МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт естественнонаучный
Кафедра «Физика»

Утверждено на заседании кафедры «Физика»
«12» сентября 2024 г протокол №1
Заведующий кафедрой
______________________ Р.Н.Ростовцев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по проведению практических (семинарских) занятий

по дисциплине (модулю)

«Физика»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
27.03.04 Управление в технических системах
с направленностью (профилем)

«Цифровые технологии в системах обеспечения качества»
Форма обучения: *очная*

Идентификационный номер образовательной программы: 270304-01-24

Тула 2024 год

Разработчик методических указаний

_Ростовцев Р.Н. зав.кафедрой, д.т.н, доцент

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

Данное методическое указание предназначено для проведения практических занятий по физике и содержит задания по механике, электростатике, магнетизму, атомной и ядерной физике, которые будут предложены студентам на текущем, а затем и на промежуточном тестировании.

По каждому разделу даются формулы, формулировки законов и теорем, необходимые при решении конкретных задач. Каждая задача имеет ответ.

Векторный способ описания движения частицы.

Радиус-вектор частицы $\vec{r}(t)$ начинается в начале системы координат и заканчивается на частице.

Скорость частицы $\vec{\mathrm{v}}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}$ (перемещение частицы за единицу времени)

Ускорение частицы $\vec{a}(t)=\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}$ (изменение скорости за единицу времени)

Координатный способ описания движения частицы

Радиус вектор частицы $\vec{r}(t)=\vec{i}\cdot x(t)+\vec{j}\cdot y(t)+\vec{k}\cdot z(t)$.

Скорость материальной точки $\vec{\mathrm{v}}(t)=\vec{i}\cdot \mathrm{v}_x(t)+\vec{j}\cdot \mathrm{v}_y(t)+\vec{k}\cdot \mathrm{v}_z(t)$.

Ускорение материальной точки $\vec{a}(t)=\vec{i}\cdot a_x(t)+\vec{j}\cdot a_y(t)+\vec{k}\cdot a_z(t)$.

Здесь $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ – единичные векторы (орты), направленные по осям $x,\ y,\ z$ соответственно (декартова система координат),

1. Прямая задача кинематики

Если известны зависимости $x(t),\ y(t),\ z(t)$, то можно определить:

$\mathrm{v}_z(t)=\frac{dx}{dt},\ \mathrm{v}_y(t)=\frac{dy}{dt},\ \mathrm{v}_z(t)=\frac{dz}{dt}$ – проекции скорости на оси $x,\ y,\ z$,

$a_x(t)=\frac{d\mathrm{v}_x}{dt},\ a_y(t)=\frac{d\mathrm{v}_y}{dt},\ a_z(t)=\frac{d\mathrm{v}_z}{dt}$ – проекции ускорения на оси $x,\ y,\ z$.

Величина (модуль) радиса-вектора $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Величина (модуль) скорости $\mathrm{v}=\sqrt{\mathrm{v}_x^2+\mathrm{v}_y^2+\mathrm{v}_z^2}$.

Величина (модуль) ускорения $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

1-1. Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону:

а) $\vec{r}(t)=\vec{i}\cdot A\frac{t}{\tau}+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2+\vec{k}\cdot C$; б) $\vec{r}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3+\vec{k}\cdot C$;

в) $\vec{r}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4+\vec{k}\cdot C$; Найдите тангенс угла между вектором скорости $\vec{\mathrm{v}}$ и

А) осью x Б) осью y в момент времени $t=\tau=1$ с, если
$A=B=C=1$ м.

А) Ответы: а) 2; б) 1,5; в) 1,33;

Б) Ответы: а) 0,5; б) 0,667; в) 0,75

1-2. Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону:

а) $\vec{r}(t)=\vec{i}\cdot A\frac{t}{\tau}+\vec{j}\cdot B+\vec{k}\cdot C\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$; б) $\vec{r}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2+\vec{j}\cdot B+\vec{k}\cdot C\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$;

в) $\vec{r}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3+\vec{j}\cdot B+\vec{k}\cdot C\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$. Найдите тангенс угла между вектором скорости $\vec{\mathrm{v}}$ и

А) осью x; Б) осью z в момент времени $t=\tau=1$ с,
если $A=B=C=1$ м.

А) Ответы: а) 2; б) 1,5; в) 1,33

Б) Ответы: а) 0,50; б) 0,667; в) 0,75

1-3. Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону $\vec r(t)=\vec i\cdot A\dfrac{t}{\tau}+\vec j\cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2+\vec k\cdot C\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3$. На каком расстоянии будет находиться частица в момент времени $t=\tau=1$ с а) от оси *x*; б) от оси *y*; в) от оси *z*, если $A = B = C = 1$ м.

Ответы: а) 1,4 м; б) 1,4 м; в) 1,4 м

1-4. Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону

а) $\vec r(t)=\vec i\cdot A\dfrac{t}{\tau}+\vec j\cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2+\vec k\cdot C\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3$,

б) $\vec r(t)=\vec i\cdot A\sin(\omega t)+\vec j\cdot A\cos(\omega t)+\vec k\cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3$.

Чему будет равна величина скорости частицы в момент времени $t=\tau=1$ с, если $A = B = C = 1$ м, $\omega=\pi/2$ рад/с.

Ответы: а) 3,74 м/с; б) 3,39 м/с

1-5. Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону $\vec r(t)=\vec i\cdot A\sin(\omega t)+\vec j\cdot A\cos(\omega t)+\vec k\cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3$. Чему будет равна величина начальной скорости частицы, если $\tau=1$ с, $A = B = 1$ м, $\omega=\pi/2$ рад/с.

Ответ: 1,57 м/с

1-6. Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону

$$\vec r(t)=\vec i\cdot\left(A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3-B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4\right)+\vec j\cdot A\cos(\omega t)+\vec k\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3.$$

Через сколько секунд перпендикулярной оси *x* окажется
а) скорость частицы; б) ускорение частицы
если $\tau=1$ с, $A = B = 1$ м, $\omega=\pi/2$ рад/с.

Ответы: а) 0,75 с; б) 0,50 с

1-7. Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону

$$\vec r(t)=\vec i\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3+\vec j\cdot\left(B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4-A\left(\frac{t}{\tau}\right)^6\right)+\vec k\cdot\sin\omega t.$$

Через сколько секунд скорость частицы окажется перпендикулярной оси *y*, если $\tau=1$ с, $A = B = 1$ м, $\omega=\pi/2$ рад/с.

Ответ: 0,816 с

1-8. Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону

$$\vec r(t)=\vec i\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3+\vec j\cdot A\cos(\omega t)+\vec k\cdot\left(B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3-A\left(\frac{t}{\tau}\right)^5\right).$$

Через сколько секунд окажется перпендикулярной оси *z*,
а) скорость частицы; б) ускорение частицы,
если $\tau=1$ с, $A = B = 1$ м, $\omega=\pi/2$ рад/с.

Ответы: а) 0,775 с; б) 0,548 с

1-9. Через сколько секунд ускорение частицы будет перпендикулярно оси *y*, если радиус-вектор частицы зависит от времени по закону

$\vec{r}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3+\vec{j}\cdot\left(B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4-A\left(\frac{t}{\tau}\right)^6\right)+\vec{k}\cdot C\cdot\sin\omega t$,

$\tau=1$ с, $A = B = C = 1$ м, $\omega=\pi/2$ рад/с.

Ответ: 0,632 с

1-10. Скорость частицы зависит от времени по закону

$$\vec{v}(t)=\vec{i}\cdot\left(A\frac{t}{\tau}-B\frac{t^2}{\tau^2}\right)+\vec{j}\cdot\left(B\frac{t^3}{\tau^3}-A\frac{t}{\tau}\right).$$

Через сколько секунд ускорение частицы будет
а) параллельно оси *x*; б) перпендикулярно оси *x*; в) перпендикулярно оси *y*, если $\tau=1$ с, $A = B = 1$ м/с.

Ответы: а) 0,577 с; б) 0,5 с; в) 0,577 с

1-11. Скорость частицы зависит от времени как $\vec{v}(t)=\vec{i}\cdot A\frac{t}{\tau}+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$.

а) Через сколько секунд ускорение частицы будет направлено под углом 45° к оси *x*, б) Чему станет равна величина полного ускорения частицы в момент времени $t=1$ с. $\tau=1$ с, $A = B = 1$ м/с.

Ответы: а) 0,5 с; б) 2,24 м/с^2

1-12. Скорость частицы зависит от времени по закону $\vec{v}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$.

Через сколько секунд ускорение частицы будет направлено под углом 45° к оси *y*, если $\tau=1$ с, $A = B = 1$ м/с.

Ответ: 0,707 с

2. Обратная задача кинематики

Если известны зависимости $a_x(t), a_y(t), a_z(t)$ и начальные условия x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}, то можно определить:

$$\mathrm{v}_x = \mathrm{v}_{0x} + \int_0^t a_x(t)\,dt;\quad \mathrm{v}_y = \mathrm{v}_{0y} + \int_0^t a_y(t)\,dt;\quad \mathrm{v}_z = \mathrm{v}_{0z} + \int_0^t a_z(t)\,dt$$

$$x = x_0 + \int_0^t \mathrm{v}_x(t)\,dt;\quad y = y_0 + \int_0^t \mathrm{v}_y(t)\,dt;\quad z = z_0 + \int_0^t \mathrm{v}_z(t)\,dt$$

Путь, пройденный частицей за время t: $S = \int_0^t \mathrm{v}(t)\,dt$

2-1. Частица начала свое движение из начала координат, и ее скорость зависит от времени по закону

а) $\vec{\mathrm{v}}(t) = \vec{i}\cdot A\frac{t}{\tau} + \vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, б) $\vec{\mathrm{v}}(t) = \vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + \vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, в) $\vec{\mathrm{v}}(t) = \vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + \vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$.

