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\cos k\Delta\omega(t-\tau)\,d\tau\right]\Delta\omega =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau$$

Здесь обозначена через ω – частота κ–той гармоники $\omega = \kappa\Delta\omega$.

Таким образом, для непериодической функции $f(t)$, удовлетворяющей условиям теоремы, справедливо:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau\ , \qquad (63)$$

т.е. функция $f(t)$ представлена <u>интегралом Фурье</u>.

На практике часто применяется так называемая комплексная форма интеграла Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,e^{j\omega(t-\tau)}\,d\tau \qquad (64)$$

Покажем, что она эквивалентна выше полученной формуле (63). Для этого изменим в формуле (64) порядок интегрирования:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\left[\cos\omega(t-\tau) + j\sin\omega(t-\tau)\right]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,d\tau \int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega(t-\tau)\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\,j\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,d\tau \int_{-\infty}^{+\infty}\sin\omega(t-\tau)\,d\omega$$

Так как $\sin\omega(t-\tau)$ – функция нечётная, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\omega(t-\tau)\,d\omega = 0\,,$$

а в силу того, что $\cos\omega(t-\tau)$ – функция чётная, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\omega(t-\tau)d\omega = 2\int_{0}^{+\infty} \cos\omega(t-\tau)d\omega$$

Возвращаясь к прежнему порядку интегрирования, получим:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau$$

Это равенство имеет место для тех значений независимой переменной t, для которых функция f(t) является непрерывной.

В точках разрыва непрерывности функции f(t) в интервале [-$^{T}/_{2}$;$^{T}/_{2}$] сумма членов ряда Фурье равна $\dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$. В курсе высшей математики доказывалось, что в точках разрыва непрерывности правая часть выражения (63) будет определяться равенством:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau = \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}\,. \tag{65}$$

Вернёмся к интегралу Фурье (63) и, учитывая формулу для косинуса разности, запишем

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\right]\cos\omega t d\omega +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\right]\sin\omega t d\omega$$

Обозначим

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau \qquad \omega \ge 0$$

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau \qquad \omega \ge 0$$

тогда

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[U(\omega)\cos\omega t + V(\omega)\sin\omega t\right]d\omega \tag{66}$$

Формула (66) (при сопоставлении с формулой (61)) показывает, что интеграл Фурье можно рассматривать как континуальный аналог ряда Фурье: вместо суммирования по индексу *к*, пробегающему целые дискретные значения, налицо интегрирование по непрерывно изменяющейся переменной ω; вместо коэффициентов Фурье, зависящих от целого индекса *к*, налицо функции U(ω) и V(ω) от непрерывно изменяющейся переменной ω.

Вернёмся к комплексной форме интеграла Фурье (64), которую можно представить и в следующем виде:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathring{a}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{67}$$

Здесь называют

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \; - \tag{68}$$

прямым преобразованием Фурье функции f(t), а

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{69}$$

обратным преобразованием Фурье.

Формула (69) определяет значение функции f(t) в точках, где эта функция непрерывна. В точках разрыва непрерывности, учитывая (65), будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} \tag{70}$$

Далее, используем формулу Эйлера в равенстве (68):

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)(\cos\omega\tau-j\sin\omega\tau)d\tau$$

Учитывая введённые выше обозначения U(ω) и V(ω), можно записать

$$F(j\omega)=U(\omega)-jV(\omega),$$

где

$$U(\omega)=\operatorname{Re}F(j\omega)$$

$$V(\omega)=JmF(j\omega)$$

Тогда справедливы следующие формулы:

$$F(j\omega)=\left|F(j\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)} \tag{71}$$

где

$$\left|F(j\omega)\right|=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)} \tag{72}$$

$$\varphi(\omega)=\arg F(j\omega)=-arctg\frac{V(\omega)}{U(\omega)} \tag{73}$$

Так как

$$U(\omega)=\left|F(j\omega)\right|\cos\varphi(\omega)$$

$$V(\omega)=\left|F(j\omega)\right|\sin\varphi(\omega)$$

то вместо формулы (66) можно использовать ещё и такую формулу интеграла Фурье:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left|F(j\omega)\right|\cos\left[\omega t-\varphi(\omega)\right]d\omega \tag{74}$$

Практическое занятие № 7. Понятие о спектрах

План

1. Понятие спектра функции
2. Сравнительный анализ ряда Фурье и преобразования Фурье

Запишем ряд Фурье для периодической функции f(t):

$$f(t)=\frac{\grave{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\grave{a}_k\cos\frac{2\pi}{\grave{O}}kt+b_k\sin\frac{2\pi}{\grave{O}}kt\right) \tag{75}$$

который приведём к виду

$$f(t)=\frac{\grave{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\grave{a}_k^2+b_k^2}\left[\frac{\grave{a}_k}{\sqrt{\grave{a}_k^2+b_k^2}}\cos\frac{2\pi}{\grave{O}}kt+\frac{b_k}{\sqrt{\grave{a}_k^2+b_k^2}}\sin\frac{2\pi}{\grave{O}}kt\right]$$

Обозначим

$$\sqrt{\grave{a}_k^2+b_k^2}=A_k;\qquad \frac{\grave{a}_k}{\sqrt{\grave{a}_k^2+b_k^2}}=\cos\varphi_k;\quad \frac{b_k}{\sqrt{\grave{a}_k^2+b_k^2}}=\sin\varphi_k$$

тогда

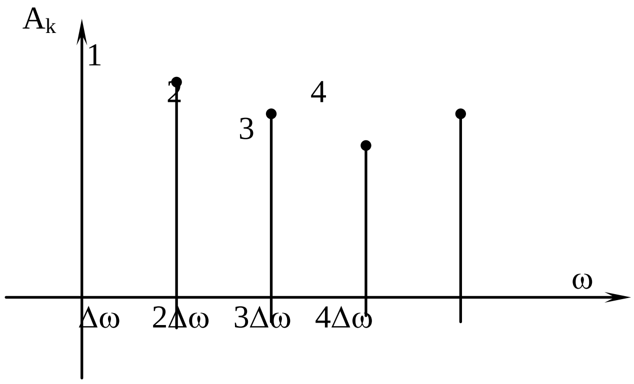
$$f(t)=\frac{\grave{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\grave{A}_k\cos\left(\frac{2\pi}{\grave{O}}kt-\varphi_k\right) \tag{76}$$

т.е. периодическая функция f(t) разложена на сумму гармонических составляющих и $\grave{A}_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$ – есть амплитуда k-ой гармоники, а $\varphi_k=arctg\frac{b_k}{\grave{a}_k}$ – есть начальная фаза k-ой гармоники.

Принято называть совокупность A_k– амплитудным частотным спектром (или просто спектром амплитуд), а совокупность φ_k – фазовым частотным спектром (или спектром фаз) периодической функции f(t).

