МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт высокоточных систем им. В.П. Грязева
Кафедра «Приборы управления»

Утверждено на заседании кафедры
«Приборы управления»
«_22_» января 2024 г., протокол №_1

Заведующий кафедрой

________________________ В.В. Матвеев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по проведению практических (семинарских)

занятий по дисциплине (модулю)

«Управление оптико-электронными системами»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата
по направлению подготовки

12.03.03 Фотоника и оптоинформатика

с направленностью (профилем)

Интеллектуальные фотонные системы

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 120303-01-24

Тула 2024 год

ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ
методических указаний по проведению практических занятий дисциплины (модуля)

Разработчик:

Родионов В. И., профессор, д. т. н., профессор ____________ .
(подпись)

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

СОСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СХЕМ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. Цель и задачи работы

Целью работы является получение навыков составления функциональных схем электромеханических систем.

Решаемые задачи заключаются в нахождении в заданной системе основных функциональных элементов и соединение их схему с помощью имеющихся в этой системе функциональных связей.

2. Краткие теоретические сведения

Известно, что функциональной называется схема, составленная из элементов, характеризующих выполняемые ими функции. Основными функциональными элементами САУ являются:

– задающий элемент (ЗЭ), предназначенный для выработки заданного значения регулируемой величины;

– элемент сравнения (ЭС), предназначенный для сравнения текущего значения регулируемой величины с заданным и определения сигнала рассогласования между ними;

– управляющий элемент (УЭ) формирует управляющее воздействие на объект управления (ОУ);

– исполнительный элемент (ИЭ) непосредственно воздействует на регулирующий орган ОУ;

– чувствительные элементы (ЧЭ) предназначены для измерения регулируемой величины, а также возмущающих воздействий.

На рис. 1.1 приведена функциональная типовая схема одномерной одноконтурной САУ, автоматический регулятор (АР) которой состоит из ЭС, ЧЭ, УЭ и ИЭ. Если ИЭ отсутствует, то САУ называют системой прямого действия.

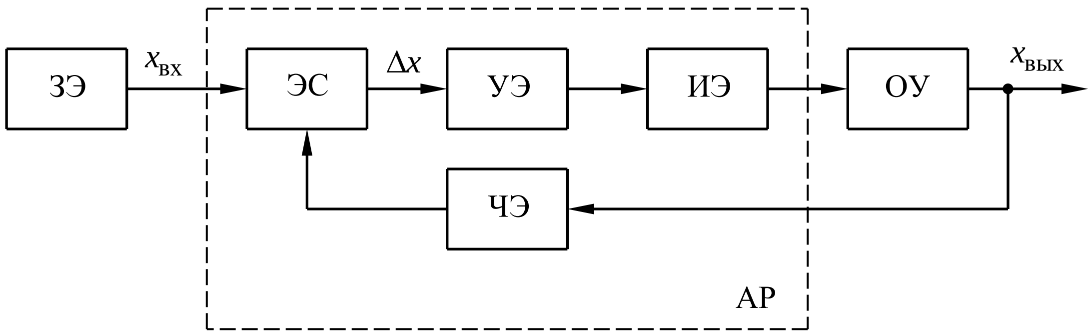


Рис. 1.1. Типовая функциональной схемы САУ

3. Подготовка к работе

3.1. Изучить основы построения функциональных схем САУ.

3.2. Изучить принципы работы и законы функционирования электромеханических систем.

Пример 1.1

Составить функциональную схему следящей системы, принципиальная схема которой приведена на рис. 1.2.

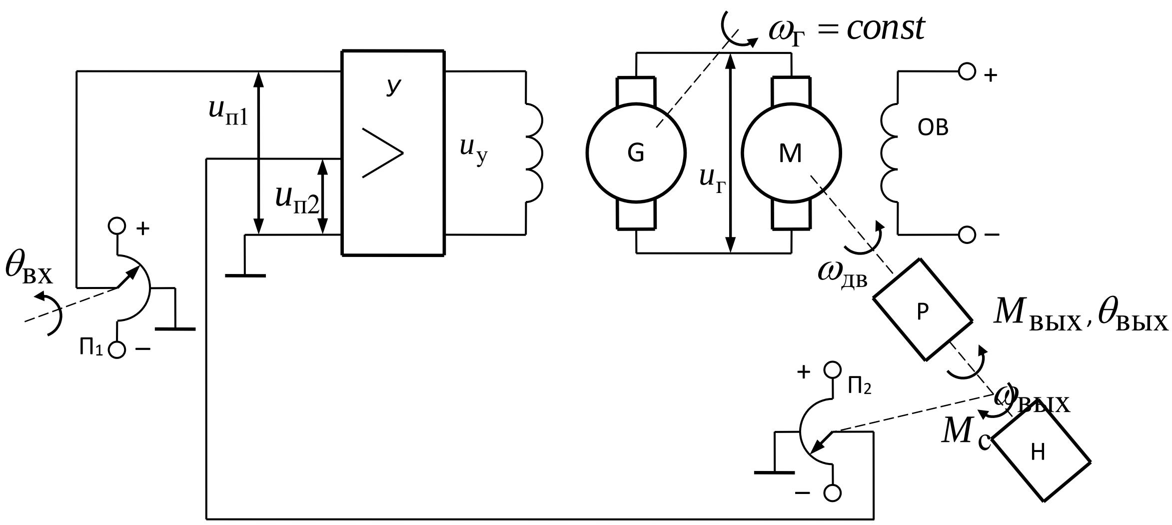


Рис. 1.2. Принципиальная схема следящей системы

Следящая система состоит из двух потенциометров П$_1$ и П$_2$, выдающих сигналы, пропорциональные углам поворота $\theta_{\text{вх}}(t)$ и $\theta_{\text{вых}}(t)$ входного и выходного валов соответственно, электронного усилителя напряжения У, вырабатывающего на первом каскаде разностный сигнал потенциометров и подающего напряжение $u_{\text{у}}(t)$, пропорциональное этому сигналу, на обмотку генератора *G*, ротор которого вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{\text{г}} = const$. Выходная обмотка генератора соединена с обмоткой якоря электродвигателя постоянного тока независимого возбуждения М, выходной вал которого вращается с угловой скоростью $\omega_{\text{дв}}(t)$ и соединен с входным валом редуктора Р. Обмотка возбуждения ОВ электродвигателя питается от отдельного источника постоянного напряжения. На выходном валу редуктора размещена полезная нагрузка Н и действует момент сопротивления $M_{\text{с}}(t)$. При этом вал редуктора поворачивается с угловой скоростью $\omega_{\text{вых}}(t)$ на угол $\theta_{\text{вых}}(t)$.

4. Порядок выполнения работы

Для построения функциональной схемы следящей системы находим основные функциональные элементы, из которых она состоит. Затем соединяем эти элементы между собой функциональными связями. В данном случае задающим воздействием является угол поворота входного вала $\theta_{вх}(t)$, а возмущающим – момент сопротивления движению $M_c(t)$. При этом задающим элементом ЗЭ является потенциометр $П_1$, который преобразует задающее воздействие $\theta_{вх}(t)$ в электрический сигнал $u_{п1}(t)$. Чувствительным элементом ЧЭ, вырабатывающим сигнал, пропорциональный углу поворота выходного вала $\theta_{вых}(t)$, является потенциометр $П_2$, который образует главную отрицательную обратную связь САУ (рис. 1.3).

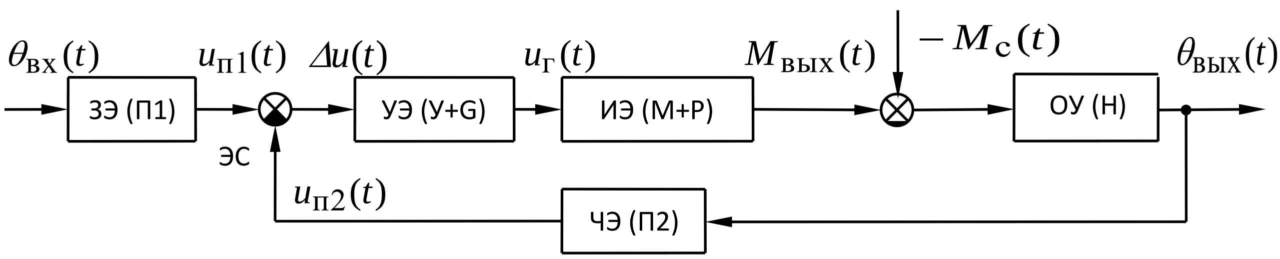


Рис. 1.3. Функциональная схема следящей системы

Пример 1.2

Составить функциональную схему системы стабилизации частоты вращения вала двигателя постоянного тока, принципиальная схема которой приведена на рис. 1.4.

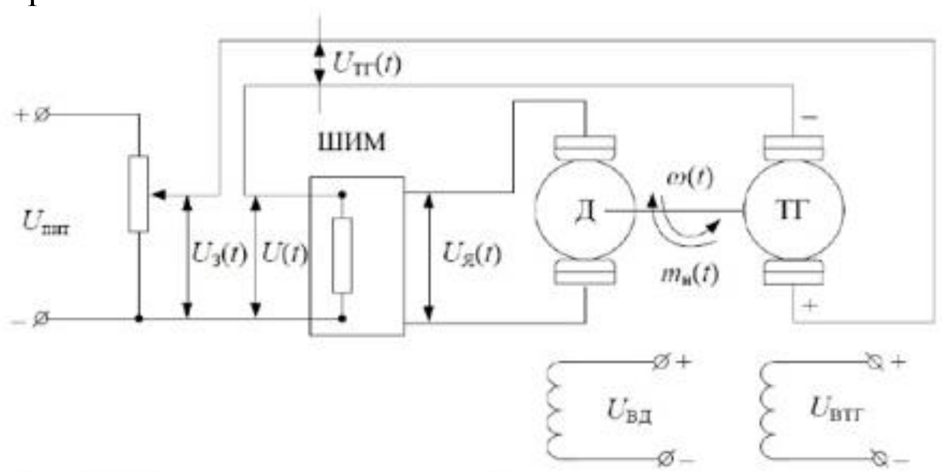


Рис.1.4. Принципиальная схема системы стабилизации частоты вращения вала двигателя постоянного тока

Пример 1.3

Составить функциональную схему одноосного гироскопического стабилизатора, построенного на двухстепенных гироскопах и двигателях постоянного тока, принципиальная схема которого приведена на рис.1.5.

При действии возмущающего момента M_1 по оси стабилизации гироскоп поворачивается с угловой скоростью $\dot{\beta}$ вокруг оси прецессии. При этом появляется гироскопический момент $M_Г$, противоположно направленный возмущающему моменту. Одновременно с датчика угла гироскопа сигнал, пропорциональный β через усилитель поступает на двигатель стабилизации, который вырабатывает дополнительный момент стабилизации M_C, обеспечивая равенство $M_Г + M_C = M_1$.