На какое расстояние от начала координат удалится частица в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = B = 1$ м/с.

Ответы: а) 0,601 м, б) 0,417 м, в) 0,30 м

2-2. Частица начала свое движение из начала координат, и ее скорость зависит от времени по закону

а) $\vec{\mathrm{v}}(t) = \left(\vec{i}\cdot A + \vec{j}\cdot B\right)\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, б) $\vec{\mathrm{v}}(t) = \left(\vec{i}\cdot A + \vec{j}\cdot B\right)\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$,

в) $\vec{\mathrm{v}}(t) = \vec{i}\cdot A\sin\omega t + \vec{j}\cdot A\cos\omega t$. Какой путь проделает частица за время $t = \tau = 1$ с, если $A = B = 1$ м/с, $\omega = \pi/2$ рад/с.

Ответы: а) 0,471 м, б) 0,354 м, в) 1 м

2-3. Частица начала свое движение из начала координат с нулевой начальной скоростью, и ее ускорение зависит от времени по закону

а) $\vec{a}(t) = \vec{i}\cdot A\frac{t}{\tau} + \vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, б) $\vec{a}(t) = \vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + \vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$. Найти модуль скорости частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = B = 1$ м/с^2.

Ответы: а) 0,601 м/с, б) 0,389 м/с

2-4. Частица начала свое движение из начала координат с нулевой начальной скоростью, и ее ускорение зависит от времени по закону $\vec{a}(t) = \vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + \vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$.

Найти тангенс угла, под которым будет направлена скорость частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с а) к оси x, б) к оси y если $A = B = 1$ м/с^2.

Ответы: а) 0,6; б) 1,67

2-5. Частица начала свое движение из начала координат с начальной скоростью $\vec{\mathrm{v}}_0 = -\vec{j}\cdot A$ и с ускорением, которое зависит от времени по закону

а) $\vec{a}(t) = \vec{i}\cdot B\frac{t}{\tau}$, б) $\vec{a}(t) = \vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$. Каков модуль скорости частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = 1$ м/с, $B = 1$ м/с^2.

Ответы: а) 1,118 м/с, б) 0,8 м/с

2-6. Частица начала свое движение из начала координат с начальной скоростью $\vec{v}_0 = -\vec{k} \cdot A$ и с ускорением, которое зависит от времени по закону $\vec{a}(t) = \vec{j} \cdot B \left(\frac{t}{\tau} \right)^2$. Каков модуль скорости частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с, если A = 1 м/с, B =1 м/с^2.

Ответ: 1,054 м/с

2-7. Частица начала свое движение из начала координат с начальной скоростью а) $\vec{v}_0 = (\vec{i} - \vec{j}) \cdot A$, б) $\vec{v}_0 = (\vec{i} + \vec{k}) \cdot A$ и с ускорением, которое зависит от времени по закону $\vec{a}(t) = \vec{j} \cdot B \frac{t}{\tau}$. Каков модуль скорости частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с, если A = 1 м/с, B =1 м/с^2.

Ответы: а) 1,118 м/с, б) 1,5 м/с

2-8. Частица начала свое движение из точки с радиусом-вектором
а) $\vec{r}_0 = \vec{k} \cdot C$, б) $\vec{r}_0 = C \cdot \vec{i}$, в) $\vec{r}_0 = \vec{j} \cdot C$, г) $\vec{r}_0 = (\vec{j} + \vec{i}) \cdot C$, д) $\vec{r}_0 = (\vec{j} - \vec{k}) \cdot C$

со скоростью, которая зависит от времени по закону $\vec{v}(t) = \vec{i} \cdot A \frac{t}{\tau} + \vec{j} \cdot B \left(\frac{t}{\tau} \right)^2$. На какое расстояние от начала координат удалится частица в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = B$ = 1 м/с, C = 1 м.

Ответы: а) 1,17 м, б) 1,54 м, в) 1,42 м, г) 2,01 м, д) 1,74 м

2-9. Частица начала свое движение из начала координат, и ее скорость зависит от времени по закону а) $\vec{v}(t) = (\vec{i} \cdot A + \vec{j} \cdot B) \left(\frac{t}{\tau} \right)^4$, б) $\vec{v}(t) = (\vec{i} \cdot A + \vec{j} \cdot B) \left(\frac{t}{\tau} \right)^5$, в) $\vec{v}(t) = (\vec{i} \cdot A + \vec{j} \cdot B) \left(\frac{t}{\tau} \right)^6$. Какой путь проделает частица за время $t = \tau = 1$ с, если $A = B$ = 1 м/с.

Ответ: а) 0,2828 м, б) 0,2357 м, в) 0,202 м

2-10. Частица начала свое движение из начала координат с нулевой начальной скоростью, и ее ускорение зависит от времени по закону
а) $\vec{a}(t) = \vec{i} \cdot A \left(\frac{t}{\tau} \right)^3 + \vec{j} \cdot B \left(\frac{t}{\tau} \right)^6$, б) $\vec{a}(t) = \vec{i} \cdot A \left(\frac{t}{\tau} \right)^4 + \vec{j} \cdot B \left(\frac{t}{\tau} \right)^8$.

Какая величина скорости будет у частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с, если A = 1 м/с^2, B =1 м/с^2.

Ответы: а) <u>0,288</u> м/с, б) <u>0,229</u> м/с

2-11. Частица начала свое движение из начала координат с начальной скоростью $\vec{v}_0 = -\vec{j} \cdot A$ и с ускорением, которое зависит от времени по закону
а) $\vec{a}(t) = \vec{j} \cdot B \left(\frac{t}{\tau} \right)^5$, б) $\vec{a}(t) = \vec{j} \cdot B \left(\frac{t}{\tau} \right)^6$. Каков модуль скорости частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с, если A = 1 м/с, B =1 м/с^2.

Ответы: а) 0,833 м/с, б) 0,857 м/с

2-12. Частица начала свое движение из начала координат с начальной скоростью $\vec{v}_0 = (\vec{i} - \vec{j}) \cdot A$ и с ускорением, которое зависит от времени по закону а) $\vec{a}(t) = \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\vec{a}(t) = \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, в) $\vec{a}(t) = \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^7$. Каков модуль скорости частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с, если A = 1 м/с, B =1 м/с^2.

Ответы: а) 1,25 м/с, б) 1,302 м/с, в) 1,329 м/с

2-13. Частица начала свое движение из начала координат с начальной скоростью $\vec{v}_0 = (\vec{i} + \vec{k}) \cdot A$ и с ускорением, которое зависит от времени по закону а) $\vec{a}(t) = \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, б) $\vec{a}(t) = \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, в) $\vec{a}(t) = \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^6$.

Каков модуль скорости частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с, если A = 1 м/с, B =1 м/с^2.

Ответы: а) 1,453 м/с, б) 1,428 м/с, в) 1,421 м/с

2-14. Частица начала свое движение из точки с радиусом-вектором $\vec{r}_0 = \vec{k} \cdot C$ со скоростью, которая зависит от времени по закону

а) $\vec{v}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\vec{v}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$. На какое расстояние от начала координат удалится частица в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = B$ = 1 м/с, C = 1 м.

Ответы: а) 1,083 м, б) 1,05 м

2-15. Частица начала свое движение из точки с радиусом-вектором $\vec{r}_0 = \vec{i} \cdot C$ со скоростью, которая зависит от времени по закону

а) $\vec{v}(t) = \vec{i} \cdot A\frac{t}{\tau} + \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\vec{v}(t) = \vec{i} \cdot A\frac{t}{\tau} + \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$,

в) $\vec{v}(t) = \vec{i} \cdot A\frac{t}{\tau} + \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$. На какое расстояние от начала координат удалится частица в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = B$ = 1 м/с, C = 1 м.

Ответы: а) 1,52 м, б) 1,513 м, в) 1,509 м

2-16. Частица начала свое движение из точки с радиусом-вектором $\vec{r}_0 = \vec{j} \cdot C$ со скоростью, которая зависит от времени по закону

а) $\vec{v}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, б) $\vec{v}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$,

в) $\vec{v}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4 + \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$. На какое расстояние от начала координат удалится частица в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = B$ = 1 м/с, C = 1 м.

Ответы: а) 1,374 м, б) 1,357 м, в) 1,348 м

2-17. Частица начала свое движение из точки с радиусом-вектором $\vec{r}_0 = (\vec{j} + \vec{i}) \cdot C$ со скоростью, которая зависит от времени по закону

а) $\vec{v}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, б) $\vec{v}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^5 + \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$,

в) $\vec{v}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^7 + \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$. На какое расстояние от начала координат удалится частица в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = B$ = 1 м/с, C = 1 м.

Ответы: а) 1,828 м, б) 1,772 м, в) 1,745 м

2-18. Частица начала свое движение из точки с радиусом-вектором $\vec{r}_0 = \left(\vec{j} - \vec{k}\right) \cdot C$ со скоростью, которая зависит от времени по закону

а) $\vec{v}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4 + \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\vec{v}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^5 + \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$,

в) $\vec{v}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^6 + \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$. На какое расстояние от начала координат удалится частица в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = B = 1$ м/с, $C = 1$ м.

Ответы: а) 1,613 м, б) 1,571 м, в) 1,543 м

3. Связь линейных и угловых величин в кинематике.