Графически частотные спектры удобно изображать на плоскости в координатах A_k (или φ_k) – ω=kΔω, здесь $\Delta\omega={}^{2\pi}/_{T}$ – частота первой гармоники. Так как k=1,2,…, то очевидно, что <u>частотные спектры периодической функции имеют дискретный характер</u>. Расстояние между отдельными линиями спектра в общем случае равно Δω (рис. 24).

Рис. 24



Периодическую функцию можно также представить рядом Фурье в комплексной форме:

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\tilde{N}_k\,\mathring{a}^{j\Delta\omega kt}=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}G_k\,\mathring{a}^{j\Delta\omega kt} \tag{77}$$

где $\Delta\omega={}^{2\pi}/_{T}$ – частота первой гармоники;

$\tilde{N}_k=\frac{\grave{a}_k-jb_k}{2}$, $\tilde{N}_{-k}=\frac{\grave{a}_k+jb_k}{2}$ – комплексные коэффициенты разложения в ряд (77),

$G_k=2\tilde{N}_k=A_ke^{-j\varphi_k}$.

Совокупность величины G_k называют комплексным спектром периодической функции.

Заметим, что в формуле (77) суммирование производится как по положительным, так и по отрицательным значениям k, т.е. комплексная форма ряда Фурье (77) допускает существование положительных и отрицательных частот $\omega = k\Delta\omega$. Но после суммирования комплексных слагаемых останутся только вещественные величины, т.к. комплексные коэффициенты C_k и C_{-k} являются комплексно сопряжёнными. При определении спектров достаточно строить лишь половину спектра при $k\Delta\omega > 0$.

Рассмотрим теперь спектры непериодических функций.

В обоих случаях функция $f(t)$, как периодическая, так и непериодичес-кая, раскладывается на сумму гармонических составляющих. Однако в ряде Фурье смежные гармоники ряда имеют частоты, отличающиеся друг от друга на величину $\Delta\omega$. В представлении же функции $f(t)$ в виде интеграла Фурье час-тоты смежных гармоник непрерывно переходят одна в другую, т.е. отличаются на величину бесконечно малую ($d\omega$).

Т.е., в результате предельного перехода от ряда к интегралу Фурье интервалы между отдельными спектральными линиями становятся сколь угодно малыми ($\Delta\omega = {}^{2\pi}/_{T} \to 0$ при $T \to \infty$), перепады амплитуд сглаживаются, и дискретные точки 1,2,3… на рис. 24 сливаются в непрерывную линию. Такой спектр называют <u>сплошным</u>.

По аналогии с комплексной формой ряда Фурье (77) в обратном преобразовании Фурье (69)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{+j\omega t} d\omega$$

$F(j\omega)$ – называют комплексным спектром непериодической функции (иногда называют спектральной плотностью или спектральной характеристикой непериодической функции $f(t)$), а $[{}^{1}/_{\pi}\, F(j\omega)d\omega]$ – есть бесконечно малый аналог комплексной амплитуды G гармонического колебания с частотой ω. Величину $|F(j\omega)|$ в формуле (74) называют амплитудным частотным спектром $f(t)$, а $\varphi(\omega)$ – фазовым частотным спектром.

Между непериодической функцией $f(t)$ и её комплексным спектром $F(j\omega)$ существует взаимооднозначное соответствие:

$$f(t) \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = F(j\omega) \to \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = f(t)$$

Благодаря этому, в ряде задач заменяют операции над протекающими процессами $f(t)$ операциями над их комплексными спектрами $F(j\omega)$, что прино-сит часто массу удобств.

Практическое занятие № 8. Свойства преобразования Фурье

План

1. Изучение свойств преобразования Фурье

2. Разбор примеров на свойства преобразования Фурье

Преобразованию Фурье могут быть подвергнуты функции $\boldsymbol{f(t)}$, удовлетворяющие условиям Дирихле и являющиеся абсолютно интегрируемыми на всей оси $\boldsymbol{Ot}$. Из формулы (68)

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

следует, что преобразование Фурье состоит в умножении функции $f(t)$ на множитель $e^{-j\omega t}$ и интегрировании произведения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Формула (68) устанавливает связь между функцией $f(t)$, аргументом которой является время t, и ей соответствующей комплексной функцией $F(j\omega)$, имеющей в качестве аргумента частоту ω.

Интеграл в правой части формулы (68) понимают в смысле главного значения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} f(t)e^{-j\omega t}dt.$$

Символически прямое преобразование Фурье обозначают

$$F[f(t)] = F(j\omega).$$

Формула (69) позволяет по известной функции $F(j\omega)$ определить соответствующую ей функцию $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Интеграл в правой части формулы (69) также понимают в смысле главного значения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \lim_{\Omega\to\infty}\int_{-\Omega}^{\Omega} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Символически обратное преобразование Фурье обозначают

$$F^{-1}[F(j\omega)] = f(t).$$

<u>Пример 1.</u>

Найти $F[f(t)]$, где $f(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$ - действительное

$$F[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt =$$

$$= \frac{1}{a-j\omega}e^{(a-j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-(a+j\omega)}e^{-(a+j\omega)t}\Big|_{0}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a+j\omega+a-j\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{2a}{a^2+\omega^2} = F(j\omega)$$

Т. е. $F\,[e^{-a|t|}] = \dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$

Пример 2.

Найти функцию $\boldsymbol{f(t)}$ при $\boldsymbol{t \geq 0}$, если ее комплексный спектр

$$F(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}\ , \ a > 0 \qquad f(t) = F^{-1}\left[\frac{1}{a + j\omega}\right] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a + j\omega}e^{j\omega t}d\omega .$$

Функция $F(j\omega) = \dfrac{1}{a + j\omega}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана и имеет в верхней полуплоскости единственную особую точку $\omega = j\,a$.

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a + j\omega}e^{j\omega t}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{j\,(\omega + \frac{a}{j})}e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{j}2\pi\,j\,\mathrm{Re}\,s\left[\frac{e^{j\omega t}}{\omega + \frac{a}{j}}\right]_{\omega = -\frac{a}{j}}$$

и, следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a + j\omega}e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}2\pi e^{j\omega t}\Big|_{\omega = ja} = e^{-at}\ , \quad t \geq 0$$

При $t < 0$ $\qquad f(t) \equiv 0$

Спектральные характеристики суммы, производной и интеграла.

Теорема 16.

Комплексный спектр суммы преобразуемых по Фурье функций равен сумме комплексных спектров слагаемых:

$$F[\,f_1(t) + f_2(t)\,] = F[\,f_1(t)\,] + F[\,f_2(t)\,]$$

Комплексный спектр произведения функции на величину, не зависящую от $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{\omega}$, равен произведению величины на комплексный спектр функций:

$$F[k\,f(T)] = k\,F[\,f(t)\,]$$

Доказательство следует из линейности интеграла:

$$F[\,f_1(t)+f_2(t)\,]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\,f_1(t)+f_2(t)\,]e^{-j\omega t}dt=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)e^{-j\omega t}dt+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_2(t)e^{-j\omega t}dt=F[\,f_1(t)+f_2(t)\,]$$

$$F[\,k\,f(t)\,]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k\,f(t)e^{-j\omega t}dt=k\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=k\,F[\,f(t)\,]$$

Следствие.