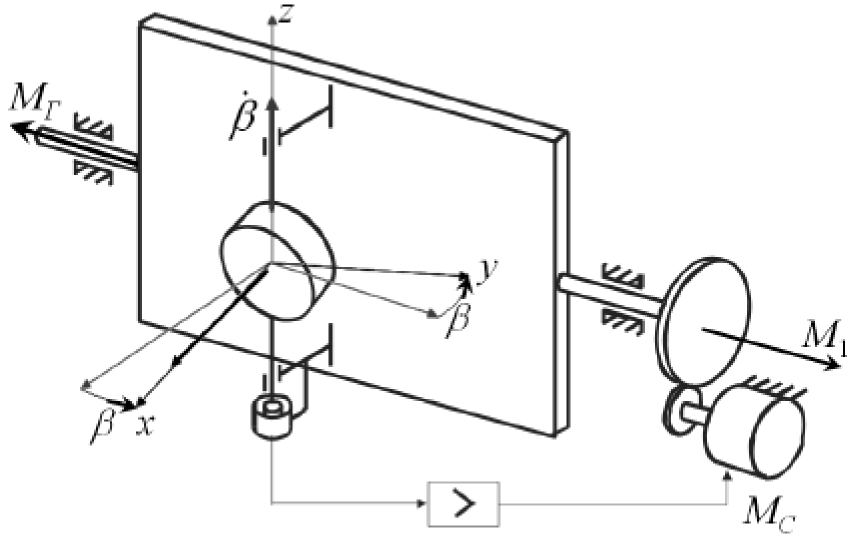


Рис.1.5. Принципиальная схема одноосного гиростабилизатора

5. Указания по оформлению отчета

Отчет должен содержать

1. Задание и цель работы.
2. Функциональные схемы заданных преподавателем конкретных электромеханических САУ.
3. Выводы по работе.

6. Контрольные вопросы

1. Чем отличается функциональная схема многомерной САУ?
2. В чем состоит основное отличие многоконтурной САУ?
3. Может ли САУ не иметь главной обратной связи?
4. Какая связь в гиростабилизаторе является главной?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

1. Цель и задачи работы

Цель работы заключается в получении линеаризованных уравнений динамики электромеханических систем. Задачи состоят в записи нелинейных уравнений движения и их линеаризации.

2. Краткие теоретические сведения

При составлении уравнений движения САУ разбивают на отдельные функциональные элементы (см. рис.1.3 практической работы №1) и записывают динамические уравнения для каждого из этих элементов, используя законы физики. Уравнения всех элементов образуют единую систему дифференциальных уравнений САУ. Количество уравнений в системе должно быть равно количеству переменных системы.

Рассмотрим случай, когда динамические уравнения САУ или какого-либо элемента САУ преобразованы к одному дифференциальному уравнению, записанному относительно выходной переменной и ее производных по времени:

$$F(x(t),\dot{x}(t),...,x^{(n)}(t),u(t),\dot{u}(t),\ldots,u^{(m)}(t),t)=\varphi(f(t),\dot{f}(t),\ldots,f^{(l)}(t),t), \qquad (2.1)$$

где $F(\ldots)$, $\varphi(\ldots)$ – функциональные зависимости, $x(t)$ – выходная переменная, $u(t)$ – задающее или управляющее воздействие, $f(t)$ – возмущающее воздействие.

В общем случае $F(\ldots)$ и $\varphi(\ldots)$ являются нелинейными функциями, поэтому для упрощения исследований уравнения (2.1) линеаризуют. Допустим, что в САУ имеет место установившийся процесс, который описывается следующим уравнением с постоянными коэффициентами:

$$F(x_0,\dot{x}_0,...,x_0^{(n)},u_0)=\varphi(f_0). \qquad (2.2)$$

В основе линеаризации лежит предположение о том, что в процессе работы САУ ее переменные $x(t)$, $u(t)$, $f(t)$ изменяются так, что их отклонения от установившихся значений x_0, u_0, f_0 остаются достаточно малыми. Тогда переменные системы можно представить в виде

$$x(t)=x_0+\delta_x(t),\ \dot{x}(t)=\dot{x}_0+\delta_{\dot{x}}(t),\ \ldots,\ x^{(n)}(t)=x_0^{(n)}+\delta_{x^{(n)}}(t),$$

$$u(t)=u_0+\delta_u(t),\ f(t)=f_0+\delta_f(t)$$

3. Подготовка к работе

3.1. Выбрать необходимые объекты управления (по заданию преподавателя).
3.2. Изучить основы теории этих объектов управления.

4. Порядок выполнения работы

Пример 2.1

Составить уравнения динамики следящей системы, принципиальная схема которой приведена на рис. 1.2, а функциональная схема – на рис. 1.3.

Решение

Для составления динамических уравнений, запишем дифференциальные уравнения каждого функционального элемента системы в отдельности.

1) Уравнения потенциометров имеют вид:

$$u_{\text{п}1}(t) = k_{\text{п}1}\theta_{\text{вх}}(t);$$

$$u_{\text{п}2}(t) = k_{\text{п}2}\theta_{\text{вых}}(t),$$

где $u_{\text{п}1}(t), u_{\text{п}2}(t)$, $k_{\text{п}1}$, $k_{\text{п}2}$ – напряжения на выходе и коэффициенты передачи потенциометров.

2) Уравнение элемента сравнения $\Delta u(t) = u_{\text{п}1}(t) - u_{\text{п}2}(t)$ при условии, что $k_{\text{п}1} = k_{\text{п}2} = k_{\text{п}}$, а $\Delta\theta(t) = \theta_{\text{вх}}(t) - \theta_{\text{вых}}(t)$, имеет вид

$$\Delta u(t) = k_{\text{П}}\Delta\theta(t) = k_{\text{П}}[\theta_{\text{вх}}(t) - \theta_{\text{вых}}(t)].$$

3) Уравнение электронного усилителя имеет вид

$$u_{\text{у}}(t) = k(1 - e^{-|a\cdot\Delta u(t)|})\cdot sign(\Delta u(t)),$$

где k, a – параметры выходной характеристики усилителя.

4) Уравнения генератора для линейной части характеристики намагничивания имеют следующий вид:

$$L_{\text{ВГ}}\frac{di_{\text{ВГ}}(t)}{dt} + R_{\text{ВГ}}i_{\text{ВГ}}(t) = u_{\text{у}}(t);$$

$$u_{\text{Г}}(t) = k_{\Gamma}^{/}i_{\text{ВГ}}(t),$$

где $i_{\text{ВГ}}(t)$ – ток в обмотке возбуждения генератора, $R_{\text{ВГ}}$, $L_{\text{ВГ}}$ – активное сопротивление и индуктивность обмотки возбуждения, $u_{\text{Г}}(t)$ – напряжение, вырабатываемое генератором, $k_{\Gamma}^{/}$ – коэффициент пропорциональности между выходным напряжением и током возбуждения генератора.

Объединяя уравнения генератора, получаем одно уравнение в виде

$$L_{\text{ВГ}}\frac{du_{\text{Г}}(t)}{dt} + R_{\text{ВГ}}u_{\text{Г}}(t) = k_{\Gamma}^{/}u_{\text{у}}(t).$$

5) Уравнения двигателя постоянного тока имеют следующий вид:

$$\begin{cases} L_{\text{я}}\dfrac{di_{\text{я}}(t)}{dt} + R_{\text{я}}i_{\text{я}}(t) + C_{\text{е}}\omega_{\text{дв}}(t) = u_{\text{г}}(t); \\ M_{\text{дв}}(t) = C_{\text{м}}i_{\text{я}}(t), \end{cases}$$

где $i_{\text{я}}(t)$ – ток в обмотке якоря (ротора) двигателя, $\omega_{\text{дв}}(t)$ – угловая скорость ротора двигателя, $M_{\text{дв}}(t)$ – момент, развиваемый двигателем, $C_{\text{е}}$, $C_{\text{м}}$ –

коэффициент ЭДС и коэффициент передачи двигателя по моменту, $R_я$, $L_я$ – активное сопротивление и индуктивность обмотки якоря.

6) Уравнения редуктора по угловой скорости и моменту имеют вид:

$$\omega_{ВЫХ}(t) = \frac{\omega_{ДВ}(t)}{i_Р};$$

$$M_{ВЫХ}(t) = i_Р M_{ДВ}(t).$$

где $\omega_{ВЫХ}(t)$, $M_{ВЫХ}(t)$ – угловая скорость и момент сил на выходном валу редуктора, $i_Р$ – передаточное число редуктора.

7) Уравнение нагрузки, жестко соединенной с выходным валом редуктора, имеет вид

$$J'_н \frac{d\omega_{вых}(t)}{dt} = M_{вых}(t) - M_с(t),$$

где $J'_н = J_н + J_{дв} i_р^2$ – приведенный момент инерции на валу нагрузки, $J_н$, $J_{ДВ}$ – моменты инерции нагрузки и ротора двигателя, $M_С(t)$ – момент сопротивления на валу нагрузки.

Объединяя уравнения элементов, запишем систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику следящей системы на валу нагрузки в следующем виде:

$$\begin{cases} L_{ВГ} \dfrac{du_Г(t)}{dt} + R_{ВГ} u_Г(t) = k'_г k(1 - e^{-|ak_п \Delta\theta(t)|}) \cdot sign(k_п \Delta\theta(t)); \\ L_я \dfrac{di_я(t)}{dt} + R_я i_я(t) + i_р C_е \omega_{вых}(t) = u_г(t); \\ M_{вых}(t) = i_р C_м i_я(t); \\ J'_н \dfrac{d\omega_{вых}(t)}{dt} = M_{вых}(t) - M_с(t); \\ \dfrac{d\theta_{вых}(t)}{dt} = \omega_{вых}(t). \end{cases} \tag{2.3}$$

Аналогичные уравнения можно записать для вала электродвигателя:

$$\begin{cases} L_{ВГ} \dfrac{du_г(t)}{dt} + R_{ВГ} u_г(t) = k'_г k(1 - e^{-|ak_п \Delta\theta(t)|}) \cdot sign(k_п \Delta\theta(t)); \\ L_я \dfrac{di_я(t)}{dt} + R_я i_я(t) + C_е \omega_{дв}(t) = u_г(t); \\ J'_{дв} \dfrac{d\omega_{дв}(t)}{dt} = C_м i_я(t) - \dfrac{M_с(t)}{i_р}; \\ \dfrac{d\Delta\theta(t)}{dt} = \dfrac{d\theta_{вх}(t)}{dt} - \dfrac{\omega_{дв}(t)}{i_р}, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $J'_{дв} = \dfrac{J_н}{i_р^2} + J_{дв}$ – приведенный момент инерции на валу двигателя.

Для проведения анализа и синтеза динамики САУ эти уравнения линеаризуют и преобразуют либо к одному дифференциальному уравнению *n*-го порядка, либо к системе *n* дифференциальных уравнений первого порядка.

Пример 2.2

Провести линеаризацию уравнений движения (2.4).

Решение

В данной следящей системе нелинейным элементом является усилитель. Проведем линеаризацию уравнений для случая, когда $M_c(t) = 0$, задающая угловая скорость постоянна $\omega_{BX}(t) = \omega_0 = const$, т.е. угол поворота задающего потенциометра является линейно-нарастающим ($\theta_{ВХ}(t) = \omega_0 t$).

Полагая в системе уравнений равными нулю все производные, получаем статические уравнения следящей системы в установившемся режиме работы в виде:

$$\begin{cases} R_{вг}u_г = k'_г k(1 - e^{-|ak_п\Delta\theta|}) \cdot sign(k_п\Delta\theta); \\ R_я i_я(t) + C_е\omega_0 i_р = u_г, \end{cases}$$

из которых следует, что

$$k'_г k(1 - e^{-|ak_п\Delta\theta|}) \cdot sign(k_п\Delta\theta) = R_{вг}C_е\omega_0 i_р.$$

Для определенности считаем, что $\omega_0 > 0$, тогда $\Delta\theta$ тоже будет больше нуля, и его установившееся значение будет определяться по формуле

$$\Delta\theta_0 = -\frac{1}{ak_п}\ln\left(1 - \frac{R_{вг}C_е\omega_0 i_р}{k'_г k}\right).$$

Обозначим малые отклонения переменных через $\delta_{\Delta\theta}(t)$, $\delta_{\Delta u}(t)$, $\delta_{u_у}(t)$, $\delta_{u_г}(t)$, $\delta_{i_я}(t)$, $\delta_{\omega_{дв}}(t)$. Тогда $\Delta\theta(t) = \Delta\theta_0 + \delta_{\Delta\theta}(t)$, $\Delta u(t) = \Delta u_0 + \delta_{\Delta u}(t)$, $u_у(t) = u_{у0} + \delta_{u_у}(t)$, $u_г(t) = u_{г0} + \delta_{u_г}(t)$, $i_я(t) = i_{я0} + \delta_{i_я}(t)$, $\omega_{дв}(t) = \omega_{дв0} + \delta_{\omega_{дв}}(t)$

Линеаризуем уравнение напряжения на выходе усилителя относительно установившегося значения $\Delta\theta_0$:

$$u_у(t) = u_у(\Delta\theta_0) + \delta_{u_у}(t) = u_{у0} + \left.\frac{\partial u_у(\Delta\theta)}{\partial\Delta\theta}\right|_{\Delta\theta=\Delta\theta_0} \cdot \delta_{\Delta\theta}(t) = u_{у0} + akk_п e^{-ak_п\Delta\theta_0} \cdot \delta_{\Delta\theta}(t)$$

или

$$\delta_{u_у}(t) = k_л k_п \delta_{\Delta\theta}(t),$$

где $k_л = ak \cdot e^{-ak_п\Delta\theta_0}$.