При криволинейном движении ускорение частицы имеет тангенциальную a_τ и нормальную a_n составляющие, причем $a_\tau = d\mathrm{v}/dt$, $a_n = \mathrm{v}^2/R$, где R – радиус кривизны траектории. Полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Линейные и угловые величины связаны следующим образом:

$$\mathrm{v} = \omega R;\ a_\tau = \varepsilon R;\ a_n = \omega^2 R$$

3-1. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R = 1$ м с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 1$ с$^{-2}$. Найти
а) отношение тангенциального и нормального ускорения и
б) тангенс угла между вектором полного ускорения и вектором скорости частицы через время $t = 1$с?

Ответы: а) 1; б) 1

3-2. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R = 1$ м со скоростью, модуль которой зависит от времени по закону $\mathrm{v} = A \cdot t/\tau$. Найти а) тангенс угла между вектором полного ускорения и вектором скорости частицы и б) отношение нормального и тангенциального ускорения частицы через время $t = 1$с, если $\tau = 1$ с, A = 1 м/с.

Ответы: а) 1; б) 1

3-3. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R = 1$ м с угловой скоростью, модуль которой зависит от времени по закону $\omega = A \cdot t/\tau$. Найти отношение нормального и тангенциального ускорения частицы через время $t = 1$с, если $\tau = 1$ с. A = 1 с$^{-1}$.

Ответ: 1

3-4. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R = 1$ м с угловой скоростью, модуль которой зависит от времени по закону а) $\omega = A \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, A = 2 с$^{-1}$; б) $\omega = A \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, A = 3 с$^{-1}$;

в) $\omega = A \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, A = 4 с$^{-1}$; г) $\omega = A \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, A = 5 с$^{-1}$; д) $\omega = A \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^6$, A = 6 с$^{-1}$.

Через сколько секунд угол между полным ускорением частицы и ее скоростью будет равен 45°, если $\tau = 1$ с. .

Ответы: во всех вариантах t = 1 с

3-5. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R = 1$ м так, что угол поворота зависит от времени по закону

а) $\varphi = A \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\varphi = A \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, в) $\varphi = A \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, г) $\varphi = A \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^6$. Найти линейную скорость частицы через время $t = 1$с, если $\tau = 1$ с. A = 1 рад.

Ответы: а) 3 м/с, б) 4 м/с, в) 5 м/с, г) 6 м/с

3-6. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R=1$ м так, что угол поворота зависит от времени по закону а) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, в) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, г) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^6$. Найти нормальное ускорение частицы через время $t=1$с, если $\tau=1$ с. A = 1 рад.

Ответ: а) 9 м/с^2, в) 16 м/с^2, в) 25 м/с^2, г) 36 м/с^2.

3-7. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R=1$ м так, что угол поворота зависит от времени по закону а) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, в) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, г) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^6$. Найти тангенциальное ускорение частицы через время $t=1$с, если $\tau=1$ с. A = 1 рад.

Ответ: а) 6 м/с^2, б) 12 м/с^2, в) 20 м/с^2, г) 30 м/с^2.

3-8. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R=1$ м с угловым ускорением, которое зависит от времени по закону а) $\varepsilon = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\varepsilon = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, в) $\varepsilon = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, г) $\varepsilon = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^6$. Найти нормальное ускорение частицы через время $t=1$с, если $\tau=1$ с. A = 1 с$^{-2}$.

Ответы: а) 0,0625 м/с^2, б) 0,04 м/с^2, в) 0,0278 м/с^2, г) 0,02 м/с^2

3-9. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R=1$ м с угловым ускорением, которое зависит от времени по закону а) $\varepsilon = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\varepsilon = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, в) $\varepsilon = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, г) $\varepsilon = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^6$. Найти линейную скорость частицы через время $t=1$с, если $\tau=1$ с. A = 1 с$^{-2}$.

Ответы: а) 0,25 м/с, б) 0,2 м/с, в) 0,167 м/с, г) 0,143 м/с

4. Кинематика вращательного движения.

Если твердое тело вращается вокруг закрепленной оси z и известна зависимость угла поворота $\varphi(t)$, то можно рассчитать проекции на ось вращения его угловой скорости $\omega_z = d\varphi/dt$ и углового ускорения $\varepsilon_z = d\omega_z/dt$.

Если известна зависимость $\varepsilon_z(t)$ и начальные условия ω_{0z} и φ_0, то можно найти $\omega_z = \omega_{0z} + \int_0^t \varepsilon_z dt$ и $\varphi = \varphi_0 + \int_0^t \omega_z dt$ (обратная задача).

4-1. Диск радиуса $R = 1$ м начал вращаться вокруг своей оси без начальной скорости с угловым ускорением, зависящим от времени по закону

а) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, б) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, в) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$. На какой угол (в радианах) он повернется за время $t = \tau = 1$ с, если $A = 1$ с$^{-2}$.

Ответы: а) 0,0833 рад, б) 0,05 рад, в) 0,0333 рад

4-2. Диск радиуса $R = 1$ м вращался вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0. В момент времени $t = 0$ его угловое ускорение стало возрастать по закону а) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, б) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, в) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$. Какую угловую скорость будет иметь диск через время $t = \tau = 1$ с, если $A = 1$ с$^{-2}$, $\omega_0 = 1$ с$^{-1}$.

Ответы: а) 1,33 рад/с, б) 1,25 рад/с, в) 1,2 рад/с

4-3. Диск радиуса $R = 1$ м вращался вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0. В момент времени $t = 0$ он начал тормозить. Модуль его углового ускорения при этом зависел от времени по закону

а) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, $A = 3$ с$^{-2}$; б) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, $A = 1$ с$^{-2}$; в) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, $A = 5$ с$^{-2}$.

Через сколько секунд диск остановится, если $\tau = 1$ с, $\omega_0 = 1$ с$^{-1}$?

Ответы: а) 1 с, б) 1,41 с, в) 1 с

4-4. Диск радиуса $R = 1$ м начал вращаться вокруг своей оси так, что угол его поворота зависит от времени по закону

а) $\varphi = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 - B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\varphi = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4 - B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, в) $\varphi = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 - B\left(\frac{t}{\tau}\right)^7$. Через сколько секунд диск остановится, если $\tau = 1$ с? $A = 1$ рад, $B = 1$ рад.

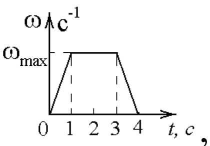
Ответы: а) 0,667 с, б) 0,707 с, в) 0,809 с

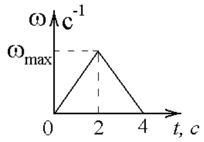
4-5. Диск радиуса $R = 1$ м вращался вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0. В момент времени $t = 0$ его угловое ускорение стало возрастать по закону а) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4 - B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, б) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 - B\left(\frac{t}{\tau}\right)^6$. Через сколько секунд диск будет иметь максимальную угловую скорость,

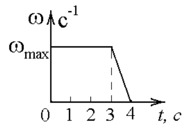
если $\tau = 1$ с? $A = B =$ с$^{-2}$, $\omega_0 = 1$ с$^{-1}$.

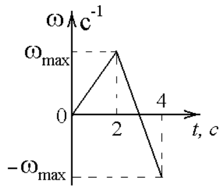
Ответы: а) 1 с, б) 1 с

4-6. Диск вращается с угловой скоростью, зависимость от времени которой задается графиком (см. рис.). Найти угол поворота (в радианах) диска за $t = 4$ с, если $\omega_{max} = 1$ с$^{-1}$.

а) 

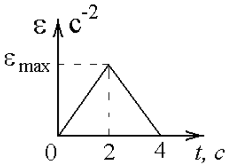
, б) 

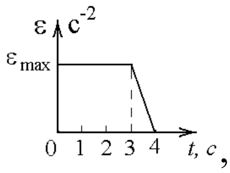
, в) 

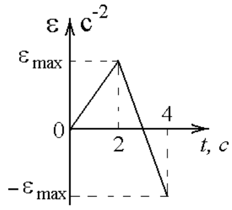
г) 

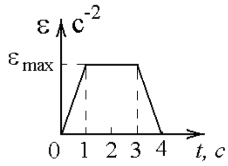
Ответы: а) 3 рад, б) 2 рад, в) 3,5 рад, г) 1 рад

4-7. Диск вращается с нулевой начальной скоростью и с угловым ускорением, зависимость от времени которого задается графиком. Найти максимальную угловую скорость диска в интервале времени $0 < t < 4$ с, если $\varepsilon_{max} = 1$ с$^{-2}$.

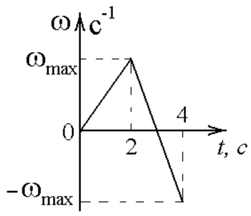
а) 

, б) 

, в) 

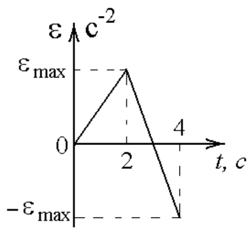
г) 

Ответы: а) 2 рад/с, б) 3,5 рад/с, в) 1,5 рад/с, г) 3 рад/с



4-8. Диск вращается с угловой скоростью, зависимость от времени которой задается графиком.
Найти максимальный угол поворота диска (в радианах) в интервале времени от $t = 0$ до $t = 4$ с, если $\omega_{max} = 1$ с$^{-1}$.

Ответ: 1,5 рад



4-9. Диск вращается с угловым ускорением, зависимость от времени которого задается графиком. Найти угловую скорость диска в момент времени $t = 4$ с, если $\varepsilon_{max} = 1$ с$^{-2}$.

Ответ: 1 рад/с

5. Сила как причина изменения импульса.