Из теоремы 16 следует, что преобразование Фурье линейной комбинации преобразуемых по Фурье функций равно той же линейной комбинации соответствующих комплексных спектров:

$$F\left[\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,f_k(t)\right]=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,F[\,f_k(t)\,]=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,F_k\,(j\omega)\,.$$

$\boldsymbol{\alpha_k}$ - величина, не зависящая от $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{\omega}$.

12.3. Комплексный спектр производной и интеграла.

Теорема 17. (теорема о комплексном спектре производной).

Если функция $\boldsymbol{f(t)}$ и ее производная $\boldsymbol{f'(t)}$ преобразуемы по Фурье и

$F[\,f(t)\,]=F(j\omega)$, то $F[\,f'(t)\,]=j\omega F(j\omega)$.

Теорема утверждает, что дифференцированию функции $\boldsymbol{f(t)}$ соответствует в комплексной области умножение на $\boldsymbol{j\omega}$.

Доказательство.

По определению

$$\boldsymbol{F[\,f'(t)\,]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f'(t)e^{-i\omega t}dt}\,.$$

Проинтегрируем правую часть этого выражения по частям:

$$u=e^{-j\omega t},\quad dv=f'(t)\,dt$$

$$F[\,f'(t)\,]=e^{-j\omega t}\,f(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}+j\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Так как по условиям теоремы функция $\boldsymbol{f(t)}$ преобразуема по Фурье, то

$$\lim_{t\to\pm\infty}f(t)=0$$

и, следовательно,

$$f(t)e^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0$$

Тогда

$$F[f'(t)]=j\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=j\omega F(j\omega).$$

<u>Следствие.</u>

Последовательным применением теоремы 17 можно получить, что

$F[f^{(n)}(t)]=(j\omega)^n F(j\omega)$, где $F(j\omega)=F[f(t)]$

если функция $f(t)$ и n ее первых производных преобразуемы по Фурье.

<u>Теорема 18.</u> (теорема о комплексном спектре интеграла).

Если функция $f(t)$ преобразуема по Фурье и $F[f(t)]=F(j\omega)$ и если $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt=0$, то интеграл $f_{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,d\tau$ так же преобразуем по Фурье и имеет своим комплексным спектром $F[f_{(-1)}(t)]=\dfrac{F(j\omega)}{j\omega}$.

Доказательство.

По определению

$$F[f_{(-1)}(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,d\tau\right]e^{-j\omega t}dt$$

Возьмем интеграл в правой части равенства по частям:

$$u=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,d\tau \qquad du=f(t)\,dt$$

$$dv=e^{-j\omega t}dt \qquad v=-\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}$$

тогда

$$F[f_{(-1)}(t)]=-\left[\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\right]\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{j\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Так как по условиям теоремы $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt=0$, то первое слагаемое в правой части обращается в ноль и

$$F[f_{(-1)}(t)] = \frac{1}{j\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega}F(j\omega) \qquad \text{ч. т. д.}$$

Теорема может быть распространена и на интегралы кратности $\boldsymbol{n}$:

Если $\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n\ \text{ðàç}} f(t)(dt)^n = 0$, то справедливо

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} \dots \int_{-\infty}^{t} f(t)(dt)^n\right] = \frac{1}{(j\omega)^n}F(j\omega)$$

<u>Замечание.</u>

Из последних двух теорем следует, что комплексный спектр производной может быть получен умножением, а комплексный спектр интеграла – делением комплексного спектра функции $f(t)$ на $\boldsymbol{j\omega}$.

Смещение в области комплексных спектров и $\boldsymbol{f(t)}$.

Изменение масштаба.

<u>Теорема 19.</u> (теорема смещения в области комплексных спектров).

Если функция $f(t)$ преобразуема по Фурье и $F[f(t)] = F(j\omega)$, то

$$F[e^{\pm jat}f(t)] = F(j(\omega \mp a))$$

где $a > 0$ - любое число.

<u>Доказательство.</u>

По определению

$$F[e^{\pm jat}f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm jat}f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(\omega \mp a)t}dt = F(j(\omega \mp a))$$

т. е. смещенным комплексным спектром $F(j(\omega \mp a)$ обладает функция

$f(t) = e^{\pm jat}$.

<u>Пример.</u>

Найти $F[f(t)e^{jat}]$, если $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{ïðè} \quad t > 0 \\ 0 & \text{ïðè} \quad t < 0 \end{cases}$

Выше получено, что

$$F[f(t)] = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

тогда на основании теоремы 19

$$F[\,f(t)e^{jat}\,] = \frac{1}{\alpha + j(\omega - a)}$$

Теорема 20. (теорема смещения в области $f(t)$).

Если функция $f(t)$ преобразуема по Фурье и $F[\,f(t)\,] = F(j\omega)$, то комплексный спектр смещенный (запаздывающей) функции $f(t-a)$ где $a > 0$, есть

$$F[\,f(t-a)\,] = e^{-j\omega a}F(j\omega)$$

Доказательство.

По определению

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)e^{-j\omega\theta}d\theta$$

(интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования).

Введем новую переменную интегрирования $\boldsymbol{t}$ такую, что $\boldsymbol{\theta = t - a}$, тогда

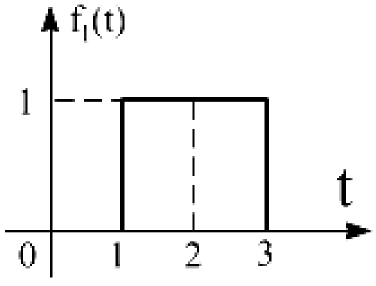
$$F(j\omega) = \int f(t-a)e^{-j\omega(t+a)}dt = e^{\,j\omega a}\int f(t-a)e^{-j\omega t}dt = e^{\,j\omega a}\,F[\,f(t-a)\,].$$

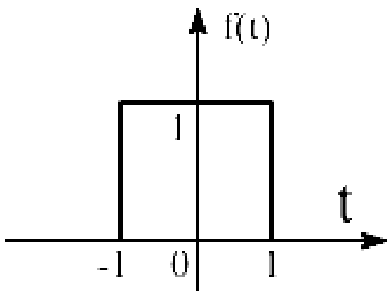
Заменив a на $(-a)$ можно получить комплексный спектр функции $f(t+a)$, “опережающий ” $f(t)$:

$$F[\,f(a+t)\,] = e^{\,j\omega a}F(j\omega).$$

Пример.