Отсюда для малых переменных $\delta_{u_у}(t)$, $\delta_{\Delta u}(t)$ линеаризованное уравнение усилителя будет иметь вид

$$\delta_{u_{\text{у}}}(t) = k_{\text{л}}\delta_{\Delta u}(t).$$

С учетом этого линеаризованные уравнения движения следящей системы принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \delta_{\Delta\theta}(t) = \delta_{\theta_{\text{вх}}}(t) - \delta_{\theta_{\text{вых}}}(t); \\ L_{\text{вг}}\dfrac{d\delta_{u_{\text{г}}}(t)}{dt} + R_{\text{вг}}\delta_{u_{\text{г}}}(t) = k'_{\text{г}}k_{\text{л}}k_{\text{п}}\delta_{\Delta\theta}(t); \\ L_{\text{я}}\dfrac{d\delta_{i_{\text{я}}}(t)}{dt} + R_{\text{я}}\delta_{i_{\text{я}}}(t) = \delta_{u_{\text{г}}}(t) - C_{\text{е}}\delta_{\omega_{\text{дв}}}(t); \\ J'_{\text{дв}}\dfrac{d\delta_{\omega_{\text{дв}}}(t)}{dt} = C_{\text{м}}\delta_{i_{\text{я}}}(t); \\ \dfrac{d\delta_{\theta_{\text{вых}}}(t)}{dt} = \dfrac{\delta_{\omega_{\text{дв}}}(t)}{i_{\text{р}}}. \end{cases}$$

Обозначая $\delta_{\theta_{\text{вых}}}(t)$ как $\theta_{\text{вых}}(t)$, $\delta_{u_{\text{г}}}(t)$ как $u_{\text{г}}(t)$, $\delta_{\omega_{\text{дв}}}(t)$ как $\omega_{\text{дв}}(t)$, $\delta_{i_{\text{я}}}(t)$ как $i_{\text{я}}(t)$ т.д., получаем линеаризованные уравнения для малых переменных в следующем виде:

$$\begin{cases} \Delta\theta(t) = \theta_{\text{вх}}(t) - \theta_{\text{вых}}(t) \\ L_{\text{вг}}\dfrac{du_{\text{г}}(t)}{dt} + R_{\text{вг}}u_{\text{г}}(t) = k'_{\text{г}}k_{\text{л}}k_{\text{п}}\Delta\theta(t); \\ L_{\text{я}}\dfrac{di_{\text{я}}(t)}{dt} + R_{\text{я}}i_{\text{я}}(t) = u_{\text{г}}(t) - C_{\text{е}}\omega_{\text{дв}}(t); \\ J'_{\text{дв}}\dfrac{d\omega_{\text{дв}}(t)}{dt} = C_{\text{м}}i_{\text{я}}(t); \\ \dfrac{d\theta_{\text{вых}}(t)}{dt} = \dfrac{\omega_{\text{дв}}(t)}{i_{\text{р}}}. \end{cases} \tag{2.5}$$

5. Указания по оформлению отчета

Отчет должен содержать

1. Задание и цель работы.
2. Функциональные схемы заданных преподавателем эктромеханических САУ.
3. Выводы по работе.

6. Контрольные вопросы

1. Приведите примеры нелинейных уравнений?
2. Какие виды линеаризации Вам известны?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

ФОРМЫ ЗАПИСИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ САУ

1. Цель и задачи работы

Научиться преобразовывать системы линейных дифференциальных уравнений к одному дифференциальному уравнению n-го порядка и наоборот.

2. Основы теории

Для того чтобы из системы линейных дифференциальных уравнений, описывающих динамику каждого функционального элемента, получить одно дифференциальное уравнение n-го порядка для всей САУ, необходимо задать входную $x_{\text{вх}}(t)$ и выходную $x_{\text{вых}}(t)$ переменные, а остальные переменные исключить, например, методом последовательной подстановки. В этом случае дифференциальное уравнение всегда бывает однозначно определено и принимает следующий вид:

$$a_n \frac{dx_{\text{вых}}^n(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}x_{\text{вых}}(t)}{dt} + \cdots + a_0 x_{\text{вых}}(t) = b_m \frac{d^m x_{\text{вх}}(t)}{dt} + b_{m-1} \frac{d^{m-1}x_{\text{вх}}(t)}{dt} + \cdots + b_0 x_{\text{вх}}(t)$$

Общий порядок уравнения определяется порядком производной в левой части, т.к. порядок производной в правой части будет не больше, чем в левой ($m \le n$).

Линейное дифференциальное уравнение, записанное для одной регулируемой переменной и ее производных, можно представить в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка с n переменными. При этом вид системы уравнений может быть различный и зависит как от выбора самих переменных, так и от формы записи этих уравнений.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда задающее и возмущающее воздействия постоянны ($m = 0,\ l = 0$). В этом случае уравнение для малых отклонений регулируемой величины САУ принимает следующий вид:

$$a_n x_{\text{вых}}^{(n)}(t) + a_{n-1} x_{\text{вых}}^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 \dot{x}_{\text{вых}}(t) + a_0 x_{\text{вых}}(t) = b_0 u(t) + e_0 f(t)$$

Записывая это уравнение относительно старшей производной, получаем:

$$a_n x_{\text{вых}}^{(n)}(t) = b_0 u(t) + e_0 f(t) - a_{n-1} x_{\text{вых}}^{(n-1)}(t) - \ldots - a_1 \dot{x}_{\text{вых}}(t) - a_0 x_{\text{вых}}(t).$$

Введем следующие обозначения для регулируемой переменной $x_{\text{вых}}(t)$ и ее производных по времени (остальных переменных):

$$x_{\text{вых}}(t) = x_1(t),\ \dot{x}_{\text{вых}}(t) = x_2(t),\ \ldots,\ x_{\text{вых}}^{(n-1)}(t) = x_n(t).$$

С учетом этих обозначений для новых переменных получаем следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = x_2(t); \\ \dot{x_2}(t) = x_3(t); \\ \dots \\ \dot{x_{n-1}}(t) = x_n(t); \\ \dot{x_n}(t) = \frac{b_0}{a_n}u(t) + \frac{e_0}{a_n}f(t) - \frac{a_0}{a_n}x_1(t) - \frac{a_1}{a_n}x_2(t) - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

В связи с тем, что регулируемой величиной $x_{вых}(t)$ является $x_1(t)$, дополним эту систему уравнением выходной переменной

$$x_{вых}(t) = x_1(t).$$

Такая форма записи называется нормальной формой Коши или просто нормальной формой. Переменные $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ называются фазовыми переменными или координатами, а также переменными состояния САУ. В векторно-матричной форме записи при обозначении $x_{ВЫХ}(t) = y(t)$ уравнения (1) имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + Bu(t) + Gf(t); \\ y(t) = CX(t), \end{cases} \quad (3.2)$$

где

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}; \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b_0}{a_n} \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{e_0}{a_n} \end{pmatrix}; \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $X(t)$ – фазовый вектор или вектор состояния системы, $u(t)$ – задающее (управляющее) воздействие, $f(t)$ – возмущающее воздействие, $y(t)$ – выходная переменная, A – собственная матрица состояния, B, G – матрицы управления и возмущения соответственно, C – выходная матрица.

Дифференциальные уравнения, записанные в форме (2), называются уравнениями в пространстве состояний. В нашем случае САУ является одномерной системой, т.к. ее вход $u(t)$ и выход $y(t)$- скалярные величины. Первое уравнение системы (2) называется уравнением состояния САУ, а второе – уравнением выхода.

3. Подготовка к работе

3.1. Изучить основные формы представления уравнений движения САУ.

3.2. Выбрать для преобразования дифференциальные уравнения САУ (по заданию преподавателя).

Пример 3.1

Дана система линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 0{,}1\dfrac{d^2x_{\text{вых}}(t)}{dt^2}+2\dfrac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt}-4x_2(t)=x_3(t); \\ \dfrac{dx_1(t)}{dt}+x_1(t)-x_2(t)=0; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}+x_{\text{вых}}(t)=x_{\text{вх}}(t); \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt}+x_1(t)=x_2(t). \end{cases}$$

Привести данную систему уравнений к одному уравнению относительно переменной $x_{\text{вых}}(t)$ и ее производных.

Решение:

Для удобства вычислений используем оператор дифференцирования $p=\dfrac{d}{dt}$. Тогда в операторной форме система уравнений принимает следующий вид:

$$\begin{cases} (0{,}1p+2)px_{\text{вых}}(t)=4x_2(t)+x_3(t); \\ (p+1)x_1(t)=x_2(t); \\ px_2(t)=x_{\text{вх}}(t)-x_{\text{вых}}(t); \\ px_3(t)=x_2(t)-x_1(t). \end{cases}$$

Подставляя $x_1(t)$ из второго уравнения в четвертое, получаем

$$px_3(t)=x_2(t)-\frac{x_2(t)}{p+1}=\frac{px_2(t)}{p+1} \qquad \text{или} \qquad x_3(t)=\frac{x_2(t)}{p+1}=\frac{x_{\text{вх}}(t)-x_{\text{вых}}(t)}{p(p+1)}.$$

С учетом этого первое уравнение системы принимает вид

$$(0{,}1p+2)px_{\text{вых}}(t)=4\frac{x_{\text{вх}}(t)-x_{\text{вых}}(t)}{p}+\frac{x_{\text{вх}}(t)-x_{\text{вых}X}(t)}{p(p+1)}.$$

Перенося $x_{ВЫХ}(t)$ в левую, а $x_{ВХ}(t)$ - в правую часть, получаем следующее уравнение:

$$[(0{,}1p+2)(p+1)p^2+4p+5]x_{\text{вых}}(t)=(4p+5)x_{\text{вх}}(t),$$

или

$$0{,}1\frac{d^4x_{\text{вых}}(t)}{dt^4}+2{,}1\frac{d^3x_{\text{вых}}(t)}{dt^3}+2\frac{d^2x_{\text{вых}}(t)}{dt^2}+4\frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt}+5x_{\text{вых}}(t)=4\frac{dx_{\text{вх}}(t)}{dt}+5x_{\text{вх}}(t)$$

Пример 3.2

Привести систему уравнений

$$\begin{cases} L_{\text{вг}} \dfrac{du_{\text{г}}(t)}{dt} = k_{\text{г}} k_{\text{л}} k_{\text{п}} (\theta_{\text{вх}}(t) - \theta_{\text{вых}}(t)) - R_{\text{вг}} u_{\text{г}}(t); \\ L_{\text{я}} \dfrac{di_{\text{я}}(t)}{dt} = u_{\text{г}}(t) - R_{\text{я}} i_{\text{я}}(t) - C_{\text{е}} \omega_{\text{дв}}(t); \\ J'_{\text{дв}} \dfrac{d\omega_{\text{дв}}(t)}{dt} = C_{\text{м}} i_{\text{я}}(t); \\ \dfrac{d\theta_{\text{вых}}(t)}{dt} = \dfrac{\omega_{\text{дв}}(t)}{i_{\text{р}}}. \end{cases}$$

к одному уравнению относительно углов поворота потенциометров $\theta_{\text{вых}}(t)$ и $\theta_{\text{вх}}(t)$.