Второй закон Ньютона в современной формулировке $\boxed{\left(\sum \vec{F}_i\right)_{\text{внеш}} = \dfrac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt}}$, где $\vec{p}_{\text{сист}} = \sum \vec{p}_i$ – суммарный импульс системы частиц, $\left(\sum \vec{F}_i\right)_{\text{внеш}}$ – векторная сумма всех внешних сил, действующих на систему частиц.

$\boxed{\Delta\vec{p}_{\text{сист}} = \int\limits_0^{\tau}\left(\sum \vec{F}_i\right)dt = \tau \cdot \vec{F}_{\text{средн}}}$ – вектор изменения импульса за время τ (импульс силы), где $\vec{F}_{\text{средн}}$ – средняя сила, действующая на систему частиц.

В проекциях $F_x = \dfrac{dp_x}{dt}$, $F_y = \dfrac{dp_y}{dt}$, $F_z = \dfrac{dp_z}{dt}$. $\Delta p_x = \int\limits_0^{\tau} F_x dt = \tau \cdot \left(F_x\right)_{\text{средн}}$;

$\Delta p_y = \int\limits_0^{\tau} F_y dt = \tau \cdot \left(F_y\right)_{\text{средн}}$; $\Delta p_z = \int\limits_0^{\tau} F_z dt = \tau \cdot \left(F_z\right)_{\text{средн}}$;

Модуль изменения импульса $|\Delta\vec{p}| = \sqrt{\Delta p_x^2 + \Delta p_y^2 + \Delta p_z^2}$

Модуль силы $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$, модуль импульса $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$.

5-1. Частица движется в плоскости так, что ее импульс зависит от времени по закону

а) $\vec{p}(t) = \vec{i} \cdot A\dfrac{t}{\tau} + \vec{j} \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2$, б) $\vec{p}(t) = \vec{i} \cdot A\dfrac{t}{\tau} + \vec{j} \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3$,

в) $\vec{p}(t) = \vec{i} \cdot A\dfrac{t}{\tau} + \vec{j} \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^4$, г) $\vec{p}(t) = \vec{i} \cdot A\dfrac{t}{\tau} + \vec{j} \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^5$. Найти модуль силы, действующей на частицу в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = B = 1$ $\text{кг} \cdot \text{м/с}$.

Ответы: а) 2,236 Н, б) 3,162 Н, в) 4,123 Н, г) 5,099 Н

5-2. Частица движется в плоскости так, что ее импульс зависит от времени по закону а) $\vec{p}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2 + \vec{j} \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\vec{p}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^4 + \vec{j} \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3$,

в) $\vec{p}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^5 + \vec{j} \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3$, г) $\vec{p}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^6 + \vec{j} \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^4$. Найти тангенс угла между осью x и вектором силы, действующей на частицу в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = B = 1$ $\text{кг} \cdot \text{м/с}$.

Ответы: а) 1,5; б) 0,75; в) 0,6; г) 0,667

5-3. Частица движется в плоскости так, что ее импульс зависит от времени по закону а) $\vec{p}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^6 + \vec{j} \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^7$, б) $\vec{p}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^7 + \vec{j} \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^8$,

в) $\vec{p}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^8 + \vec{j} \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^9$. Найти тангенс угла между осью y и вектором силы, действующей на частицу в момент времени $t = \tau = 1$ с, если
$A = B = 1$ $\text{кг} \cdot \text{м/с}$.

Ответы: а) 0,857; б) 0,875; в) 0,889

5-4. Частица массы m = 1 кг движется в плоскости так, что ее импульс зависит от времени по закону

а) $\vec{p}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^5+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\vec{p}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^7+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$. Найти ускорение частицы в момент времени $t=\tau=1$ с, если $A = B = 1$ кг·м/с ,

Ответы: а) 5,831 м/с^2; б) 8,602 м/с^2;

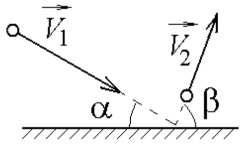
5-5. Частица движется в плоскости под действием силы, которая зависит от времени по закону

а) $\vec{F}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^7+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\vec{F}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^8+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$,

в) $\vec{F}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^9+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, г) $\vec{F}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^9+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^6$

д) $\vec{F}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^9+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^7$. Найти модуль изменения импульса за интервал времени $0<t<1$ с, если $\tau=1$ с, $A = B = 1$ Н.

Ответы: а) 0,280 кг·м/с ; б) 0,229 кг·м/с ; в) 0,194 кг·м/с ; г) 0,174 кг·м/с ; д) 0,16 кг·м/с



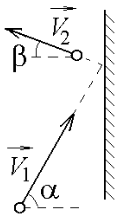
5-6. Небольшой шарик массы m летит со скоростью $\vec{v}_1$ под углом α =30° к горизонтальной плоскости. После неупругого удара он отскакивает со скоростью $\vec{v}_2$ под углом β =60° к плоскости. Время соударения τ. Найти

а) модуль средней силы трения шарика о плоскость;

б) модуль средней силы нормальной реакции опоры,

действовавшие во время удара. $v_1=5$ м/с, $v_2=3$ м/с, τ = 0,001 с, m = 1 кг.

Ответы: а) 2830 Н, б) 5098 Н



5-7. Небольшой шарик массы m летит со скоростью $\vec{v}_1$ под углом α = 60° к горизонту и падает на вертикальную стену. После неупругого удара он отскакивает со скоростью $\vec{v}_2$ под углом β =30° к горизонту. Время соударения τ. Найти

а) модуль средней силы трения шарика о стену,

б) модуль средней силы нормальной реакции со стороны стены.

$v_1=5$ м/с, $v_2=3$ м/с, τ = 0,001 с, m = 1 кг.

Ответы: а) 2830 Н, б) 5098 Н

5-8. Частица с начальным импульсом $\vec{p}_0=\vec{i}\cdot A$ движется в плоскости под действием силы, которая зависит от времени по закону

а) $\vec{F}(t)=\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, б) $\vec{F}(t)=\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, в) $\vec{F}(t)=\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$

Найти модуль импульса через t = τ = 1 с, если A = 1 кг·м/с , B = 1 Н.

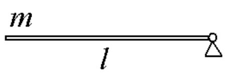
Ответы: а) 1,054 кг·м/с , б) 1,031 кг·м/с , в) 1,020 кг·м/с

6. Динамика вращательного движения твердого тела.

Закон динамики вращательного движения твердого тела в проекции на ось вращения z: $\boxed{\sum (M_{zi})_{\text{внеш}} = \dfrac{dL_z}{dt} = I_z \cdot \varepsilon_z}$, где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения, ε_z – проекция углового ускорения на ось вращения, $\sum (M_{zi})_{\text{внеш}}$ – сумма проекций внешних моментов сил, $\boxed{L_z = I_z \cdot \omega_z}$ – проекция момента импульса твердого тела.

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}\,\underbrace{\left(yF_z - zF_y\right)}_{M_x} + \vec{j}\,\underbrace{\left(zF_x - xF_z\right)}_{M_y} + \vec{k}\,\underbrace{\left(xF_y - yF_x\right)}_{M_z},$$

где $\vec{r}$ – радиус вектор точки приложения силы $\vec{F}$. M_x, M_y, M_z – проекции момента силы. Модуль момента силы $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$ или $M = r \cdot F \cdot \sin\alpha$, где α – угол между силой $\vec{F}$ и радиусом-вектором $\vec{r}$.

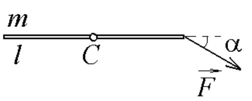


6-1. Тонкий однородный стержень массы m = 1 кг и длины l= 1 м может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец. В оси действует момент сил трения $М_{тр.}$ = 1 Н·м. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают без толчка. Найдите угловое ускорение в начальный момент времени. g = 10 м/с^2.

Ответ: 12 рад/с^2

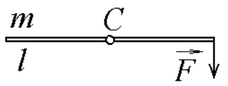
6-2. Тонкий однородный стержень массы m и длины l может вращаться в вертикальной плоскости без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец. Стержень располагают а) под углом α к горизонту; б) под углом α к вертикали и отпускают без толчка. Найдите его угловое ускорение в начальный момент времени. m = 1 кг, l = 1 м, α = 30°, g = 10 м/с^2.

Ответы: а) 13 рад/с^2; б) 7,5 рад/с^2



6-3. Тонкий однородный стержень массы m= 1 кг и длины l = 1 м может вращаться в горизонтальной плоскости без трения вокруг вертикальной оси C, проходящей через середину стержня. К концу стержня в плоскости вращения под углом α = 30° к стержню прикладывают силу F =1 Н. Найдите угловое ускорение стержня в начальный момент времени.

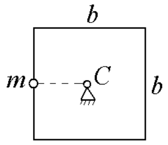
Ответ: 3 рад/с^2



6-4. Тонкий однородный стержень массы m и длины l может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси C, проходящей через середину стержня. В оси действует момент силы трения $М_{тр}$. К концу стержня в плоскости вращения перпендикулярно стержню прикладывают силу $\vec{F}$. Найдите угловое ускорение стержня в начальный момент времени.

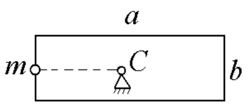
m = 1 кг, l = 1 м, F = 3 Н, $М_{тр}$ = 1 Н·м.