Найти комплексный спектр смещенного импульса $\boldsymbol{f_1(t)}$:





Указанная функция $\boldsymbol{f_1(t)}$ является смещенной (запаздывающей) по отношению к функции $\boldsymbol{f(t)}$ на величину 2.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

Найдем сначала комплексный спектр несмещенной функции $\boldsymbol{f(t)}$:

$$F[\,f(t)\,]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{1} 1\cdot e^{-j\omega t}dt=\frac{-e^{-j\omega t}}{j\omega}\bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{-e^{-j\omega}}{j\omega}+\frac{e^{j\omega}}{j\omega}=\frac{2}{\omega}\left(\frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{2j}\right)=\frac{2}{\omega}\sin\omega=F(j\omega)$$

Тогда комплексный спектр смещенный на 2 функции определится согласно теореме 20:

$$F[\,f_1(t)\,]=F[\,f(t-2)\,]=e^{-j\omega 2}F(j\omega)=e^{-j2\omega}\,\frac{2}{\omega}\sin\omega$$

Теорема 21. (теорема об изменении масштаба).

Если функция $f(t)$ преобразуема по Фурье и $F[\,f(t)\,]=F(j\omega)$ и $\boldsymbol{a}$ - положительное вещественное число, то справедливо равенство

$$F\left[\,f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=a\,F(j\,a\omega)$$

Доказательство.

По определению

$$F(j\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)e^{-j\nu\theta}d\theta$$

1. Введем новую переменную $\boldsymbol{\omega}$, такую, что $\boldsymbol{\nu = a\,\omega}$ тогда

$$F(j\,a\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)e^{-j\,a\omega\theta}d\theta$$

2. Введем еще одну новую переменную $\boldsymbol{t}$: $\boldsymbol{\theta = \frac{t}{a}}$

Тогда $F(j\,a\omega)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-j\omega t}dt$

откуда $a\,F(j\,a\,\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-j\omega t}d=F\left[\,f\left(\frac{t}{a}\right)\right].$

Из доказанной теоремы следует, что при растяжении или сжатии в $\boldsymbol{a}$ раз графика функции $f(t)$ вдоль оси времени график $|F(j\omega)|$

1) сжимается или растягивается в $\boldsymbol{a}$ раз вдоль оси частот;
2) увеличиваются или уменьшаются в $\boldsymbol{a}$ раз его значения.

т. е. чем короче импульс, тем шире график его $|\boldsymbol{F(j\omega)}|$.

Пример.

Известно, что $F[f(t)]=\dfrac{2}{\omega}\sin\omega=F(j\omega)$, где $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$.

Найти $F\left[f\left(\dfrac{t}{a}\right)\right]$, где $f\left(\dfrac{t}{a}\right)=f\left(\dfrac{t}{4}\right)$.

Согласно теореме 21 имеем ($\boldsymbol{a=4}$)

$$F\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=aF(j\omega a)=4\cdot\frac{2}{4\omega}\sin 4\omega=\frac{2}{\omega}\sin 4\omega$$

12.5. Теорема Парсеваля.

Теорема 22. (теорема Парсеваля).

Если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ преобразуемы по Фурье и имеют комплексные спектры соответственно

$$F[f_1(t)]=F_1(j\omega) \quad \text{и} \quad F[f_2(t)]=F_2(j\omega)$$

и если интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_1(j\omega)d\omega$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_2(j\omega)d\omega$ сходятся абсолютно, то справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)\,f_2(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_1(j\omega)F_2(-j\omega)d\omega$$

Доказанная теорема позволяет находить интеграл в бесконечных пределах от произведения двух функций, оперируя лишь с комплексными спектрами этих функций. Если $f_1(t)$ характеризует, например, мгновенное значение напряжения, а $f_2(t)$ - мгновенное значение тока в электрической цепи, то произведение $f_1(t)\cdot f_2(t)$ есть мгновенная мощность, а интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)\,f_2(t)\,dt$ - энергия. Тогда, зная $F_1(j\omega)$ и $\boldsymbol{F_2(j\omega)}$ можно с помощью теоремы Парсеваля вычислить энергию, выделяемую за время $\boldsymbol{-\infty<t<+\infty}$.

Следствие.

Если $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$, то $F_1(j\omega)=F_2(j\omega)=F(j\omega)$ и тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)\cdot F(-j\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|F(j\omega)|^2\,d\omega$$

т. к.

$$F(j\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt-j\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt=U(\omega)-jV(\omega)$$

$$F(-j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)$$

$$F(j\omega)F_2(j\omega)=U^2(\omega)+V^2(\omega)=\left|F(j\omega)\right|^2$$

Заметим, что функция $\left|F(j\omega)\right|^2$ характеризует распределение энергии по частотам гармоник и может быть названа энергетической спектральной характеристикой непериодической функции $f(t)$.

12.6. Произведение комплексных спектров. Комплексный спектр произведения функций.

Определение.

Пусть функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ определены в интервале $-\infty < t < +\infty$. Тогда функцию

$$\boldsymbol{f(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\tau)\,f_2(t)\,d\tau} \qquad (78)$$

называют сверткой функций $\boldsymbol{f_1(t)}$ и $\boldsymbol{f_2(t)}$. Иногда свертку символически обозначают $\boldsymbol{f(t)=f_1(t)*f_2(t)}$ и читают: функция $\boldsymbol{f_1(t)}$ свернутая с функцией $\boldsymbol{f_2(t)}$.

Для получения свертки следует, как видно из (78), заменить в функциях $\boldsymbol{f_1(t)}$ и $\boldsymbol{f_2(t)}$ переменную $\boldsymbol{t}$ на $\boldsymbol{\tau}$; затем в функции $\boldsymbol{f_1(\tau)}$ аргумент $\boldsymbol{\tau}$ заменить на $\boldsymbol{-\tau}$ и сместить $\boldsymbol{f_1(-\tau)}$ на величину $\boldsymbol{t}$, т. е. организовать $\boldsymbol{f_1(\tau-t)}$ и $\boldsymbol{f_2(\tau)}$ и затем проинтегрировать полученное произведение в интервале $-\infty < \tau < +\infty$.

Основные свойства свертки.

1. Операция свертывания обладает свойством коммутативности, т. е.

$$\boldsymbol{f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)}$$

или

$$\boldsymbol{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\tau)\,f_2(\tau)\,d\tau=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau}$$

2. Свертывание обладает свойством ассоциативности, т. е.

$$\boldsymbol{[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]}$$

3. Свертывание обладает свойством дистрибутивности относительно сложения, т. е.

$$\boldsymbol{f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)}$$

Теорема 23. (теорема о комплексном спектре свёртки 2-х функций).

Если $\boldsymbol{f_1(t)}$ и $\boldsymbol{f_2(t)}$ преобразуемы по Фурье и имеют соответственно комплексные спектры $F_1(j\omega)$ и $F_2(j\omega)$, то комплексный спектр свертки этих функций равен произведению их комплексных спектров, т. е.

$$F[f_1(t)*f_2(t)] = F_1(j\omega)F_2(j\omega)$$

Теорема 24. (теорема о комплексном спектре произведения функций).

Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ преобразуемы по Фурье и имеют соответственно комплексные спектры $F_1(j\omega)$ и $F_2(j\omega)$, то

$$F[f_1(t)\cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1[j(\omega-\nu)]F_2(j\nu)\,d\nu$$

Практическое занятие № 9. Комплексные спектры некоторых специальных функций

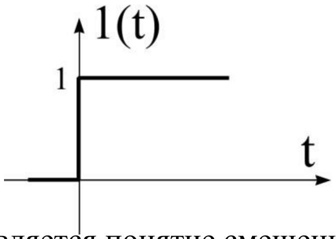
План

1. Изучение комплексных спектров некоторых специальных функций

2. Разбор примеров на доске

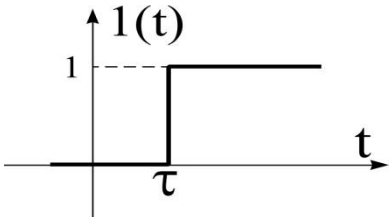
В качестве воздействий, прикладываемых к САУ, часто рассматривают следующие:

Единичное ступенчатое воздействие или единичную ступенчатую функцию.



$$1(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad (79)$$

Более общим является понятие смещенной ступенчатой функции



$$\mathbf{1}(t-\tau) = \begin{cases} \mathbf{1} & t > \tau \\ \mathbf{0} & t < \tau \end{cases}$$

Из формулы (79) следует, что единичная ступенчатая функция при $t = 0$ имеет разрыв непрерывности первого рода (причем значение функции в точке разрыва не определено).

Тем не менее, единичным ступенчатым функциям в ряде случаев при $t = 0$ приписывают вполне определенные значения.

Наиболее часто встречаются функции, определенные следующим образом

$$1(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ \frac{1}{2} & t=0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \qquad (80)$$

$$1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad (81)$$

$$1(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \qquad (82)$$

Выбор значения единичной ступенчатой функции при $t = 0$ определяется особенностями решаемой задачи. Например, представление (80) удобно в том случае, когда функцию $\mathbf{1(t)}$ рассматривают как предел некоторой последовательности непрерывных функций

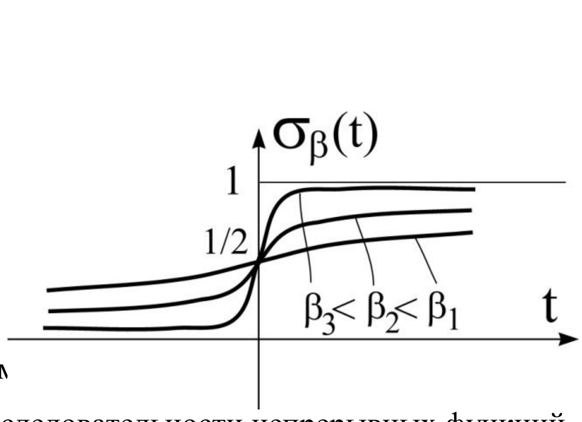
$$\sigma_\beta = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + arctg\,\beta t\right]$$

Нетрудно показать, что $\lim\limits_{\beta\to\infty} \sigma_\beta(t) = 1(t)$

$t > 0$ $$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + arctg\,\beta t\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = 1$$

$t < 0$ $$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + arctg\,\beta t\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right] = 0$$

$t = 0$ $$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + arctg\,\beta t\right] = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$



Таким образом, последовательность непрерывных функций $\boldsymbol{\sigma_\beta(t)}$ при $\boldsymbol{\beta\to\infty}$ стремится к единичной ступенчатой функции.

Зам быть приняты и иные аппроксимирующие последовательности непрерывных функций.

Дельта – функция $\boldsymbol{\delta(t)}$.

Иногда ее еще называют функцией Дирака, по имени физика, которому она обязана своим существованием

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases} \tag{83}$$

причем интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1 \tag{84}$$

т. е. дельта – функция представляет собой импульс бесконечно – малой длительности и бесконечно – большой амплитуды с площадью, равной 1.

Далее, $\boldsymbol{\delta}$ - функция может рассматриваться как предел последовательности гладких (т. е. имеющих производные любого порядка) дельтаобразных функций, например

$$\sigma'_{\beta}(t)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\beta}{1+(\beta t)^2}$$

Вычислим пределы

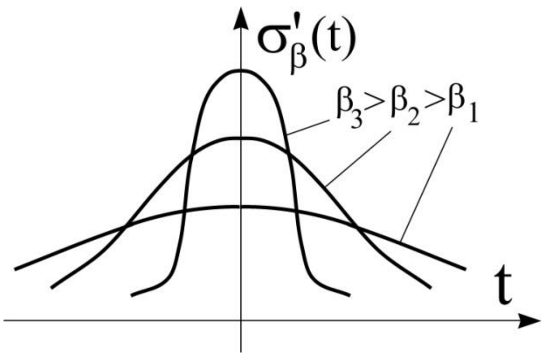
$t\neq 0$ $\qquad \lim\limits_{\beta\to\infty}\sigma'_{\beta}(t)=\lim\limits_{\beta\to\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\beta}{1+(\beta t)^2}=0$

$t=0$ $\qquad \lim\limits_{\beta\to\infty}\sigma'_{\beta}(t)=\lim\limits_{\beta\to\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\beta}{1+(\beta t)^2}=\infty$

и при этом

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\beta\,dt}{1+(\beta t)^2}=\frac{1}{\pi}arctg\beta t\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right]=1$$

Таким образом, действительно предел последовательности функций $\boldsymbol{\sigma'(\beta)}$ является при $\beta\to\infty$ δ - функцией. δ - функция может аппроксимироваться и разрывными функциями, например $f_{\delta}(t,a)=\dfrac{1(t)-1(t-a)}{a}$. Смещенная $\boldsymbol{\delta}$ - функция определяется равенством (85):



$$\delta(t-\tau)=\begin{cases}0, & t\neq\tau\\ \infty, & t=\tau\end{cases} \tag{85}$$

при этом $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\,dt = 1$

Функцию $\delta(t-\tau)$ рассматривают, как предел при $\beta \to \infty$ смещенных на τ гладких дельтообразных функций: $\sigma'(t-\tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\beta}{1+\beta^2 (t-\tau)^2}$.

Замечание.

δ - функция не является “функцией” в обычном смысле, т. к. Условия 83 и 84 оказываются несовместимыми, если их рассматривать с позиций классического математического анализа. δ - функция относится к классу так называемых обобщенных функций. Заметим, что так как гладкие δ - образные последовательности $\sigma'_\beta(t)$ были получены в результате дифференцирования последовательностей гладких функций $\sigma_\beta(t)$, сходящихся к единичной ступенчатой функции, то δ - функцию можно считать производной по t от единичной ступенчатой функции т. е.

$$\delta(t-\tau) = \frac{d}{dt} \cdot 1(t-\tau) \qquad \text{(и для } \tau = 0\text{)}$$

или $$\delta(t-\tau) = \frac{d\,1(t-\tau)}{dt}.$$

Т. о. понятие δ - функции оказывается удобным при распространении операции дифференцирования на разрывные функции.