Решение:

Для получения одного дифференциального уравнения относительно переменных $\theta_{\text{вых}}(t)$ и $\theta_{\text{вх}}(t)$ из четвертого уравнения находим $\omega_{\text{дв}}(t)$ и подставляем в третье уравнение для определения тока якоря:

$$i_{\text{я}}(t) = \frac{J'_{\text{дв}}}{C_{\text{м}}} \frac{d\omega_{\text{дв}}(t)}{dt} = i_{\text{р}} \frac{J'_{\text{дв}}}{C_{\text{м}}} \frac{d^2\theta_{\text{вых}}(t)}{dt^2}.$$

Далее подставляем $i_{\text{я}}(t)$ и $\omega_{\text{дв}}(t)$ во второе уравнение системы. В результате получаем

$$u_{\text{г}}(t) = L_{\text{я}} i_{\text{р}} \frac{J'_{\text{дв}}}{C_{\text{м}}} \frac{d^3\theta_{\text{вых}}(t)}{dt^3} + R_{\text{я}} i_{\text{р}} \frac{J'_{\text{дв}}}{C_{\text{м}}} \frac{d^2\theta_{\text{вых}}(t)}{dt^2} + C_{\text{е}} i_{\text{р}} \frac{d\theta_{\text{вых}}(t)}{dt}.$$

Затем, подставляя $u_{Г}(t)$ в первое уравнение системы, будем иметь

$$k_{\text{у}} k_{\text{п}} \theta_{\text{вх}}(t) = i_{\text{р}} \frac{L_{\text{вг}}}{R_{\text{вг}}} \frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}} \frac{J'_{\text{дв}} R_{\text{я}}}{C_{\text{м}}} \frac{d^4\theta_{\text{вых}}(t)}{dt^4} + i_{\text{р}} \left(\frac{L_{\text{вг}}}{R_{\text{вг}}} + \frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}}\right) \frac{J'_{\text{дв}} R_{\text{я}}}{C_{\text{м}}} \frac{d^3\theta_{\text{вых}}(t)}{dt^3} +$$

$$+ i_{\text{р}} \left(\frac{L_{\text{вг}}}{R_{\text{вг}}} C_{\text{е}} + \frac{J'_{\text{дв}} R_{\text{я}}}{C_{\text{м}}}\right) \frac{d^2\theta_{\text{вых}}(t)}{dt^2} + C_{\text{е}} i_{\text{р}} \frac{d\theta_{\text{вых}}(t)}{dt} + k_{\text{у}} k_{\text{п}} \theta_{\text{вых}}(t),$$

где $k_{\text{у}} = \dfrac{k'_{\text{г}} k_{\text{л}}}{R_{\text{г}}}$.

Перенося в последнем уравнении переменную $\theta_{\text{вх}}(t)$ в правую, а $\theta_{\text{вых}}(t)$ и ее производные по времени – в левую часть уравнения, окончательно получаем следующее уравнение:

$$T_{\text{г}} T_{\text{эм}} T_{\text{дв}} \frac{d^4\theta_{\text{вых}}(t)}{dt^4} + T_{\text{дв}} (T_{\text{г}} + T_{\text{эм}}) \frac{d^3\theta_{\text{вых}}(t)}{dt^3} + (T_{\text{г}} + T_{\text{дв}}) \frac{d^2\theta_{\text{вых}}}{dt^2} + \frac{d\theta_{\text{вых}}(t)}{dt} +$$
$$+ k_{\text{с}} \theta_{\text{вых}}(t) = k_{\text{с}} \theta_{\text{вх}}(t),$$

где $T_{\text{г}} = \dfrac{L_{\text{вг}}}{R_{\text{вг}}}$, $T_{\text{эм}} = \dfrac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}}$, $T_{\text{дв}} = \dfrac{J'_{\text{дв}} R_{\text{я}}}{C_{\text{е}} C_{\text{м}}}$, $k_{\text{с}} = \dfrac{k_{\text{у}} k_{\text{п}}}{i_{\text{р}} C_{\text{е}}}$.

5. Указания по оформлению отчета

Отчет должен содержать

1. Задание и цель работы.
2. Расчет передаточной функции электродвиеотеля постоянного тока.
3. Выводы по работе.

6. Контрольные вопросы

1. Чем отличается функциональная схема от структурной?
2. Какие бывают формы записи уравнений движения САУ?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

ПЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ САУ

1. Цель и задачи работы

Решение систем уравнений.

Пример 4.1

Уравнение движения САУ имеет вид

$$0{,}01\dddot{y}(t)+0{,}1\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)+y(t)=u(t).$$

Преобразовать это уравнение к нормальной форме.

Решение:

Для преобразования записываем это уравнение относительно старшей производной.

$$\dddot{y}(t)=-10\ddot{y}(t)-100\dot{y}(t)-100y(t)+100u(t).$$

Вводим обозначения:

$$y(t)=x_1(t),\ \dot{y}(t)=x_2(t),\ \ddot{y}(t)=x_3(t).$$

С учетом этих обозначений уравнения в нормальной форме имеют вид:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t);\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t);\\ \dot{x}_3(t)=-100x_1(t)-100x_2(t)-10x_3(t)+100u(t);\\ y(t)=x_1(t).\end{cases}$$

Запишем эту систему уравнений в векторно-матричном виде

$$\begin{cases}\dfrac{dX(t)}{dt}=AX(t)+Bu(t);\\ y(t)=CX(t),\end{cases}$$

где

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -100 & -100 & -10\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 100\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Пример 4.2

Уравнение движения САУ имеет вид

$$0{,}01\dddot{y}(t)+0{,}1\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)+y(t)=0{,}1\dot{u}(t)+u(t).$$

Записать это уравнение в нормальной форме.

Решение:

Используя операторную форму, получаем

$$(0{,}01p^3+0{,}1p^2+p+1)y(t)=(0{,}1p+1)u(t).$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{y(t)}{0{,}1p+1}=\frac{u(t)}{0{,}01p^3+0{,}1p^2+p+1}=x_1(t).$$

Из преобразованного уравнения запишем систему двух уравнений с промежуточной переменной $x_1(t)$.

$$(0{,}01p^3+0{,}1p^2+p+1)x_1(t)=u(t);$$

$$y(t)=(0{,}1p+1)x_1(t).$$

Переходим обратно к дифференциальному виду:

$$\dddot{x}_1(t)=-10\ddot{x}_1(t)-100\dot{x}_1(t)-100x_1(t)+100u(t);$$

$$y(t)=0{,}1\dot{x}_1(t)+x_1(t).$$

С учетом ранее принятых обозначений уравнения в нормальной форме принимают следующий вид:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t);\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t);\\ \dot{x}_3(t)=-100x_1(t)-100x_2(t)-10x_3(t)+100u(t);\\ y(t)=x_1(t)+0{,}1x_2(t).\end{cases}$$

В векторно-матричном виде имеем

$$\begin{cases}\dfrac{dX(t)}{dt}=AX(t)+Bu(t);\\ y(t)=CX(t),\end{cases}$$

где

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -100 & -100 & -10\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 100\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1 & 0{,}1 & 0\end{pmatrix}.$$

Пример 4.3

По уравнению, полученному в примере 3.2 практического занятия №3, записать для следящей системы уравнения и матрицы в пространстве состояний.

Решение:

Вводим следующие переменные состояния:

$$x_1(t)=y(t)=\theta_{\text{вых}}(t),\ x_2(t)=\dot{\theta}_{\text{вых}}(t),\ x_3(t)=\ddot{\theta}_{\text{вых}}(t),\ x_4(t)=\dddot{\theta}_{\text{вых}}(t).$$

Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = x_2(t); \\ \dot{x_2}(t) = x_3(t); \\ \dot{x_3}(t) = x_4(t); \\ \dot{x_4}(t) = -\dfrac{k_c}{T_г T_{эм} T_{дв}} x_1(t) - \dfrac{1}{T_г T_{эм} T_{дв}} x_2(t) - \dfrac{T_г + T_{эм}}{T_г T_{эм} T_{дв}} x_3(t) - \dfrac{T_{дв}(T_г + T_{эм})}{T_г T_{эм} T_{дв}} x_4(t) + \dfrac{k_c}{T_г T_{эм} T_{дв}} \theta_{вых}(t). \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Отсюда матрицы системы в пространстве состояний имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k_с}{T_г T_{эм} T_{дв}} & -\dfrac{1}{T_г T_{эм} T_{дв}} & -\dfrac{T_г + T_{дв}}{T_г T_{эм} T_{дв}} & -\dfrac{T_{дв}(T_г + T_{эм})}{T_г T_{эм} T_{дв}} \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{k_с}{T_г T_{эм} T_{дв}} \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.4

Преобразовать к нормальному виду следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}01\ddot{y}_1(t) + 0{,}1\dot{y}_1(t) + y_1(t) = u(t); \\ 0{,}02\dot{y}_2(t) + 0{,}2y_2(t) = 4y_1(t) + f(t). \end{cases}$$

Решение:

Записываем каждое из уравнений относительно старшей производной:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(t) = -10\dot{y}_1(t) - 100y_1(t) + 100u(t); \\ \dot{y}_2(t) = -10y_2(t) + 200y_1(t) + 50f(t). \end{cases}$$

Для системы третьего порядка вводим три переменные состояния

$$x_1(t) = y_1(t);\ x_2(t) = \dot{y}_1(t);\ x_3(t) = y_2(t).$$

С учетом этих обозначений получаем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = -100x_1(t) - 10x_2(t) + 100u(t); \\ \dot{x}_3(t) = 200x_1(t) - 10x_3(t) + 50f(t); \\ y_1(t) = x_1(t); \\ y_2(t) = x_3(t). \end{cases}$$

Пример 4.5

Записать уравнения следящей системы в матрично-векторной форме и получить матрицы в пространстве состояний на основании системы линеаризованных уравнений, полученных в примере 3.2 практического занятия №3.