Ответ: 6 рад/с^2



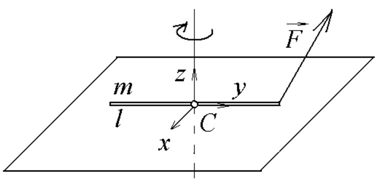
6-5. Тонкая однородная пластина в виде квадрата со стороной b может вращаться без трения в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр масс C. Момент инерции пластины относительно оси C равен I. К середине стороны квадрата приклеили маленький грузик массы m и отпустили без толчка. В начальный момент сторона квадрата была вертикальна. Найдите угловое ускорение получившейся фигуры в начальный момент времени. m = 1 кг, I = 1 кг·м^2, b = 1 м, g = 10 м/с^2.

Ответ: 4 рад/с^2



6-6. Тонкая однородная прямоугольная пластина со сторонами b и a может вращаться без трения в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр масс C. Момент инерции пластины относительно оси C равен I. К середине стороны пластины приклеили маленький грузик массы m и отпустили без толчка. В начальный момент сторона пластины была вертикальна. Найдите угловое ускорение получившейся фигуры в начальный момент времени.
m = 1 кг, I = 1 кг·м^2, b = 1 м, a = 2 м, g = 10 м/с^2.

Ответ: 5 рад/с^2



6-7. Тонкий однородный стержень длины l может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. К концу стержня приложена сила $\vec{F} = \vec{i} \cdot A + \vec{j} \cdot B + \vec{k} \cdot D$. Чему равна проекция момента силы относительно точки C на ось z. l = 1 м, A = 1 Н, B = 2 Н, D = 3 Н.

Ответ: –0,5 Н·м

6-8. Маленький шарик поместили в точку с радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{i} \cdot A + \vec{j} \cdot B + \vec{k} \cdot C$. В некоторый момент на шарик подействовали силой а) $\vec{F} = \vec{i} \cdot D$; б) $\vec{F} = \vec{j} \cdot D$; в) $\vec{F} = \vec{k} \cdot D$. Найти модуль момента силы относительно начала отсчета. A = 1 м, B = 2 м, C = 3 м, D = 4 Н.

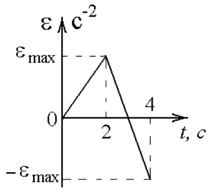
Ответы: а) 14,42 Н·м; б) 12,65 Н·м; в) 8,94 Н·м

6-9. Маленький шарик поместили в точку с радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{i} \cdot A + \vec{j} \cdot B + \vec{k} \cdot C$. В некоторый момент на шарик подействовали силой $\vec{F} = \vec{i} \cdot D + \vec{j} \cdot E + \vec{k} \cdot G$. Найти проекцию момента силы относительно начала координат а) на ось x; б) на ось y; в) на ось z
A = 1 м, B = 2 м, C = 3 м, D = 3 Н, E = 4 Н, G = 5 Н.

Ответы: а) –2 Н·м; б) 4 Н·м; в) –2 Н·м

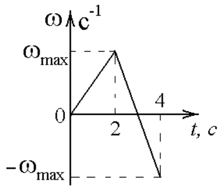
6-10. Некоторое тело вращается вокруг закрепленной оси без трения. Его момент импульса относительно оси вращения зависит от времени по закону а) $L = A\frac{t}{\tau}$; б) $L = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$; в) $L = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$; г) $L = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$; д) $L = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$. Через время t =1 с тело имеет угловое ускорение ε. Найти момент инерции тела, если τ =1 с. A = 1 кг·м^2/с, ε = 1 рад/с^2.

Ответы: а) 1 кг·м^2; б) 2 кг·кг^2; в) 3 кг·м^2; г) 4 кг·м^2; д) 5 кг·м^2



6-11. Тело вращается вокруг закрепленной оси с угловым ускорением, зависимость от времени которого задается графиком. Момент инерции тела относительно оси вращения равен I. Найти момент импульса тела в момент времени $t = 4$ с, если $\varepsilon_{\max} = 1$ с$^{-2}$. $I = 1$ кг$\cdot$м^2

Ответ: 1 Н·м·с



6-12. Тело вращается вокруг закрепленной оси с угловой скоростью, зависимость от времени которой задается графиком. Момент инерции тела относительно оси вращения равен I. Найти

а) отношение модулей моментов сил;

б) на сколько отличаются модули моментов сил, действующих на тело в моменты времени $t_1 = 1$ с и $t_2 = 3$ с. $\omega_{\max} = 1$ с$^{-1}$, $I = 1$ кг$\cdot$м^2

Ответы: а) 0,5; б) 0,5 Н$\cdot$м

7. Момент инерции. Теорема Штейнера. Центр масс.

Момент инерции системы частиц относительно заданной оси $\boxed{I = \sum m_i \cdot r_i^2}$, где m_i – масса частицы, r_i – расстояние от частицы до заданной оси.

Если масса тела непрерывно распределена в пространстве то $\boxed{I = \int dm \cdot r^2}$, где dm – масса элементарного объема тела, r – расстояние от этого объема до заданной оси.

Теорема Штейнера.

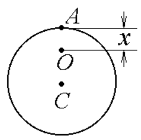
Момент инерции I_O твердго тела относительно произвольной оси *O* равен сумме момента инерции этого тела I_C относительно оси *C*, **параллельной оси *O* и проходящей через центр масс тела**, и произведения массы этого тела m и квадрата расстояния d между осями *O* и *C*.

$$\boxed{I_O = I_C + md^2}$$

Координата центра масс $\boxed{x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}}$, где x_i – координата материальной точки с массой m_i или $\boxed{x_C = \frac{\int x dm}{\int dm}}$ (случай непрерывного распределения).

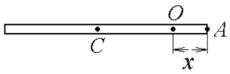
Таблица моментов инерции некоторых фигур.

$I = mR^2$ – кольца относительно оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости.	$I = \frac{2}{5} mR^2$ – однородного шара относительно оси, проходящей через центр шара.
$I = \frac{1}{2} mR^2$ – диска относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости.	$I = \frac{1}{12} ml^2$ – стержня относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно к нему.



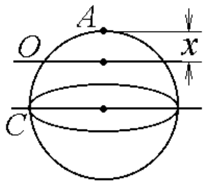
7-1. Перпендикулярно плоскости однородного диска массы *m* и радиуса *R* проходят две параллельные оси. Одна проходит через центр масс диска *C*, а другая через точку *O*, лежащую на расстоянии *x* от точки *A* на краю диска. Точки *O*, *C* и *A* лежат на диаметре диска. Во сколько раз больше момент инерции диска I_O, чем I_C?
m = 1 кг, *R* = 1 м, *x* = 0,4 м.

Ответ: 1,72 раз



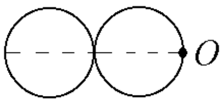
7-2. Перпендикулярно однородному тонкому стержню массы *m* и длиной *l* проходят две параллельные оси. Одна проходит через центр масс стержня *C*, а другая через точку *O*, лежащую на расстоянии *x* от его конца *A*. Во сколько раз больше момент инерции стержня I_O, чем I_C? *m* = 1 кг, *l* = 1 м, *x* = 0,4 м

Ответ: 1,12 раз



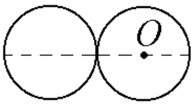
7-3. Через однородный шар массы m и радиуса R проходят две параллельные оси. Одна проходит через центр масс шара C, а другая через точку O, лежащую на расстоянии x от края шара A. Точки A, O и C лежат на диаметре шара. Во сколько раз больше момент инерции шара I_O, чем I_C?
m = 1 кг, R = 1 м, x = 0,4 м.

Ответ: 1,9 раз



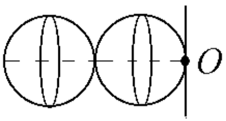
7-4. Два одинаковых диска массой m и радиусом R каждый положили на плоскость и приварили друг к другу. Найти момент инерции получившейся детали относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости дисков через точку O (см. рис.). R = 1 м, m = 1 кг.

Ответ: 11 кг·м^2



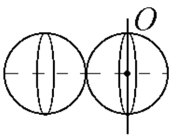
7-5. Два одинаковых диска массой m и радиусом R каждый положили на плоскость и приварили друг к другу. Найти момент инерции получившейся детали относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости дисков через центр масс одного из дисков O. R = 1 м, m = 1 кг.

Ответ: 5 кг·м^2



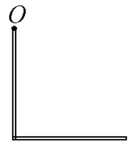
7-6. Два одинаковых шара массой m и радиусом R каждый приварили друг к другу. Касательная к шару ось O проходит перпендикулярно линии, проходящей через центры шаров. Найти момент инерции получившейся детали относительно оси O. R = 1 м, m = 1 кг.

Ответ: 10,8 кг·м^2



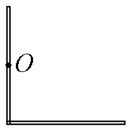
7-7. Два одинаковых шара массой m и радиусом R каждый приварили друг к другу. Ось O проходит по диаметру шара перпендикулярно линии, соединяющей центры шаров. Найти момент инерции получившейся детали относительно оси O.
R = 1 м, m = 1 кг.

Ответ: 4,8 кг·м^2



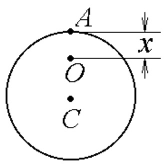
7-8. Два одинаковых однородных тонких стержня массой m и длиной l каждый приварили концами перпендикулярно друг к другу. Через конец одного из стержней проходит ось O, перпендикулярная плоскости стержней. Найти момент инерции получившейся детали относительно оси O. $l = 1$ м, $m = 1$ кг.

Ответ: 1,677 кг·м^2



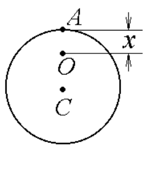
7-9. Два одинаковых однородных тонких стержня массой m и длиной l каждый приварили концами перпендикулярно друг к другу. Через центр одного из стержней проходит ось O, перпендикулярная плоскости стержней. Найти момент инерции получившейся детали относительно оси O. $l = 1$ м, $m = 1$ кг.