Рассмотрим одно свойство δ - функции.

Если $f(t)$ непрерывна и ограничена в интервале $-\infty < t < \infty$, то справедливо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,dt = f(\tau)$$

Действительно, при $t \neq \tau$ согласно (85) подынтегральное выражение равно $\mathbf{0}$, и следовательно

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,dt = \int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} f(t)\delta(t-\tau)\,dt,$$

где $\varepsilon > 0$ - произвольная малая величина.

При $t = \tau$ функция $f(t)$ принимает значение $f(\tau)$ и может быть вынесена за знак интеграла, т. к. интеграл берется в бесконечно малой окрестности точки τ.

Таким образом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,dt = f(\tau)\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\delta(t-\tau)\,dt = f(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau)\,dt = f(\tau)$$

Это соотношение выражает так называемое <u>фильтрующее свойство</u> $\boldsymbol{\delta}$ - функции (или выхватывающее).

Комплексные спектры $\delta(t)$ и $1(t)$.

Найдем теперь преобразование Фурье для функций $\delta(t)$ и $1(t)$.

На основании фильтрующего свойства δ - функций

$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}\,\delta(t-0)\,dt\right] = 1 \qquad (86)$$

Для запаздывающей $\boldsymbol{\delta}$ - функции

$$F[\delta(t-\tau)] = e^{-j\omega\tau}\cdot 1 \qquad (87)$$

(на основании теоремы 20).

<u>Комплексный спектр единичной ступенчатой функции</u>:

Прежде всего, следует заметить, что $1(t)$ не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости ($\int_{-\infty}^{+\infty}\left|1(t)\right|dt = t\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \infty$) и, следовательно, прямое преобразование Фурье для нее непосредственно не применимо. Однако, используя понятие $\boldsymbol{\delta}$ - функции, можно получить комплексный спектр $F(j\omega)$ и для функции $\mathbf{1}(\boldsymbol{t})$.

Покажем, что

$$F[1(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) = F(j\omega) \qquad (88)$$

По формуле обратного преобразования Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right]e^{j\omega t}d\omega =$$

и далее на основании фильтрующего свойства $\boldsymbol{\delta}$ - функции

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j\omega t}}{j\omega}d\omega + \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega-0)\underbrace{e^{j\omega t}}_{f(t)}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j\omega t}}{j\omega}d\omega + \frac{1}{2}$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega = \pi j \qquad \text{при} \quad t > 0$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega = -\pi j \qquad \text{при} \quad t < 0$$

(согласно лемме Жордана), получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{j}(\pi j) + \frac{1}{2} = 1, \qquad t > 0$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{j}(-\pi j) + \frac{1}{2} = 0, \qquad t < 0$$

Следовательно $\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) = F[1(t)]$

Выделим в выражении

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega + \frac{1}{2}$$

вещественную и мнимую части:

$$1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega + \frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\omega t}{j\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j \sin\omega t}{j\omega} d\omega + \frac{1}{2}$$

т. е.
$$1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{2} \qquad (89)$$

получили представление единичной ступенчатой функции в виде интеграла Фурье.
Для смещенной единичной ступенчатой функции

$$F[1(t-\tau)] = e^{-j\omega\tau}\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] \qquad (90)$$

Преобразование Фурье периодических функций.

Строго говоря, периодические функции, например, косинус не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости на интервале $(-\infty;+\infty)$ и, следовательно, формула прямого преобразования Фурье не может быть <u>непосредственно</u> использована для определения их комплексного спектра $F(j\omega)$.

Аналогично предыдущему можно лишь говорить об обобщенном преобразовании Фурье периодических функций.

Пусть

$$F[f(t)] = F(j\omega) = \pi A[\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)]$$

Тогда, используя формулу обратного преобразования Фурье и фильтрующее свойство δ -функции.

Получим

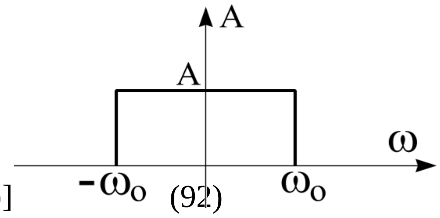
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \pi A[\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)]e^{j\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - \omega_o)e^{j\omega t}d\omega + \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega + \omega_o)e^{j\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{A}{2}e^{j\omega_o t} + \frac{A}{2}e^{-j\omega_o t} = A\cos\omega_o t$$

Таким образом получим, что

$$F[A\cos\omega_o t] = \pi A[\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)] \qquad (91)$$



Для синусоидальной функции

$$F[A\sin\omega_o t] = \frac{\pi A}{j}[\delta(\omega - \omega_o) - \delta(\omega + \omega_o)] \qquad (92)$$

Но так как любую периодическую функцию можно представить рядом Фурье

$$f(t) = \sum_{1}^{\infty} A_k \cos(k\Delta\omega t - \varphi_k),$$

то уже можно говорить об обобщенном преобразовании Фурье периодических функций.

Практическое занятие №10. Преобразования Лапласа. Основные понятия

План

1. Нахождение изображений функций
2. Применение основных теорем на преобразование Лапласа

Найти изображения следующих функций (по Лапласу):

361. $f(t) = t$

362. $f(t) = \sin 3t$

363. $f(t) = t \cdot e^{t}$

364. $f(t) = 1 + t$

365. $f(t) = 2\sin t - \cos t$

366. $f(t) = t + \frac{1}{2}e^{-t}$

367. $f(t) = 1(t)$

368. $f(t) = e^{\alpha t}$; $\alpha > 0$, $\alpha = const$

369. $f(t) = \sin \omega t$

370. $f(t) = ch\, \alpha t$

371. $f(t) = t \cdot \sin t$

372. $f(t) = sh\, \alpha h$

373. $f(t) = t^{n}$

374. $f(t) = e^{-\alpha t}$

Найти изображения следующих функций:

375. $f(t) = \cos^{2} t$

376. $f(t) = t \cdot \sin \omega t$

377. $f(t) = t \cdot \cos \omega t$

378. $f(t) = t \cdot e^{4}$

379. $f(t) = t^{2} \cdot e^{t}$

380. $f(t) = cht$

381. $f(t) = sht$

382. $f(t) = t \cdot ch\, at \cdot \cos at$

Практическое занятие 11. Разбор примеров на преобразование Лапласа

План

1. Разбор примеров на свойства преобразования Лапласа

2. Самостоятельное выполнение заданий

Найти изображения следующих функций:

383. $f(t) = \int_{0}^{t} \sin t \, dt$

384. $f(t) = \int_{0}^{t} (1+t) \cos \omega t dt$

385. $f(t) = \int_{0}^{t} t\, sh 2t \, dt$

386. $f(t) = \int_{0}^{t} \cos^{2} \omega t \, dt$

387. $f(t) = \int_{0}^{t} ch\, \omega t dt$

388. $f(t) = \int_{0}^{t} t^{2} \cdot e^{-t} dt$

389. $f(t) = \int_{0}^{t} \frac{\sin t}{t} dt$

390. $f(t) = \int_{0}^{t} \frac{\cos t}{t} dt$

Найти изображения следующих функций:

391. $f(t) = t \cdot e^{4t}$

392. $f(t) = t^{2}$

293. $f(t)=\dfrac{e^t-1}{t}$

394. $f(t)=e^t\cdot t\cdot\cos t$

395. $f(t)=\cos(t-1)\cdot 1(t-1)$

396. $f(t)=\cos^2(t-1)\cdot 1(t-1)$

397. $f(t)=\dfrac{1-e^{-t}}{t}$

398. $f(t)=\dfrac{\sin^2 t}{t}$

399. $f(t)=\dfrac{1-\cos t}{t}$

400. $f(t)=\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$

401. $f(t)=\dfrac{e^t-t-1}{t}$

402. $f(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{t}$

Найти изображения следующих функций:

403. $f(t)=\sin(t-b)\cdot 1(t-b)$

404. $f(t)=e^{t-2}\cdot 1(t-2)$

405. $f(t)=\begin{cases}\sin\left(2t-\dfrac{\pi}{4}\right), & t>\dfrac{\pi}{8}\\ 0, & t<\dfrac{\pi}{8}\end{cases}$

406. $f(t)=\begin{cases}\cos\left(3t-\dfrac{\pi}{6}\right), & t>\dfrac{\pi}{18}\\ 0, & t<\dfrac{\pi}{18}\end{cases}$

407. $f(t)=\begin{cases}sh(3t-6), & t>2\\ 0, & t<2\end{cases}$

Для данных изображений найти оригиналы:

408. $F(p)=\dfrac{2e^{-p}}{p^3}$

409. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p^2}$

410. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p-1}$

411. $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p+3}$

412. $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$

413. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$

414. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}(e^{-2p}+2e^{-3p}+3e^{-4p})$

415. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-1}+\dfrac{p\cdot e^{-2p}}{p^2-4}$

416. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2}+\dfrac{2e^{-2p}}{p^3}+\dfrac{6e^{-3p}}{p^4}$

417. $F(p)=\dfrac{e^{-p/3}}{p(p^2+1)}$

Для данных изображений найти оригиналы:

418. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$

419. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}$

420. $F(p)=\dfrac{1}{2p^2+p+p^3}$

421. $F(p)=\dfrac{1}{p^2-p+7}$

422. $F(p)=\dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$

423. $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$

424. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{p\cdot e^{-2p}}{p^2+9}$

Для данных изображений найти оригиналы:

425. $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$

426. $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$

427. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$

428. $F(p)=\dfrac{e^{-p/2}}{p(p+1)(p^2+4)}$

429. $F(p)=\dfrac{8p}{(p^2+3)^2}$

430. $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+3)^2}$

431. $F(p)=\dfrac{2p}{p^2+4p+13}$

432. $F(p)=\dfrac{3p+4}{(p^2-p+1)^2}$

433. $F(p)=\dfrac{5p+8}{(p^2+7p+11)^2}$ 434. $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$

Практическое занятие № 12. Применение преобразования Лапласа к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

План

1. Разбор примеров на доске
2. Самостоятельное решение уравнений

Решить следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях с помощью преобразования Лапласа:

435. $x'+x=e^{-t}$, $x(0)=1$

436. $x'-x=1$, $x(0)=-1$

437. $x'+2x=\sin t$, $x(0)=0$

438. $x''=1$, $x(0)=0,\ x'(0)=1$

439. $x''+x'=1$, $x(0)=0,\ x'(0)=1$

440. $x''+x=0$, $x(0)=1,\ x'(0)=0$

441. $x''+3x'=e^{t}$, $x(0)=0,\ x'(0)=-1$

442. $x''-2x'=e^{2t}$, $x(0)=x'(0)=0$

443. $x''+2x'-3x=e^{-t}$, $x(0)=0,\ x'(0)=1$

Решить следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях с помощью преобразования Лапласа:

444 $x'''+x'=1$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$

445. $x''+2x'=t\cdot\sin t$, $x(0)=x'(0)=0$

446. $x''+2x'+x=t^2$, $x(0)=1,\ x'(0)=0$

447. $x'''+x''=\sin t$, $x(0)=x'(0)=1,\ x''(0)=0$

448. $x''+x=\cos t$, $x(0)=-1,\ x'(0)=1$

449. $x'''+x''=t$, $x(0)=-3,\ x'(0)=1,\ x''(0)=0$

450. $x^{IV}+x''=\cos t$, $x(0)=0,\ x'(0)=-1,\ x''(0)=x'''(0)=0$

451. $x'' + 2x' + 2x = 1,$ $\qquad x(0) = x'(0) = 0$

452. $x' + 2x = t^4 \cdot e^{-2t},$ $\qquad x(0) = -2$

453. $x'' + x = 1,$ $\qquad x(0) = -1,\ x'(0) = 0$

454. $x'' + 4x = t,$ $\qquad x(0) = 1,\ x'(0) = 0$

455. $x''' + x = 0,$ $\qquad x(0) = 0,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = 2$

456. $x'' - x' = t \cdot e^t,$ $\qquad x(0) = x'(0) = 0$

457. $x'' + x = t \cdot e^t + 4\sin t,$ $\qquad x(0) = x'(0) = 0$

458. $x'' + x' + x = t \cdot e^t,$ $\qquad x(0) = x'(0) = 0$

459. $x'' + x = t \cdot \cos 2t,$ $\qquad x(0) = x'(0) = 0$

460. $x''' + 3x'' - 4x = 0,$ $\qquad x(0) = x'(0) = 0,\ x''(0) = 2$

461. $x'' + x = 2\sin t,$ $\qquad x(0) = 1,\ x'(0) = -1$

462. $x'' - 2x' + x = t - \sin t,$ $\qquad x(0) = x'(0) = 0$

463. $x'' + x = e^t,$ $\qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 2$

Решить системы уравнений с помощью преобразования Лапласа:

464. $\begin{cases} x' + y = 0 \\ x + y' = 0 \end{cases}$ $\qquad x(0) = 1,\ y(0) = -1$

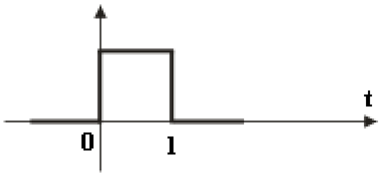
465. $\begin{cases} x + x' = y + e^t \\ y + y' = x + e^t \end{cases}$ $\qquad x(0) = y(0) = 1$

466. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$ $\qquad x(0) = y(0) = 1$

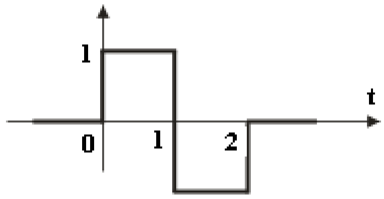
467. $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = 3x + z \\ z' = 3x + y \end{cases}$ $\qquad x(0) = 0,\ y(0) = 1,\ z(0) = 1$

Найти изображения следующих функций, заданных графически:

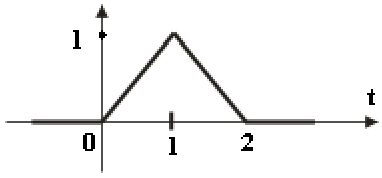
468.