Решение:

Для записи уравнений следящей системы в нормальной форме необходимо сначала выбрать интересующие нас переменные состояния. Допустим, что необходимо исследовать динамику всех четырех переменных $\theta_{\text{вых}}(t)$, $\omega_{\text{дв}}(t)$, $i_{\text{я}}(t)$, $u_{\text{г}}(t)$. Тогда все они будут являться переменными состояния $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$. Введем обозначения этих переменных:

$$x_1(t) = y(t) = \theta_{\text{вых}}(t),\ x_2(t) = \omega_{\text{дв}}(t),\ x_3(t) = i_{\text{я}}(t),\ x_4(t) = u_{\text{г}}(t),\ u(t) = \theta_{\text{вх}}(t).$$

При таком выборе вектор состояния следящей системы имеет вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{\text{вых}}(t) \\ \omega_{\text{дв}}(t) \\ i_{\text{я}}(t) \\ u_{\text{г}}(t) \end{pmatrix}.$$

С учетом этого уравнения движения следящей системы в векторно-матричной форме получают следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = AX(t) + B\theta_{\text{вх}}(t); \\ \theta_{\text{вых}}(t) = CX(t). \end{cases}$$

Записывая уравнения движения следящей системы согласно вектору состояния, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta_{\text{вых}}(t)}{dt} = \dfrac{\omega_{\text{дв}}(t)}{i_{\text{р}}}; \\ \dfrac{d\omega_{\text{дв}}(t)}{dt} = \dfrac{C_{\text{м}}}{J'_{\text{дв}}} i_{\text{я}}(t); \\ \dfrac{di_{\text{я}}(t)}{dt} = -\dfrac{C_{\text{е}}}{L_{\text{я}}}\omega_{\text{дв}}(t) - \dfrac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} i_{\text{я}}(t) + \dfrac{1}{L_{\text{я}}} u_{\text{г}}(t); \\ \dfrac{du_{\text{г}}(t)}{dt} = \dfrac{R_{\text{вг}}}{L_{\text{вг}}} k_{\text{у}} k_{\text{п}} \theta_{\text{вх}}(t) - \dfrac{R_{\text{вг}}}{L_{\text{вг}}} k_{\text{у}} k_{\text{п}} \theta_{\text{вых}}(t) - \dfrac{R_{\text{вг}}}{L_{\text{вг}}} u_{\text{г}}(t). \end{cases}$$

Матрица A размерностью 4×4 согласно приведенным выше уравнениям движения имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{i_{\text{р}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{C_{\text{м}}}{J'_{\text{дв}}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{C_{\text{е}}}{L_{\text{я}}} & -\dfrac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} & \dfrac{1}{L_{\text{я}}} \\ -\dfrac{R_{\text{вг}}}{L_{\text{вг}}} k_{\text{у}} k_{\text{п}} & 0 & 0 & -\dfrac{R_{\text{вг}}}{L_{\text{вг}}} \end{pmatrix},$$

Так как входное воздействие одно, то входная матрица B имеет размерность 4×1. Согласно уравнениям следящей системы она имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{R_{\text{г}}}{L_{\text{г}}} k_{\text{у}} k_{\text{п}} \end{pmatrix}.$$

Так как выходной переменной системы является $\theta_{\text{вых}}(t)$, то матрица

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Указания по оформлению отчета

Отчет должен содержать

1. Задание и цель работы.
2. Примеры 4.3 и 4.4.
3. Выводы по работе.

6. Контрольные вопросы

1. Чем отличается функциональная схема многомерной САУ?
2. В чем состоит основное отличие многоконтурной САУ?
3. Может ли САУ не иметь главной обратной связи?
4. Какая связь в гиростабилизаторе является главной?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ САУ

1. Цель и задачи работы

Изучение и получение передаточных функций по принципиальной схеме

2. Основы теории

Передаточной функцией элемента или САУ называется отношение преобразования Лапласа выходной величины к преобразованию Лапласа входной величины при нулевых начальных условиях.

Динамика любой линейной САУ может быть определена решением дифференциального уравнения общего вида

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}x(t)^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x}(t) + a_0 x(t) =$$
$$= b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1 \dot{f}(t) + b_0 f(t), \qquad (5.1)$$

где $x(t),\ \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ - выходная величина и ее производные; $f(t),\ \dot{f}(t), \ldots, f^{(m)}(t)$ - входная величина (задающее или возмущающее воздействие) и ее производные.

При нулевых начальных условиях

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ldots = x^{(n)}(0) = 0,\ f(0) = \dot{f}(0) = \ldots = f^{(m)}(0) = 0$$

изображения по Лапласу для переменных и их производных имеют вид:

$$x(t) \leftarrow X(p),\ \dot{x}(t) \leftarrow pX(p),\ \ldots,\ x^{(n)}(t) \leftarrow p^n X(p);$$
$$f(t) \leftarrow F(p),\ \dot{f}(t) \leftarrow pF(p),\ \ldots,\ f^{(m)}(t) \leftarrow p^m F(p),$$

Используя эти изображения, запишем уравнение (1) в преобразованиях по Лапласу:

$$X(p)(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) =$$
$$= F(p)(b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0). \qquad (5.2)$$

Из уравнения (2) получаем передаточную функцию САУ в виде

$$\Phi(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}. \qquad (5.3)$$

3. Подготовка работе

3.1. Изучить основы теории.

3.2. Составить передаточные функции.

Пример 5.1

Записать передаточные функции САУ по воздействиям $u_1(t)$ и $u_2(t)$, уравнение движения которой имеет вид

$$a_2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = b_1 \frac{du_1(t)}{dt} + b_0 u_1(t) + c_0 u_2(t).$$

Решение:

Применяем к уравнению преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях:

$$a_2 p^2 X(p) + a_1 pX(p) + a_0 X(p) = b_1 pU_1(p) + b_0 U_1(p) + c_0 U_2(p),$$

Полагая воздействие $u_2(t)$ равным нулю, получаем передаточную функцию САУ по воздействию $u_1(t)$ в виде

$$a_2 p^2 X(p) + a_1 pX(p) + a_0 X(p) = b_1 pU_1(p) + b_0 U_1(p);$$

$$(a_2 p^2 + a_1 p + a_0) X(p) = (b_1 p + b_0) U_1(p);$$

$$W_1(p) = \frac{X(p)}{U_1(p)} = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Полагая равным нулю воздействие $u_1(t)$, аналогично получаем передаточную функцию системы по воздействию $u_2(t)$:

$$a_2 p^2 X(p) + a_1 pX(p) + a_0 X(p) = c_0 U_2(p);$$

$$(a_2 p^2 + a_1 p + a_0) X(p) = c_0 U_2(p);$$

$$W_2(p) = \frac{X(p)}{U_2(p)} = \frac{c_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Пример 5.2.

Получить передаточные функции для элементов принципиальной схемы следящей системы.

Решение:

Записываем в преобразованиях Лапласа при нулевых начальных условиях уравнения для всех элементов следящей системы, полученные в примере 1 практического занятия №2:

а) потенциометров

$$U_{\text{п1}}(p) = k_{\text{п}} \Theta_{\text{вх}}(p); \; U_{\text{п2}}(p) = k_{\text{п}} \Theta_{\text{вых}}(p),$$

б) электронного усилителя

$$\Delta U(p) = U_{\text{п1}}(p) - U_{\text{п2}}(p) = k_{\text{п}} [\Theta_{\text{вх}}(p) - \Theta_{\text{вых}}(p)];$$

$$U_{\text{у}}(p) = k_{\text{л}} \Delta U(p),$$

в) генератора

$$(L_{\text{вг}} p + R_{\text{вг}}) U_{\text{г}}(p) = k_{\text{г}} U_{\text{у}}(p),$$

г) электродвигателя

$$+\begin{cases} (L_{\text{я}} p + R_{\text{я}}) I_{\text{я}}(p) + C_{\text{е}} \Omega_{\text{дв}}(p) = U_{\text{г}}(p); \\ J'_{\text{дв}} p \Omega_{\text{дв}}(p) = C_{\text{м}} I_{\text{я}}(p) - \dfrac{1}{i_{\text{р}}} M_{\text{с}}(p); \\ p \Theta_{\text{дв}}(p) = \Omega_{\text{дв}}(p), \end{cases}$$

д) для редуктора

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{1}{i_{\text{р}}} \Theta_{\text{дв}}(p); \qquad M_{\text{вых}}(p) = i_{\text{р}} M_{\text{дв}}(p).$$

Приведем уравнения движения электродвигателя к одному уравнению относительно $\Theta_{дв}(p)$:

$$[(L_я p + R_я)\frac{J'_{дв}}{C_м}p + C_е]p\Theta_{дв}(p) = U_г(p) - \frac{1}{C_м i_р}(L_я p + R_я)M_с(p).$$

Из этих уравнений записываем передаточные функции элементов следящей системы в следующем виде:

а) для потенциометров

$$W_{п1}(p) = W_{п2}(p) = W_п(p) = k_п,$$

б) для усилителя

$$W_у(p) = \frac{U_у(p)}{\Delta U(p)} = k_л,$$

в) для генератора

$$W_г(p) = \frac{U_г(p)}{U_у(p)} = \frac{k_г}{L_{вг}p + R_{вг}} = \frac{k_{гн}}{T_г p + 1},$$

где $k_{ГН} = \dfrac{k_г}{R_г}$, $T_г = \dfrac{L_{вг}}{R_{вг}}$,

г) для электродвигателя запишем две передаточные функции по углу поворота выходного вала $\Theta_{дв}(p)$:

- от управляющего воздействия $U_г(p)$

$$W^u_{дв}(p) = \frac{\Theta_{дв}(p)}{U_г(p)} = \frac{1}{((L_я p + R_я)\dfrac{J'_{дв}}{C_м}p + C_е)p} = \frac{k_{дв}}{(T_{эм}T_{дв}p^2 + T_{дв}p + 1)p};$$

- от возмущающего воздействия $M_с(p)$

$$W^M_{дв}(p) = \frac{\Theta_{дв}(p)}{M_с(p)} = \frac{-1}{C_м i_р}\frac{L_я p + R_я}{((L_я p + R_я)\dfrac{J'_{дв}}{C_м}p + C_е)p} = \frac{-k_м(T_{эм}p + 1)}{(T_{эм}T_{дв}p^2 + T_{дв}p + 1)p},$$

где $k_{дв} = \dfrac{1}{C_е}$, $k_м = \dfrac{R_я}{C_е C_м i_р}$, $T_{эм} = \dfrac{L_я}{R_я}$,

д) для редуктора запишем две передаточные функции по углу и моменту:

$$W^{\Theta}_р(p) = \frac{\Theta_{вых}(p)}{\Theta_{дв}(p)} = \frac{1}{i_р}; \qquad W^M_р(p) = \frac{M_{ВЫХ}(p)}{M_{ДВ}(p)} = i_р.$$

5. Указания по оформлению отчета

Отчет должен содержать

1. Задание и цель работы.
2. Записать передаточные функции для занных преподавателем конкретных САУ.
3. Выводы по работе.

6. Контрольные вопросы

1. Чем отличается передаточные функции электродвигателя по управляющему и возмущающему воздействиям?
2. С помощью передаточных функций элементов составить структурную схему следящей системы?
3. Может ли следящая система не иметь главной обратной связи?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ САУ. СВОБОДНОЕ, СОБСТВЕННОЕ И ВЫНУЖЕННОЕ ДВИЖЕНИЯ

1. Цель и задачи работы

Решение дифференциальных уравнений различными методами.

2. Основы теории

Для определения характера изменения выходной величины $x(t)$ необходимо решить дифференциальное уравнение. Для стационарных САУ все коэффициенты уравнения постоянны и известны заранее, входная переменная $f\ (t)$ также известна. Известны начальные условия по $x(t)$ и ее производным.

Для решения уравнений воспользуемся классическим методом и методом, использующим преобразования Лапласа. При этом уравнение заменой

$$b_m f^{(m)}(t) + b_{m\text{-}1} f^{(m\text{-}1)}(t) + \ldots + b_1 \dot{f}(t) + b_0 f(t) = f_0(t)$$

может быть сведено к уравнению

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n\text{-}1)} + \ldots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = f_0(t) \ .$$

При использовании классического метода решение последнего уравнения находится как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения.

Для определения понятий свободного, собственного и вынужденного движения рассмотрим процесс решения уравнения

$$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \dot{x}\ (t) + a_0 x(t) = b_m f^{m}(t) + \ldots + b_1 \dot{f}\ (t) + b_0 f\ (t)$$

с помощью преобразований Лапласа. Положим $t_0 = 0,\ f\ (t) \equiv 0$ при $t < 0$, начальные условия нулевые, т.е.

$$x(0-) = \dot{x}(0-) = \ldots x^{(n-1)}(0-) = 0\,.$$

Обозначаем $X(p) = L[x(t)],\quad F(p) = L[f(t)]$. Применяя преобразования Лапласа к обеим частям уравнения, получаем

$$X(p)(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) = F(p)(b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0)\,.$$

Введем следующие обозначения:

$$B(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0;$$

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0.$$

Для всех рассматриваемых нами воздействий $F(p)$ представляет собой правильную алгебраическую дробь $F(p)=\dfrac{F_1(p)}{F_2(p)}$.