Ответ: 0,667 кг·м^2



7-10. Перпендикулярно плоскости однородного диска массы $m = 1$ кг и радиуса $R = 1$ м проходят две параллельные оси. Одна проходит через центр масс диска C, а другая через точку O, лежащую на расстоянии $x = 0,4$ м от точки A на краю диска. Точки O, C и A лежат на диаметре диска. На сколько отличаются моменты инерции диска относительно этих осей?

Ответы: 0,36 кг·м^2

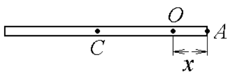


7-11. Перпендикулярно плоскости однородного диска массы m и радиуса R проходят две параллельные оси. Одна проходит через точку A на краю диска, а другая через точку O, лежащую на расстоянии x от точки A. Точки O и A лежат на диаметре диска. $m = 1$ кг, $R = 1$ м, $x = 0,4$ м.

а) Во сколько раз отличаются моменты инерции диска I_A и I_O?

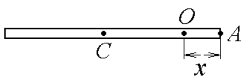
б) На сколько отличаются моменты инерции диска относительно этих осей?

Ответы: а) 1,74 раз; б) 0,64 кг·м^2



7-12. Перпендикулярно однородному тонкому стержню массы $m = 1$ кг и длиной $l = 1$ м проходят две параллельные оси. Одна проходит через центр масс стержня C, а другая через точку O, лежащую на расстоянии $x = 0,4$ м от его конца A. На сколько отличаются моменты инерции стержня относительно этих осей?

Ответ: 0,01 кг·м^2



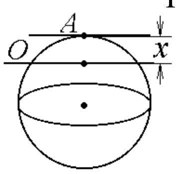
7-13. Перпендикулярно однородному тонкому стержню массы $m = 1$ кг и длиной $l = 1$ м проходят две параллельные оси. Одна проходит через конец стержня A, а другая через точку O, лежащую на расстоянии $x = 0,4$ м от точки A.

а) Во сколько раз отличаются моменты инерции стержня I_A и I_O?

б) На сколько отличаются моменты инерции стержня относительно этих осей?

Ответы: а) 3,57 раз; б) 0,24 кг·м^2

7-14. Через однородный шар массы m и радиуса R проходят две параллельные оси. Одна касается шара в точке A, а другая проходит через точку O, лежащую на расстоянии x от точки A. Точки A и O лежат на одном диаметре шара.

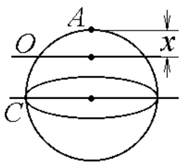


m = 1 кг, R = 1 м, x = 0,4 м.

а) Во сколько раз отличаются моменты инерции шара I_A и I_O?

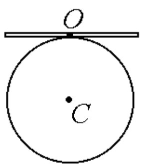
б) На сколько отличаются моменты инерции шара относительно этих осей?

Ответы: а) 1,84 кг·м^2; б) 0,64 кг·м^2



7-15. Через однородный шар массы m и радиуса R проходят две параллельные оси. Одна проходит через центр масс шара C, а другая через точку O, лежащую на расстоянии x от края шара A. Точки A, O и C лежат на диаметре шара. На сколько отличаются моменты инерции шара относительно этих осей? m = 1 кг, R = 1 м, x = 0,4 м.

Ответ: 0,36 кг·м^2



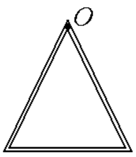
7-16. На одну плоскость положили тонкий однородный стержень массы m и длины $l = 2R$ и диск радиуса R и такой же массы m. Центр стержня O приварили к диску. Перпендикулярно плоскости получившейся детали проходит ось

а) через точку O

б) через центр диска C

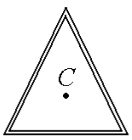
Найти момент инерции детали относительно этих осей. m = 1 кг, R = 1 м.

Ответы: а) 1,83 кг·м^2; б) 1,83 кг·м^2



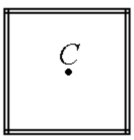
7-17. Деталь в виде равностороннего треугольника сварили из трех одинаковых однородных тонких стержней массы m и длины l каждый. Ось O проходит перпендикулярно плоскости детали через вершину треугольника. Найти момент инерции детали относительно этой оси. m = 1 кг, l = 1 м.

Ответ: 1,5 кг·м^2



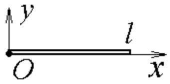
7-18. Деталь в виде равностороннего треугольника сварили из трех одинаковых однородных тонких стержней массы m и длины l каждый. Ось C проходит перпендикулярно плоскости детали через центр масс треугольника. Найти момент инерции детали относительно этой оси. m = 1 кг, l = 1 м.

Ответ: 0,5 кг·м^2



7-19. Деталь в виде квадрата сварили из четырех одинаковых однородных тонких стержней массы m и длины l каждый. Ось C проходит перпендикулярно плоскости детали через центр масс квадрата. Найти момент инерции детали относительно этой оси. m = 1 кг, l = 1 м.

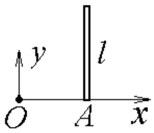
Ответ: 1,33 кг·м^2



7-20. Тонкий стержень постоянного сечения длиной l = 1 м лежит на оси x и его левый конец совпадает с началом координат O. Линейная плотность вещества, из которого сделан стержень, зависит от координаты x по закону ($\rho_0 = 1$ кг/м)

а) $\rho = \rho_0 \frac{x}{l}$; б) . $\rho = \rho_0 \left(\frac{x}{l}\right)^2$; в) $\rho = \rho_0 \left(\frac{x}{l}\right)^3$; г) $\rho = \rho_0 \left(\frac{x}{l}\right)^4$; д) $\rho = \rho_0 \left(\frac{x}{l}\right)^5$

А) Рассчитать момент инерции стержня относительно оси y.
Б) Найти координату центра масс стержня.
Ответы:
А) а) 0,25 кг·м^2; б) 0,2 кг·м^2; в) 0,167 кг·м^2; г) 0,143 кг·м^2; д) 0,125 кг·м^2
Б) а) 0,667 м; б) 0,75 м; в) 0,80 м; г) 0,833 м; д) 0,857 м



7-21. Тонкий стержень постоянного сечения длиной l расположен параллельно оси y. Нижний конец стержня лежит на оси x на расстоянии l от начала координат. Линейная плотность вещества, из которого сделан стержень, зависит от координаты y по закону

а) $\rho = \rho_0 \frac{y}{l}$; б) $\rho = \rho_0 \left(\frac{y}{l}\right)^2$; в) $\rho = \rho_0 \left(\frac{y}{l}\right)^3$; г) $\rho = \rho_0 \left(\frac{y}{l}\right)^4$; д) $\rho = \rho_0 \left(\frac{y}{l}\right)^5$. Рассчитать момент инерции стержня относительно оси y. $\rho_0 = 1$ кг/м, l = 1 м.

Ответы: а) 0,5 кг·м^2; б) 0,333 кг·м^2; в) 0,25 кг·м^2; г) 0,2 кг·м^2; д) 0,167 кг·м^2

8. Кинетическая энергия. Мощность. Работа.

Кинетическая энергия катящегося тела $E_k = \frac{m v_C^2}{2} + \frac{I_z \omega^2}{2}$, где v_C – скорость центра масс тела, I_z – момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через центр масс, ω – угловая скорость вращения.

Мощность $N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$, где $\vec{v}$ – скорость перемещения точки приложения силы.

Работа силы $A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F \cdot dl \cdot \cos\alpha = \int_{t_1}^{t_2} N dt$,где $d\vec{r}$ – перемещение, α – угол между вектором силы и вектором перемещения, $dl = |d\vec{r}|$.

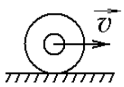
Работа момента силы $A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi$.

8-1. Шарик массы m и радиуса R катится по горизонтальной поверхности со скоростью v без проскальзывания. Найдите кинетическую энергию этого шарика. m = 1 кг, R = 1 м, $v=1$ м/с.

Ответ: 0,7 Дж

8-2. Диск массы m и радиуса R катится по горизонтальной поверхности со скоростью v без проскальзывания. Найдите кинетическую энергию этого диска. m = 1 кг, R = 1 м, $v=1$ м/с.

Ответ: 0,75 Дж



8-3. Катушка без ниток имеющая массу m, внешний радиус R и момент инерции I, катится по горизонтальной поверхности со скоростью v без проскальзывания. Найдите кинетическую энергию этой катушки. m = 1 кг, R = 1 м, I = 1 $\text{кг}\cdot\text{м}^2$, $v=1$ м/с.

Ответ: 1 Дж

8-4. Небольшое тело начало движение из начала координат вдоль горизонтальной оси x под действием силы, направленной под углом α = 30° к оси x. Модуль силы меняется в зависимости от координаты x по закону

а) $F = A\frac{x}{b}$; б) $F = A\left(\frac{x}{b}\right)^2$; в) $F = A\left(\frac{x}{b}\right)^3$; г) $F = A\left(\frac{x}{b}\right)^4$; д) $F = A\left(\frac{x}{b}\right)^5$. Найти работу этой силы на участке пути от $0<x<b$. A = 1 Н, b = 1 м.