469.

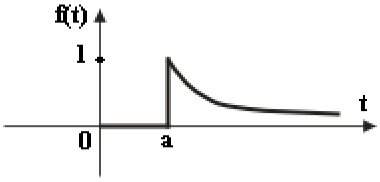


470.



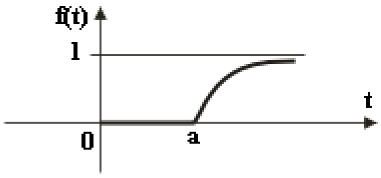
471.

$$f(t)=\begin{cases} 0,\ при\ 0\le t\le a \\ e^{-b(t-a)},\ при\ t>a \end{cases}$$

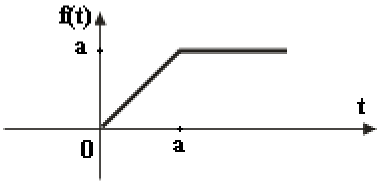


472.

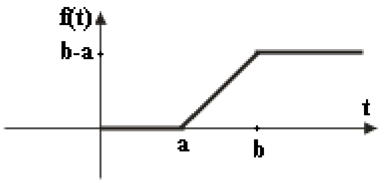
$$f(t)=\begin{cases} 0,\ при\ 0\le t\le a \\ 1\text{-}\,e^{-b(t-a)},\ при\ t>a \end{cases}$$



473.



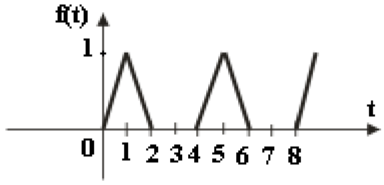
474.



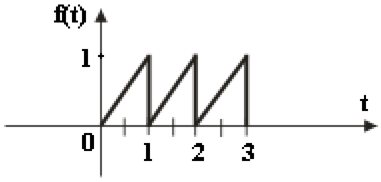
Найти изображение следующих периодических функций:

475.

476.



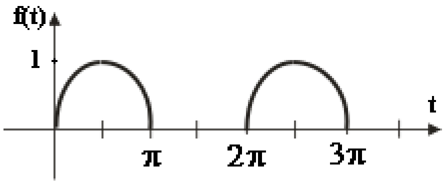
477.



478. $f(t)=|\sin\ t|$

479. $f(t)=|\cos\ t|$

480.



$$f(t)=\begin{cases}\sin t, \text{при } 2k\pi < t < (2k+1)\pi \\ 0, \text{при } (2k+1)\pi < t < (2k+2)\pi\end{cases}$$

$$k=0,1,2...$$

Решить следующие интегральные уравнения с помощью преобразования Лапласа:

481. $\varphi(t)=\sin\ t+\int\limits_0^t (t-\tau)\ \varphi(\tau)d\tau$

482. $\varphi(t)=t+\int\limits_0^t \sin\ (t-\tau)\ \varphi(\tau)d\tau$

483. $\varphi(t)=\cos\ t+\int\limits_0^t e^{t-\tau}\ \varphi(\tau)d\tau$

484. $\varphi(t)=1+t+\int\limits_0^t \cos\ (t-\tau)\ \varphi(\tau)d\tau$

485. $\varphi(t)=e^{-t}+\frac{1}{2}\int\limits_0^t (t-\tau)^2\ \varphi(\tau)d\tau$

486. $\varphi(t)=t+2\int\limits_0^t \left[(t-\tau)-\sin\ (t-\tau)\right]\ \varphi(\tau)d\tau$

487. $\varphi(t)=\sin\ t+2\int\limits_0^t \cos\ (t-\tau)\ \varphi(\tau)d\tau$

488. $\varphi(t)=1-2t-4t^2+\int\limits_0^t \left[3+6(t-\tau)-4(t-\tau)^2\right]\ \varphi(\tau)d\tau$

489. $\varphi(t) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^t \sin\ 2(t-\tau)\ \varphi(\tau)d\tau$

490. $\varphi(t) = e^t - 2\int_0^t \cos\ (t-\tau)\ \varphi(\tau)d\tau$

491. $\varphi(t) = t - \int_0^t sh\ (t-\tau)\ \varphi(\tau)d\tau$

492. $\varphi(t) = sh\ t - \int_0^t ch\ (t-\tau)\ \varphi(\tau)d\tau$

Решить интегральные уравнения:

493. $\int_0^t e^{t-\tau}\varphi(\tau)d\tau = t$

494. $\int_0^t \cos\ (t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = \sin\ t$

495. $\int_0^t e^{t-\tau}\varphi(\tau)d\tau = \sin\ t$

496. $\int_0^t \cos\ (t-\tau)\ \varphi(\tau)d\tau = t + t^2$

497. $\int_0^t ch\ (t-\tau)\ \varphi(\tau)d\tau = sh\ t$

498. $\int_0^t ch\ (t-\tau)\ \varphi(\tau)d\tau = t$

Литература

Основная литература

1. Половинкин, Е.С. Курс лекций по теории функций комплексного переменного : [Учебник для вузов] / Е.С.Половинкин .— М. : Физматкнига, 2003 .— 208с.
2. Краснов, М.Л. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Задачи и примеры с подробными решениями : учебное пособие для вузов / М.Л.Краснов,А.И.Киселев, Г.И.Макаренко .— 3-е изд.,испр.и доп. — М. : УРСС, 2003 .— 176с.
3. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике: Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика : учеб. пособие для вузов / А. П. Рябушко ; под ред. А. П. Рябушко ; под ред. А. П. Рябушко .— 3-е изд. — Минск : Вышэйш. шк., 2006 .— 336 с.

Дополнительная литература

1. Математические основы теории автоматического регулирования : учеб. пособие для втузов / В. А. Иванов [и др.] Т1.— М. : Высшая школа, 1977 .— 366 с
2. Математические основы теории автоматического регулирования : учеб. пособие для втузов / В. А. Иванов [и др.] Т. 2.— М. : Высшая школа, 1977 .— 454 с
3. Пантелеев, А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: Учеб.пособие для втузов / А.В.Пантелеев, А.С.Якимова .— М. : Высш.шк., 2001 .— 445с.