Тогда с учетом введенных обозначений получаем

$$X(p)=\frac{B(p)}{A(p)}\frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Это выражение также представляет собой правильную алгебраическую дробь.

Рассмотрим общий вид решения $x(t)$. Предположим, что многочлены $A(p)$, $F_2(p)$ имеют простые различные корни и степень многочлена $F_2(p)$ равна r. Тогда

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{B(p_i)F_1(p_i)}{A^{/}(p_i)F_2(p_i)}e^{p_i t}+\sum_{j=1}^{r}\frac{B(p_j)F_1(p_j)}{A(p_j)F_2^{/}(p_j)}e^{p_j t},$$

где p_i , $i=1...n$ – корни уравнения $A(p) = 0$; p_j , $j=1...r$ – корни уравнения $F_2(p)=0$,

$$A^{/}(p)=\frac{dA(p)}{dp}, \qquad F_2^{/}(p)=\frac{dF_2(p)}{dp}.$$

Характер изменения слагаемых первой суммы определяется корнями p_i, зависящими от параметров САУ. Но коэффициенты при $e^{p_i t}$ зависят и от вида входного воздействия $f(t)$.

Характер изменения слагаемых второй суммы определяется корнями многочлена p_j, т.е. зависит от вида входного воздействия.

Таким образом, можно записать

$$x(t)=x_{\text{сс}}(t)+x_{\text{в}}(t),$$

где $x_{\text{сс}}(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{B(p_i)F_1(p_i)}{A^{/}(p_i)F_2(p_i)}e^{p_i t}$ - собственное сопровождающее движение системы, $x_B(t)=\sum\limits_{j=1}^{r}\dfrac{B(p_j)F_1(p_j)}{A(p_j)F_2^{/}(p_j)}e^{p_j t}$ - вынужденное движение системы.

Вынужденное движение – это движение, возникающее только при наличии входного воздействия. Вид этого движения определяется видом входного сигнала. Например, если $f(t) \equiv t$, то общий вид вынужденного движения будет

$$x_{\text{В}}(t)=at+b.$$

Если $f(t)=\cos\omega t$, то $x_B(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t=C\cos(\omega t+\varphi)$ и т.д.

Собственное сопровождающее движение также возникает при наличии входного сигнала, но его характер определяется свойствами самой системы (корнями характеристического многочлена $A(p)$).

Рассмотрим теперь решение дифференциального уравнения с учетом начальных условий $x(0),\dot{x}(0),...,x^{(n-1)}(0)$ С учетом теоремы об изображении производной, имеем

$$a_n[p^n x(p) - p^{n-1}x(0) - p^{(n-2)}\dot{x}(0) - \ldots - x^{(n-1)}(0)] + \ldots + a_1[px(p) - x(0)] + a_0 x(p) =$$
$$= \left(b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0\right)F(p)$$

(начальные условия по входному воздействию полагаем нулевыми), или

$$A(p)X(p) - D_н(p) = B(p)F(p)\ ,$$

где

$$A_н(p) = x(0)(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + \ldots + a_1) + \dot{x}(0)(a_n p^{n-2} + \ldots + a_2) + \ldots + a_n x^{(n-1)}(0)$$

Многочлен $A_H(p)$ зависит от коэффициентов a_1, a_2, ..., a_n и начальных условий.

Из последнего уравнения находим

$$X(p) = \frac{A_H(p)}{A(p)} + \frac{B(p)}{A(p)}F(p).$$

Вычисление обратного преобразования Лапласа для второго слагаемого было рассмотрено ранее. При обратном преобразовании первого слагаемого получаем свободное движение САУ:

$$x_{св}(t) = L^{-1}\left[\frac{A_H(p)}{B(p)}\right].$$

Свободное движение возникает в отсутствии входного сигнала и определяется наличием начальных условий. Для случая простых корней $A(p)$ свободное движение определяется по формуле

$$x_{св}(t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{A_H(p_i)}{A^{/}(p_i)}e^{p_i t}\ ,$$

т.е. его характер совпадает с характером собственного сопровождающего движения.

Таким образом, общее решение $x(t)$ можно представить в виде

$$x(t) = x_{св}(t) + x_{сс}(t) + x_{в}(t).$$

Сумма $x_{св}(t) + x_{сс}(t)$ называется собственным движением системы.

$$x_{с}(t) = x_{св}(t) + x_{сс}(t)\,.$$

Тогда полное движение имеет вид

$$x(t) = x_{с}(t) + x_{в}(t).$$

Если $Re\, p_i < 0;\ \ i = 1,\ldots,n;\ \ p_i$ - корни многочлена $A(p)$, то

$$\lim_{t\to\infty} x_{с}(t) = 0\,.$$

Тогда

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_{в}(t)\,.$$

Процесс $x(t)$ *при* $t \to \infty$ называется установившимся процессом а режим работы, в котором наблюдается этот процесс, – установившемся режимом САУ. В данном случае $x_{уст}(t) = x_{в}(t)$. Обычно так и бывает.

Процесс перехода САУ из одного режима в другой называется переходным процессом. В формировании переходного процесса участвует как собственное, так и вынужденное движение.

3. Подготовка к работе

3.1. Изучение теории.

3.2. Анализ решений дифференциальных уравнений и преобразование с помощью таблицы.

Пример 6.1

Решить дифференциальное уравнение первого порядка классическим методом.

Решение:

Рассмотрим уравнение $\dfrac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f_0(t)$.

Однородное дифференциальное уравнение $\dfrac{dx(t)}{dt} + ax(t) = 0$ имеет следующее решение $x(t) = Ce^{-at}$.

Найдем решение неоднородного уравнения. Для этого полагаем, что

$$x(t) = C(t)e^{-at}.$$

Тогда $\dfrac{dC(t)}{dt}e^{-at} - aCe^{-at} + aC(t)e^{-at} = f_0(t)$.

Откуда

$$\frac{dC(t)}{dt}e^{-at} = f_0(t) \quad \text{или} \quad \frac{dC(t)}{dt} = e^{at} f_0(t).$$

После этого находим функцию *C(t)* и записываем решение неоднородного дифференциального уравнения.

Пример 6.2

Решить уравнение второй степени при ступенчатом воздействии, используя преобразование Лапласа.

Решение:

Рассмотрим уравнение

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_1 \frac{df}{dt} + b_0 f$$

и пусть $f(t) = 1(t)$. При этом $\dfrac{df}{dt} = \delta(t)$ и в момент времени $t = 0$ имеет место скачок, т.е. $\dfrac{dx}{dt}(0+) \neq \dfrac{dx}{dt}(0-)$.

При использовании преобразований Лапласа имеем

$$a_2[p^2X(p) - px(0+) - \dot{x}(0+)] + a_1[pX(p) - x(0+)] + a_0X(p) = b_1[pF(p) - f(0+)] + b_0F(p)$$

Реально нам известны начальные условия до подачи входного сигнала, т.е. $\dot{x}(0\text{-})$ и $x(0\text{-})$. Но если $x(0+) = x(0\text{-})$, то $x(t)$ при $t = 0$ испытывает скачок, т.к. $\dot{x}(0+) \neq \dot{x}(0\text{-})$ и $\dot{x}(0+)$ должна специально определяться.

Решение, можно найти, используя преобразования Лапласа с “левыми” начальными условиями:

$$a_2[p^2X(p) - px(0-) - \dot{x}(0-)] + a_1[pX(p) - x(0-)] + a_0X(p) = (b_1p + b_0)F(p)$$

(при этом f (0-) = 0 по определению функции f (t)). Далее мы находим решение так же, как обычно, т.е. определяем X (p) и вычисляем $x(t) = L^{-1}[X(p)]$.

Пример 6.3

Пусть уравнение, описывающее поведение САУ, имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 8x = \sin 10t, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Решение:

Решаем его с помощью преобразований Лапласа:

$$p^2X(p) - px_0 - \dot{x}_0 + 6pX(p) - 6x_0 + 8X(p) = \frac{10}{p^2+100},$$

$$X(p) = \frac{px_0 + \dot{x}_0 + 6x_0}{p^2+6p+8} + \frac{10}{(p^2+6p+8)(p^2+100)}.$$

В данном случае

$$A(p) = p^2 + 6p + 8, \quad p_1 = -2, \quad p_2 = -4,$$
$$B(p) = 1, \quad F_1(p) = 10,$$
$$F_2(p) = p^2 + 100, \quad p_{1,2} = \pm j10,$$
$$A_н(p) = px_0 + \dot{x}_0 + 6x_0.$$

Из сказанного ранее следует, что

$$x_{св}(t) = L^{-1}\left[\frac{px_0 + \dot{x}_0 + 6x_0}{p^2+6p+8}\right] = \left(2x_0 + \frac{\dot{x}_0}{2}\right)e^{-2t} - \left(\frac{\dot{x}_0}{2} + x_0\right)e^{-4t};$$

$$\frac{px_0 + \dot{x}_0 + 6x_0}{(p+2)(p+4)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+4} = \frac{(A+B)p + 4A + 2B}{(p+2)(p+4)};$$

$$\left.\begin{aligned} A + B &= x_0 \\ 4A + 2B &= \dot{x}_0 + 6x_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A &= 2x_0 + 0.5\dot{x}_0 \\ B &= -0.5\dot{x}_0 - x_0 \end{aligned}\right\};$$

Составляющие $x_{сс}(t)$ и $x_{в}(t)$ можно найти с помощью разложения изображения на простейшие дроби. Имеем:

$$\frac{10}{(p+2)(p+4)(p^2+100)} = \frac{H}{p+2} + \frac{R}{p+4} + \frac{Kp+N}{p^2+100}.$$

Определяя H ,R, K, N методом неопределенных коэффициентов, находим

$$H = 0.048,\ R = -0.043,\ K = -0.005,\ N = -0.0076.$$

Используя обратное преобразование Лапласа, получаем

$$x_{\text{сс}}(t) + x_{\text{в}}(t) = L^{-1}\left[\frac{10}{(p^2+6p+8)(p^2+100)}\right]$$

или

$$x_{\text{сс}}(t) + x_{\text{в}}(t) = 0.048e^{-2t} - 0.043e^{-4t} - 0.005\cos 10t - 0.0076\sin 10t.$$

Здесь $x_{\text{сс}}(t) = 0.048e^{-2t} - 0.043e^{-4t}$; $x_{\text{в}}(t) = -0.005\cos 10t - 0.0076\sin 10t$.

Общее решение имеет вид

$$x(t) = (2x_0 + 0.5\dot{x}_0)e^{-2t} - (x_0 + 0.5\dot{x}_0)e^{-4t} + 0.048e^{-2t} - 0.043e^{-2t} - 0.005\cos 10t - 0.0076\sin 10t$$

где $x_{\text{св}}(t) = (2x_0 + 0.5\dot{x}_0)e^{-2t} - (0.5\dot{x}_0 + x_0)e^{-4t}$; $x_{\text{сс}}(t) = 0{,}048e^{-2t} - 0.043e^{-4t}$; $x_{\text{в}}(t) = -0.005\cos 10t - 0.0076\sin 10t$.

При $t \to \infty$ $e^{-2t} \to 0,\ e^{-4t} \to 0$ и в системе наблюдается устанавливается движение

$$x_{\text{уст}}(t) = -0.005\cos 10t - 0.0076\sin 10t.$$

5. Указания по оформлению отчета

Отчет должен содержать

1. Задание и цель работы.
2. Примеры 6.1, 6.2 и 6.3.
3. Выводы по работе.