Ответы: а) 0,433 Дж; б) 0,289 Дж; в) 0,217 Дж; г) 0,173 Дж; д) 0,144 Дж

8-5. Небольшое тело начало движение из начала координат вдоль горизонтальной оси x под действием силы, направленной под углом α к оси x. Модуль силы F не меняется, но угол α зависит от координаты x по закону $\alpha = A\frac{\pi x}{b}$. Найти работу этой силы на участке пути от $0<x<b$, если b = 1 м, F = 1 Н, а) A = 1 Н; б) $A = \frac{1}{2}$ Н; в) $A = \frac{1}{3}$ Н; г) $A = \frac{1}{6}$ Н; д) $A = \frac{1}{4}$ Н,

Ответы: а) 0 Дж; б) 0,637 Дж; в) 0,827 Дж; г) 0,955 Дж; д) 0,9 Дж

8-6. Найти работу, произведенную машиной за промежуток времени $0<t<1$ с, если мощность машины зависит от времени по закону

а) $N = A\frac{t}{\tau}$; б) $N = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$; в) $N = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$; г) $N = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$; д) $N = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$

$\tau=1$ с, A = 1 Вт.

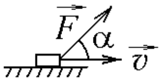
Ответы: а) 0,5 Дж; б) 0,333 Дж; в) 0,25 Дж; г) 0,2 Дж; д) 0,167 Дж

8-7. Массивный диск может вращаться вокруг закрепленной оси без трения. Найдите работу момента силы при повороте диска на угол φ_0, если момент сил, действующий на диск, зависит от угла поворота φ по закону

а) $M = A\dfrac{\varphi}{\varphi_0}$; б) $M = A\left(\dfrac{\varphi}{\varphi_0}\right)^2$; в) $M = A\left(\dfrac{\varphi}{\varphi_0}\right)^3$; г) $M = A\left(\dfrac{\varphi}{\varphi_0}\right)^4$;

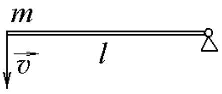
$A = 1$ Н·м, $\varphi_0 = 1$ рад.

Ответы: а) 0,5 Дж; б) 0,333 Дж; в) 0,25 Дж; г) 0,2 Дж



8-8. Тело движется вдоль горизонтальной оси *x* под действием силы $\vec{F}$, направленной под углом α к оси *x*. В некоторый момент тело достигает скорости $\vec{v}$. Найдите мощность силы в этот момент времени. $F = 1$ Н, $v = 1$ м/с, α = 30°.

Ответ: 0,866 Вт



8-9. Тонкий однородный стержень массы *m* и длины *l* может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня. Стержень привели в горизонтальное положение и толкнули так, что незакрепленный конец стержня приобрел скорость v. Найдите кинетическую энергию стержня в первый момент времени. *m* =1 кг, *l* = 1 м, $v = 1$ м/с.

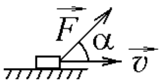
Ответ: 0,167 Дж

8-10. Шарик массы *m* и радиуса *R* катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности, вращаясь с угловой скоростью ω. Найдите кинетическую энергию этого шарика. *m* = 1 кг, *R* = 1 м, ω = 1 рад/с.

Ответ: 0,7 Дж

8-11. Диск массы *m* и радиуса *R* катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности, вращаясь с угловой скоростью ω. Найдите кинетическую энергию этого диска. *m* = 1 кг, *R* = 1 м, ω = 1 рад/с.

Ответ: 0,75 Дж



8-12. Тело движется вдоль горизонтальной оси *x* под действием силы $\vec{F}$, направленной под углом α к оси *x*. В некоторый момент тело достигает скорости $\vec{v}$, а мощность силы равна *N*. Найдите а) косинус угла α; б) синус угла α.

$F = 1$ Н, $v = 1$ м/с, $N = 0{,}5$ Вт.

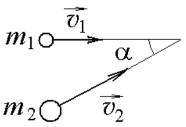
Ответы: а) 0,5; б) 0,866

9. Закон сохранения импульса и момента импульса.

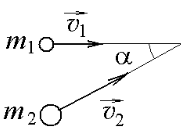
При взаимодействии частиц системы между собой **полный вектор импульса** системы остается постоянным в случаях, когда
а) $\left(\sum\vec{F}_i\right)_{\text{внеш}}=0$, б) $\left|\left(\sum\vec{F}_i\right)_{\text{внеш}}\right|<\text{const}$ и время взаимодействия очень мало. В этих случаях $\left(\sum\vec{p}_i\right)_{\text{до}}=\left(\sum\vec{p}_j\right)_{\text{после}}$, где $\left(\sum\vec{p}_i\right)_{\text{до}}$ – **векторная сумма** импульсов частиц, которые существовали до взаимодействия, $\left(\sum\vec{p}_j\right)_{\text{после}}$ – **векторная сумма** импульсов всех частиц, которые будут существовать после взаимодействия. Если $\left(\sum F_{xi}\right)_{\text{внеш}}=0$, то сохраняется только **проекция полного импульса** системы на ось x, $\left(\sum p_{xi}\right)_{\text{до}}=\left(\sum p_{xj}\right)_{\text{после}}$.

При взаимодействии частиц системы между собой **полный вектор момента импульса** системы остается постоянным в случаях, когда
а) $\left(\sum\vec{M}_i\right)_{\text{внеш}}=0$, б) $\left|\left(\sum\vec{M}_i\right)_{\text{внеш}}\right|<\text{const}$ и время взаимодействия очень мало. В этих случаях $\left(\sum\vec{L}_i\right)_{\text{до}}=\left(\sum\vec{L}_j\right)_{\text{после}}$ где $\left(\sum\vec{L}_i\right)_{\text{до}}$ – **векторная сумма моментов импульсов** частиц, которые существовали до взаимодействия, $\left(\sum\vec{L}_j\right)_{\text{после}}$ – **векторная сумма моментов импульсов** всех частиц, которые будут существовать после взаимодействия. Если $\left(\sum M_{zi}\right)_{\text{внеш}}=0$, то сохраняется **только проекция момента импульса** системы на ось z $\left(\sum L_{zi}\right)_{\text{до}}=\left(\sum L_{zj}\right)_{\text{после}}$ (часто относительно закрепленной оси вращения).

Момент импульса частицы $\boxed{\vec{L}=[\vec{r},\vec{p}]}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор частицы, $\vec{p}=m\vec{v}$ – импульс частицы. $\boxed{\left|\vec{L}\right|=r\cdot p\cdot\sin\alpha}$, где α – угол между $\vec{r}$ и $\vec{p}$. Для твердого тела, вращающегося вокруг закрепленной оси z $\boxed{L_z=I_z\cdot\omega_z}$, где I_z – момент инерции тела относительно оси z, ω_z – угловая скорость.



9-1. Маленький пластилиновый шарик массы m_1 движется горизонтально со скоростью $\vec{v}_1$. Под углом α к направлению его движения летит второй шарик массы m_2 со скоростью $\vec{v}_2$ и сталкивается с первым. Шарики слипаются и движутся под углом β к первоначальному направлению движения. А) первого шарика; Б) второго шарика. Найдите $\text{tg}\beta$. $m_1=$ 1 кг, $m_2=$ 2 кг, $v_1=$ 1 м/с, $v_2=$ 2 м/с,
а) α = 30°; б) α = 45°; в) α = 60°; г) 90°.
Ответ: А) Ответы: а) 0,448; б) 0,739; в) 1,155; г) 4; Б) Ответы: а) 0,103; б) 0,15; в) 0,192; г) 0,25



9-2. Маленький пластилиновый шарик массы m_1 движется горизонтально со скоростью $\vec{v}_1$. Под углом α к направлению его движения летит второй шарик массы m_2 со скоростью $\vec{v}_2$ и сталкивается с первым. Шарики слипаются и движутся под со скоростью $\vec{v}_3$. Найдите после удара. А) модуль скорости v_3; Б) модуль импульса шариков. $m_1=$ 1 кг, $m_2=$ 2 кг, $v_1=$ 1 м/с, $v_2=$ 2 м/с, а) α = 30°, б) α = 45°, в) α = 60°.
А) Ответы: а) 1,63 м/с; б) 1,59 м/с; в) 1,53 м/с; Б) Ответы: а) 4,89 кг·м/с; б) 4,76 кг·м/с; в) 4,58 кг·м/с

9-3. Маленький пластилиновый шарик массы m_1 движется горизонтально со скоростью $\vec{v}_1$. Перпендикулярно к направлению его движения летит второй шарик массы m_2 со скоростью $\vec{v}_2$ и сталкивается с первым. Шарики слипаются и далее движутся вместе. Найдите после удара

а) модуль импульса шариков; б) модуль скорости шариков.

$m_1 =$ 1 кг, $m_2 =$ 2 кг, $v_1 =$ 1 м/с, $v_2 =$ 2 м/с.

Ответ: а) 4,123 кг·м/с; б) 1,374 м/с

9-4. Маленький пластилиновый шарик массы m_1 движется горизонтально со скоростью $\vec{v}_1$. Перпендикулярно к направлению его движения летит второй шарик массы m_2 со скоростью $\vec{v}_2$ и сталкивается с первым. Шарики слипаются и далее движутся вместе под углом β к первоначальному направлению движения А) первого шарика; Б) второго шарика. Найдите $\cos\beta$ и $\sin\beta$.

$m_1 =$ 1 кг, $m_2 =$ 2 кг, $v_1 =$ 1 м/с, $v_2 =$ 2 м/с.