6. Контрольные вопросы

1. Какие методы решения линейных дифференциальных уравнений Вам известны?
2. Какое движение можно описать однородным дифференциальным уравнением?
3. При каком условии получаем установившийся процесс?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7

УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЖИМЫ САУ

1. Цель и задачи работы

Определение ошибок и получение передаточных функций по структурной схеме.

2. Основы теории

Следящие системы по отношению к задающему воздействию $x_{\text{вх}}(t)$ обычно имеют астатизм первого порядка, т.е. передаточная функция по ошибке $\Delta x(t)$ от задающего воздействия имеет $\nu = 1$:

$$W_{\Delta X}(p) = \frac{\Delta X(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{p(b_m p^m + \ldots + b_1)}{a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0}, \qquad (7.1)$$

поэтому, если задающее воздействие постоянно ($x_{\text{вх}}(t) = 1(t)$), то установившаяся ошибка равна нулю. Однако, для следящих систем наиболее характерным является изменение входной величины по закону $x_{\text{вх}}(t) = Vt$ с постоянной скоростью *V*, которому соответствует изображение вида

$$X_{\text{вх}}(p) = \frac{V}{p^2}. \qquad (7.2)$$

Для этого закона

$$\Delta x_{\text{уст}} = \lim_{p \to 0} p W_{\Delta X} \cdot \frac{V}{p^2} = \lim_{p \to 0} p \frac{p(b_m p^m + \ldots + b_1)}{a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0} \cdot \frac{V}{p^2} = \frac{b_1}{a_0} \cdot V \qquad (3)$$

Установившуюся ошибку следящей системы при входном воздействии, изменяющемся с постоянной скоростью, называют скоростной ошибкой. Обозначив отношение a_0/b_0 через D_V, на основании (3), окончательно получаем

$$\Delta x_{\text{уст}} = \frac{V}{D_V}.$$

Постоянная величина

$$D_V = \frac{V}{\Delta x_{\text{уст}}} \qquad (7.4)$$

называется добротностью следящей системы по скорости и имеет размерность с$^{-1}$. Она показывает величину установившейся скорости выходной оси следящей системы, развиваемой на единицу ошибки.

В следящей системе с астатизмом второго порядка ($\nu = 2$) скоростная ошибка равняется нулю, вследствие этого установившуюся ошибку определяют при изменении входной величины по квадратичному закону с постоянным ускорением $x_{\text{вх}}(t)=\frac{\varepsilon}{2}t^2$.

При этом $\Delta x_{\text{уст}}=\frac{\varepsilon}{D_\varepsilon}$; $D_\varepsilon=\frac{a_0}{b_2}$, (7.5)

где D_ε – добротность следящей системы по ускорению, имеющая размерность с$^{-2}$.

Величины D_V и D_ε зависят от параметров САУ. В одноконтурных системах без местных обратных связей они определяются как произведения передаточных коэффициентов звеньев системы.

В общем случае, если $x_{\text{вх}}(t)$ имеет произвольную форму и конечное число производных, то ошибку системы можно определять следующим образом. Найдем изображение ошибки

$$\Delta X(p)=W_{\Delta x}(p)\cdot X_{\text{вх}}(p)=\frac{1}{1+W_{\text{р}}(p)}\cdot X_{\text{вх}}(p), \qquad (7.6)$$

где $W_{\Delta x}(p)$ – передаточная функция замкнутой системы по ошибке;
$W_{\text{р}}(p)$ – передаточная функция разомкнутой системы;
$X_{\text{вх}}(p)$ – изображение воздействия (задающего или возмущающего).

3. Подготовка к работе

3.1. Изучить основы теории, объекты и средства исследования.

Пример 7.1

Определить установившуюся ошибку при действии на систему, ступенчатого и линейно-нарастающего сигналов.

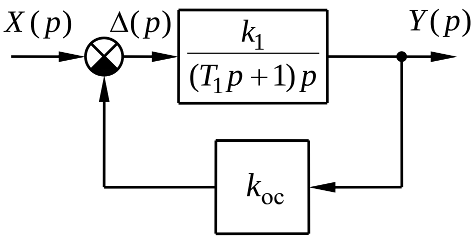


Рис. 7.1 Структурная схема системы

Решение:

Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_{\text{р}}(p)=\frac{k_1k_{\text{ос}}}{(T_1p+1)p}.$$

Следовательно, выражение для передаточной функции по ошибке имеет вид

$$W_\Delta(p)=\frac{(T_1p+1)p}{T_1p^2+p+k_1k_{\text{ос}}}.$$

По теореме о предельном значении установившееся значение ошибки равно

$$\Delta_{\text{уст}}=\lim_{p\to 0} pW_\Delta(p)X(p)=\lim_{p\to 0}\frac{(T_1p+1)p^2}{T_1p^2+p+k_1k_{\text{ос}}}X(p).$$

Подставляя изображения по Лапласу входных сигналов, получаем выражения для ошибок на ступенчатый и линейно-нарастающий сигналы соответственно:

$$\Delta_{\text{уст1}}=\lim_{p\to 0}\frac{(T_1p+1)p^2}{T_1p^2+p+k_1k_{\text{ос}}}\frac{1}{p}=\lim_{p\to 0}\frac{(T_1p+1)p}{T_1p^2+p+k_1k_{\text{ос}}}=0;$$

$$\Delta_{\text{уст2}}=\lim_{p\to 0}\frac{(T_1p+1)p^2}{T_1p^2+p+k_1k_{\text{ос}}}\frac{1}{p^2}=\lim_{p\to 0}\frac{T_1p+1}{T_1p^2+p+k_1k_{\text{ос}}}=\frac{1}{k_1k_{\text{ос}}}.$$

Пример 7.2

Определить установившуюся ошибку для структурной схемы приведённой в примере 1 практического занятия №8.(рис 2)

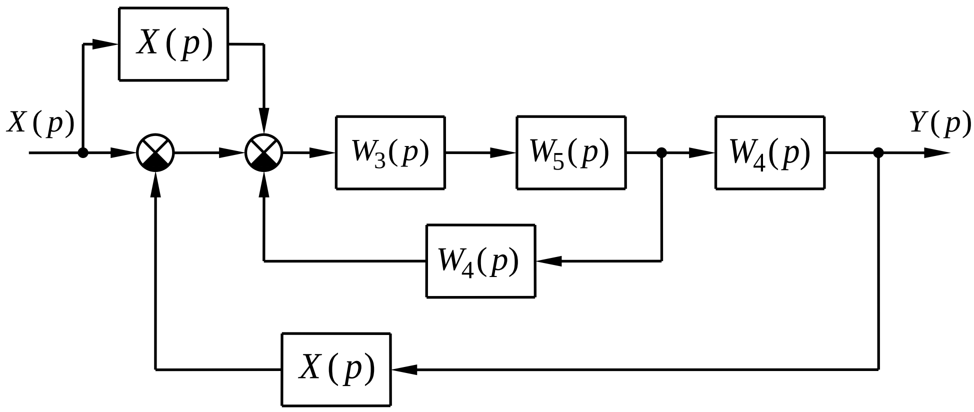


Рис.7.2 Структурная схема

Пример 7.3

Определить установившуюся ошибку при одновременном действии на следящую систему, рассмотренную в примере 1 практического занятия №1, линейно-нарастающего управляющего $\theta_{\text{вх}}(t)=Vt$ и ступенчатого возмущающего $M_{\text{с}}(t)=m$ воздействия.

Решение:

Передаточные функции по ошибке от управляющего и возмущающего воздействия соответственно равны:

$$W_\Delta^\theta(p)=\frac{p(T_{\text{г}}T_{\text{эм}}T_{\text{дв}}p^3+(T_{\text{г}}T_{\text{дв}}+T_{\text{эм}}T_{\text{дв}})p^2+(T_{\text{г}}+T_{\text{дв}})p+1)}{T_{\text{г}}T_{\text{эм}}T_{\text{дв}}p^4+(T_{\text{г}}T_{\text{дв}}+T_{\text{эм}}T_{\text{дв}})p^3+(T_{\text{г}}+T_{\text{дв}})p^2+p+k_{\text{п}}k_{\text{у}}k_{\text{дв}}/i_{\text{р}}};$$

$$W_{\varDelta}^{M}(p)=\frac{(T_{\text{эм}}p+1)(T_{\text{г}}p+1)k'_{\text{м}}k_{\text{дв}}/i_{\text{р}}}{T_{\text{г}}T_{\text{эм}}T_{\text{дв}}p^4+(T_{\text{г}}T_{\text{дв}}+T_{\text{эм}}T_{\text{дв}})p^3+(T_{\text{г}}+T_{\text{дв}})p^2+p+k_{\text{п}}k_{\text{у}}k_{\text{дв}}/i_{\text{р}}}.$$

Выражение для суммарной ошибки от обоих воздействий имеет вид

$$\varDelta_{\text{уст}}=\lim_{p\to 0}p(W_{\varDelta}^{\theta}(p)\varTheta_{\text{вх}}(p)+W_{\varDelta}^{M}(p)M_{\text{с}}(p))=$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{p^2(T_{\text{г}}T_{\text{эм}}T_{\text{дв}}p^3+(T_{\text{г}}T_{\text{дв}}+T_{\text{эм}}T_{\text{дв}})p^2+(T_{\text{г}}+T_{\text{дв}})p+1)}{T_{\text{г}}T_{\text{эм}}T_{\text{дв}}p^4+(T_{\text{г}}T_{\text{дв}}+T_{\text{эм}}T_{\text{дв}})p^3+(T_{\text{г}}+T_{\text{дв}})p^2+p+k_{\text{п}}k_{\text{у}}k_{\text{дв}}/i_{\text{р}}}\varTheta_{\text{вх}}(p)+$$

$$+\lim_{p\to 0}\frac{p(T_{\text{эм}}p+1)(T_{\text{г}}p+1)k'_{\text{м}}k_{\text{дв}}/i_{\text{р}}}{T_{\text{г}}T_{\text{эм}}T_{\text{дв}}p^4+(T_{\text{г}}T_{\text{дв}}+T_{\text{эм}}T_{\text{дв}})p^3+(T_{\text{г}}+T_{\text{дв}})p^2+p+k_{\text{п}}k_{\text{у}}k_{\text{дв}}/i_{\text{р}}}M_{\text{с}}(p).$$

Подставляя изображения по Лапласу входных сигналов, получаем

$$\varDelta_{\text{уст}}=\lim_{p\to 0}\frac{p^2(T_{\text{г}}T_{\text{эм}}T_{\text{дв}}p^3+(T_{\text{г}}T_{\text{дв}}+T_{\text{эм}}T_{\text{дв}})p^2+(T_{\text{г}}+T_{\text{дв}})p+1)}{T_{\text{г}}T_{\text{эм}}T_{\text{дв}}p^4+(T_{\text{г}}T_{\text{дв}}+T_{\text{эм}}T_{\text{дв}})p^3+(T_{\text{г}}+T_{\text{дв}})p^2+p+k_{\text{п}}k_{\text{у}}k_{\text{дв}}/i_{\text{р}}}\frac{V}{p^2}+$$

$$+\lim_{p\to 0}\frac{p(T_{\text{эм}}p+1)(T_{\text{г}}p+1)k'_{\text{м}}k_{\text{дв}}/i_{\text{р}}}{T_{\text{г}}T_{\text{эм}}T_{\text{дв}}p^4+(T_{\text{г}}T_{\text{дв}}+T_{\text{эм}}T_{\text{дв}})p^3+(T_{\text{г}}+T_{\text{дв}})p^2+p+k_{\text{п}}k_{\text{у}}k_{\text{дв}}/i_{\text{р}}}\frac{m}{p}=$$

$$=\frac{V}{k_{\text{п}}k_{\text{у}}k_{\text{дв}}/i_{\text{р}}}+\frac{mk'_{\text{м}}}{k_{\text{п}}k_{\text{у}}}.$$

5. Указания по оформлению отчета

Отчет должен содержать

1. Задание и цель работы.
2. Расчет установившихся значений переменных САУ для схемы, выданной преподавателем.
3. Выводы по работе.

6. Контрольные вопросы

1. Чем отличается статический режим от динамического режима?
2. Когда САУ считают астатической?
3. Дать определение астатической САУ?
4. Какая связь между передаточной функцией САУ и порядком ее астатизма?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8

ЧАСТОТЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ САУ

1. Цель и задачи работы

Изучение построения и получение АФЧХ, АЧХ и ФЧХ замкнутой САУ.

2. Основы теории

Частотные характеристики могут быть построены для разомкнутой и замкнутой САУ. Для структурной схемы, приведенной на рис. 8.1, АФЧХ, АЧХ и ФЧХ разомкнутой САУ строится по передаточной функции

$$W_{\text{р}}(p) = W(p)W_{\text{ос}}(p).$$

Для получения АФЧХ, АЧХ и ФЧХ замкнутой САУ по разомкнутым частотным характеристикам используется известная формула замыкания вида

$$W(p) = \frac{W_{\text{р}}(p)}{1 + W_{\text{р}}(p)}.$$

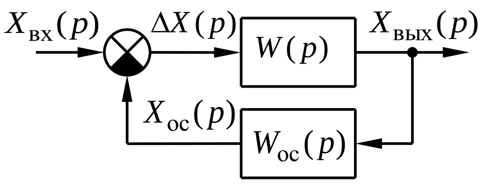


Рис. 8.1. Структурная схема САУ

АФЧХ замкнутой и разомкнутой САУ могут быть представлены в следующем виде:

$$W_{\text{Р}}(i\omega) = H_{\text{Р}}(\omega)e^{i\varphi_{\text{Р}}(\omega)}; \qquad W(i\omega) = M(\omega)e^{i\psi(\omega)}, \qquad (8.1)$$

где $H_{\text{Р}}(\omega), M(\omega)$ - АЧХ , а $\varphi_{\text{Р}}(\omega), \psi(\omega)$ - ФЧХ разомкнутой и замкнутой САУ соответственно.

Используя формулы для аналитического определения АЧХ и ФЧХ, получаем:

$$H_{\text{Р}}(\omega) = |W_{\text{Р}}(i\omega)| = \sqrt{U_{\text{р}}{}^2(\omega) + V_{\text{р}}{}^2(\omega)}; \qquad \varphi(\omega) = \arg(W_{\text{р}}(i\omega)). \qquad (8.2)$$

$$M(\omega) = |W(i\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \qquad \psi(\omega) = \arg(W(i\omega)). \qquad (8.3)$$

Построение логарифмических амплитудных (АЧХ) и фазовых (ФЧХ) частотных характеристик осуществляется фактически без расчетов по известным логарифмическим частотным характеристикам типовых звеньев с применением шаблонов. Структурная схема САУ должна быть сведена при этом к схеме, состоящей из последовательно соединенных типовых звеньев с единичными местными обратными связями.

Известно, что эквивалентная передаточная функция $W_э(p)$ последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций этих звеньев, следовательно

$$W_э(i\omega) = W_1(i\omega) \cdot W_2(i\omega) \cdot \ldots \cdot W_n(i\omega),$$

отсюда

$$H_э(\omega) e^{i\varphi_э(\omega)} = H_1(\omega) e^{i\varphi_1(\omega)} \cdot H_2(\omega) e^{i\varphi_2(\omega)} \cdot \ldots \cdot H_n(\omega) e^{i\varphi_n(\omega)}. \qquad (8.4)$$

На основании (1) можно записать следующие выражения для эквивалентных АЧХ и ФЧХ:

$$H_э(\omega) = \prod_{k=1}^{n} H_k(\omega); \qquad (8.5)$$

$$\varphi_э(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\omega). \qquad (8.6)$$

Логарифмируя выражения (3), получаем эквивалентную логарифмическую амплитудную частотную характеристику (ЛАЧХ) последовательно соединенных звеньев:

$$\lg H_э(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \lg H_k(\omega). \qquad (8.7)$$

В логарифмическом масштабе ЛАЧХ последовательно соединенных звеньев равна сумме ЛАЧХ этих звеньев. Это позволяет строить ЛАЧХ и ЛФЧХ системы путем разбиения ее на типовые звенья и геометрического сложения соответствующих им частотных характеристик, что существенно сокращает время построения. Для практических целей удобнее пользоваться десятичными логарифмами и строить отдельно ЛАЧХ и ЛФЧХ системы. При этом для построения ЛАЧХ находится величина

$$L(\omega) = 20 \lg |W(i\omega)| = 20 \lg H(\omega). \qquad (8.8)$$

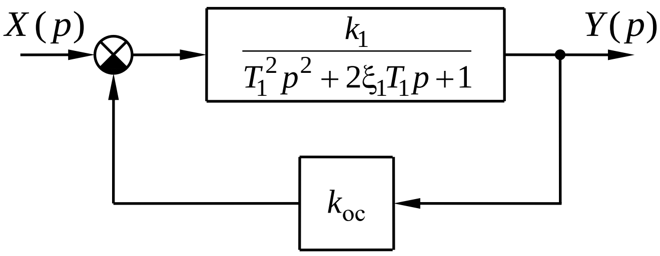
Эта величина выражается в децибелах.

3. Подготовка к работе

3.1. Изучить и повторить основы теории, объекты и средства исследования.
3.2. Построение АФЧХ, АЧХ и ФЧХ замкнутой САУ.
3.3. Построение ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой САУ.

Пример 8.1

Дана структурная схема. Получить выражения для АЧХ и ФЧХ замкнутой САУ.



Решение:

Находим передаточную функцию замкнутой САУ:

$$W(p)=\frac{\dfrac{k_1}{T_1^2p^2+2\xi_1T_1p+1}}{1+\dfrac{k_1k_{\text{ос}}}{T_1^2p^2+2\xi_1T_1p+1}}=\frac{k_1}{T_1^2p^2+2\xi_1T_1p+1+k_1k_{\text{ос}}}.$$

Заменяя p на $i\omega$, получаем АФЧХ системы в виде

$$W(i\omega)=\frac{k_1}{T_1^2(i\omega)^2+2\xi_1T_1(i\omega)+1+k_1k_{\text{ос}}}=\frac{k_1}{1+k_1k_{\text{ос}}-T_1^2\omega^2+i2\xi_1T_1\omega}=$$

$$=k_1\frac{1+k_1k_{\text{ос}}-T_1^2\omega^2-i2\xi_1T_1\omega}{(1+k_1k_{\text{ос}}-T_1^2\omega^2)^2+4\xi_1^2T_1^2\omega^2}=U(\omega)+iV(\omega),$$

где

$$U(\omega)=k_1\frac{1+k_1k_{\text{ос}}-T_1^2\omega^2}{(1+k_1k_{\text{ос}}-T_1^2\omega^2)^2+4\xi_1^2T_1^2\omega^2};$$

$$V(\omega)=-k_1\frac{2\xi_1T_1\omega}{(1+k_1k_{\text{ос}}-T_1^2\omega^2)^2+4\xi_1^2T_1^2\omega^2}.$$

Тогда АЧХ замкнутой САУ определяется по формуле

$$M(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}=\frac{k_1}{\sqrt{(1+k_1k_{\text{ос}}-T_1^2\omega^2)^2+4\xi_1^2T_1^2\omega^2}},$$

а ФЧХ проходит два квадранта и вычисляется по следующим формулам:

$$\psi(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)}=-\operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi_1T_1\omega}{1+k_1k_{\text{ос}}-T_1^2\omega^2}\right)$$ - для четвертого квадранта;

$$\psi(\omega)=-\pi+\operatorname{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)}=-\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi_1T_1\omega}{1+k_1k_{\text{ос}}-T_1^2\omega^2}\right)$$ - для третьего квадранта.

Пример 8.2.

Построить асимптотическую ЛАЧХ САУ с передаточной функцией

$$W(p)=\frac{k_1(T_2p+1)}{T_1^2p^2+2\xi_1T_1p+1},$$

где $k=10$, $T_1=0{,}02$ с, $\xi_1=0{,}8$, $T_2=0{,}2$ с.

Определить наклоны низкочастотной и высокочастотной асимптот. **Решение:**

Представляем передаточную функцию САУ в виде произведения передаточных функций типовых звеньев:

$$W(p) = k_1 \frac{1}{T_1^2 p^2 + 2\xi_1 T_1 p + 1}(T_2 p + 1) = W_1(p) W_2(p) W_3(p).$$

ЛАЧХ данной САУ представляет собой сумму ЛАЧХ усилительного, колебательного и форсирующего звеньев:

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega).$$

Для построения воспользуемся таблицами частотных характеристик для типовых звеньев. Асимптотическая ЛАЧХ САУ приведена на рис. 8/1.

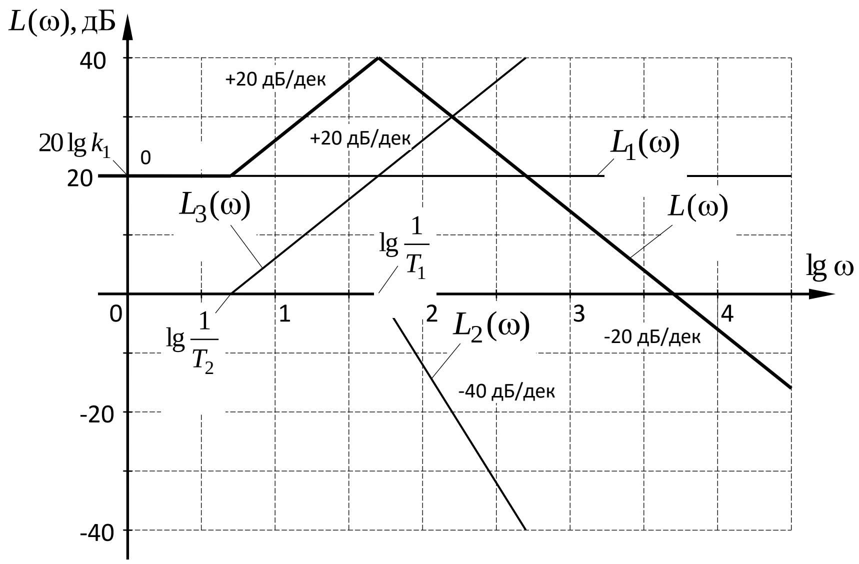


Рис. 8.1 Построение асимптотической ЛАЧХ САУ

Степень полинома числителя передаточной функции $m = 1$, степень полинома знаменателя $n = 2$. Таким образом, наклон высокочастотной асимптоты равен

$$-20 \cdot (n - m) = -20 \text{ дБ/дек.}$$

Для определения наклона низкочастотной асимптоты приводим передаточную функцию к виду

$$W(p) = \frac{1}{p^{\nu}} W_0(p) = \frac{1}{p^0} \frac{k_1(T_2 p + 1)}{T_1^2 p^2 + 2\xi_1 T_1 p + 1}.$$

Отсюда порядок астатизма системы $\nu = 0$, следовательно, наклон низкочастотной асимптоты равен

$$-20 \cdot \nu = 0 \text{ дБ/дек.}$$

5. Указания по оформлению отчета

Отчет должен содержать

1. Задание и цель работы.
2. Графики АФЧХ, ЛАЧХ и ЛФЧХ для выданных преподавателем конкретных структурных схем САУ.
3. Выводы по работе.

6. Контрольные вопросы

1. Чем отличается АФЧХ от АЧХ и ФЧХ САУ?
2. В чем состоит основное достоинство ЛАЧХ САУ?
3. Как определить запасы устойчивости САУ?