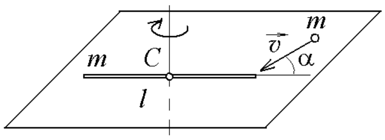
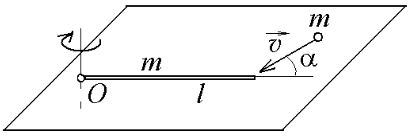
А) Ответы: $\cos\beta = 0{,}243$; $\sin\beta = 0{,}97$

Б) Ответы: $\cos\beta = 0{,}97$; $\sin\beta = 0{,}243$

9-5. На горизонтальной плоскости лежит тонкий однородный стержень массы m =1 кг и длины l, который может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через А) центр масс стержня C; Б) конец стержня O. Под углом α =30° к стержню в той же плоскости движется маленький пластилиновый шарик такой же массы m со скоростью v = 1 м/с. Шарик прилипает к концу стержня, и система приобретает угловую скорость вращения ω. Найти

а) угловую скорость вращения системы после удара, если l = 1 м;

б) длину стержня, если , ω = 1 рад/с

А)  Б) 

Ответы: Аа) <u>0,75</u> рад/с; Ба) : 0,375 рад/с; Аб) <u>0,75</u> м; Бб) 0,375 м

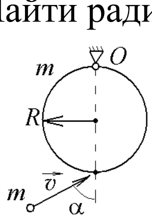
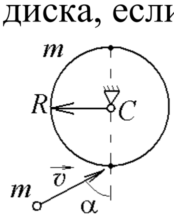
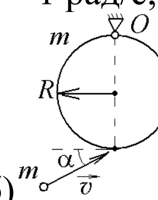
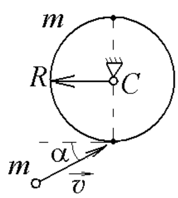
9-6. Тонкий однородный диск массы m = 1 кг и радиуса R может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей

А) через его край O; Б) через его центр C. Под углом α =30° а) к вертикали;

б) к горизонтали в плоскости вращения диска движется маленький пластилиновый шарик такой же массы m со скоростью v = 1 м/с. Шарик прилипает к нижней точке неподвижно висящего диска, и система приобретает угловую скорость вращения ω.. Найти

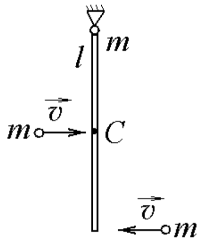
1) угловую скорость вращения системы после удара, если R = 1 м;

2) Найти радиус диска, если ω = 1 рад/с,

Аа)  Ба)  Аб)  Бб) 

Ответы: 1) Аа) 0,182 рад/с; Ба) 0,333 рад/с; Аб) 0,315 рад/с; Бб) 0,577 рад/с.

Ответы: 2) Аа) 0,182 м; Ба) 0,333 м; Аб) 0,315 м; Бб) 0,577 м.

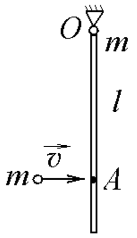


9-7. Тонкий однородный стержень массы m = 1 кг и длины l может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец. С разных сторон на стержень горизонтально в той же плоскости налетают два одинаковых пластилиновых шарика той же массы m с одинаковыми скоростями v = 1 м/с. Первый шарик застревает в центре стержня, второй – в нижнем конце, и система приобретает угловую скорость ω. Найти

а) угловую скорость вращения системы после удара, если l = 1 м;

б) Найти длину стержня, если ω = 1 рад/с.

Ответы: а) 0,316 рад/с; б) 0,316 м



9-8. Тонкий однородный стержень массы m =1 кг и длины l может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец O. Горизонтально в той же плоскости на стержень налетает пластилиновый шарик той же массы m со скоростью v = 1 м/с. Шарик застревает в точке A стержня на расстоянии $x = \frac{3}{4}l$ от точки O, и система приобретает угловую скорость ω. Найти

а) угловую скорость вращения системы после удара, если l = 1 м;

б) Найти длину стержня, если ω = 1 рад/с.

Ответы: а) 0,837 рад/с; б) 0,837 м.

10. Закон сохранения полной механической энергии.

Полная механическая энергия E складывается из двух составляющих: $E = E_k + E_p$, где E_k – кинетическая энергия, E_p – потенциальная энергия.

Если <u>работа всех неконсервативных</u> сил (и внешних, и внутренних) в системе частиц в интервале времени от t_1 до t_2 равна нулю, то **полная механическая энергия системы сохраняется** в этом интервале времени, т.е.

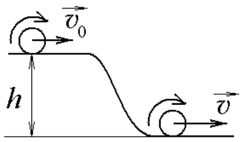
$$\underbrace{E_{k1} + E_{p1}}_{\text{первый момент времени}} = \underbrace{E_{k2} + E_{p2}}_{\text{второй момент времени}}.$$

В случае только поступательного движения $\boxed{E_k = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}}$, где m – масса системы, v – скорость центра масс. В случае только вращательного движения $\boxed{E_k = \frac{I\omega^2}{2}}$, где ω – угловая скорость, I – момент инерции тела относительно оси вращения. Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия $\boxed{E_p = mgh}$, где g – ускорение свободного падения однородного гравитационого поля, m – масса системы частиц, h – высота центра масс системы над уровнем, потенциал поля на котором принимается за ноль (выбирается произвольным образом).

Если в некотором интервале времени над системой частиц была **совершена работа** со стороны **неконсервативных сил** то полная энергия системы **изменяется**, причем

$$A_{\text{неконс}} = \Delta E = \underbrace{\left(E_{k2} + E_{p2}\right)}_{\text{второй момент времени}} - \underbrace{\left(E_{k1} + E_{p1}\right)}_{\text{первый момент времени}}.$$

В задачах в роли неконсервативных сил обычно выступают силы трения скольжения, сопротивления воздуха, тяги. **Сила трения покоя** работу не совершает.



10-1. Тонкий однородный диск массы m и радиуса R скатывается без проскальзывания с горки высоты h, совершая плоское движение. Начальная скорость центра масс диска равна $\vec{\mathrm{v}}_0$. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало, m = 1 кг, R = 1 м, v_0 = 1 м/с,
h = 1 м, g = 10 м/с^2. После того, как он скатится с горки, найдите
а) скорость центра масс диска
б) кинетическую энергию диска
в) Во сколько раз увеличилась кинетическая энергия диска
г) На сколько увеличится кинетическая энергия диска
д) Найдите угловую скорость вращения диска

Ответы: а) 3,79 м/с; б) 10,75 Дж; в) 14,33 раз; г) 10 Дж; д) 3,79 рад/с

10-2. Однородный шар массы m и радиуса R скатывается без проскальзывания с горки высоты h. Начальная скорость центра масс шара равна $\vec{v}_0$. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. $m = 1$ кг, $R = 1$ м, $v_0 = 1$ м/с, $h = 1$ м, $g = 10$ м/с^2. После того, как он скатится с горки, найдите

а) скорость центра масс шара

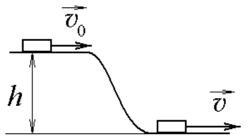
б) кинетическую энергию шара

в) Во сколько раз увеличилась кинетическая энергия шара

г) На сколько увеличится кинетическая энергия шара

д) Найдите угловую скорость вращения шара

Ответы: а) 3,91 м/с; б) 10,7 Дж; в) 15,29 раз; г) 10 Дж; д) 3,91 рад/с



10-3. Резиновая шайба массы $m = 1$ кг, двигаясь со скоростью $v_0 = 1$ м/с, соскальзывает с горки высоты $h = 1$ м и приобретает скорость v у подножия горки. Во время движения над шайбой была совершена работа сил трения $A_{тр}$. ($g = 10$ м/с^2). Найдите

а) скорость шайбы v, если $A_{тр} = 1$ Дж

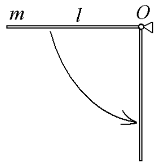
б) кинетическую энергию шайбы у подножия горки, если $A_{тр} = 1$ Дж

в) во сколько раз изменилась кинетическая энергия шайбы, если $A_{тр} = 1$ Дж

г) на сколько изменилась кинетическая энергия шайбы, если $A_{тр} = 1$ Дж

д) модуль работы сил трения $A_{тр}$, если $v = 3$ м/с

Ответы: а) 4,36 м/с; б) 9,5 Дж; в) 19 раз; г) 9 Дж; д) 6 Дж



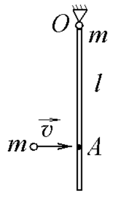
10-4. Тонкий однородный стержень массы m и длины l может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня O. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают без толчка. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

$m = 1$ кг, $l = 1$ м, $g = 10$ м/с^2. В момент прохождения им положения равновесия найдите

а) кинетическую энергию стержня. б) скорость нижнего конца стержня

в) угловую скорость стержня г) скорость центра масс стержня

Ответы: а) 5 Дж; б) 5,48 м/с; в) 5,48 рад/с; г) 2,74 м/с



10-5. Тонкий однородный стальной стержень массы $m = 1$ кг и длины $l = 1$ м может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец O. Горизонтально в той же плоскости на стержень налетает стальной шарик той же массы m со скоростью $v = 1$ м/с и отскакивает со скоростью u после абсолютно упругого удара. Стержень начинает вращаться с угловой скоростью ω. Найти

а) скорость шарика u, если $\omega = 1$ рад/с.

б) угловую скорость стержня ω, если $u = 0{,}5$ м/с.

в) Во сколько раз уменьшится скорость шарика, если $\omega = 1$ рад/с.

г) На сколько уменьшится скорость шарика, если $\omega = 1$ рад/с.

Ответы: а) 0,816 м/с; б) 1,5 рад/с; в) 1,22 раз; г) 0,184 м/с

11. Использование теоремы Гаусса в дифференциальной форме.

Как известно из векторной алгебры, любой вектор $\vec{A}$ можно описать с помощью его проекций в виде

$$\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z, \qquad (1.1)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты осей x, y, z, а A_x, A_y, A_z – проекции вектора на эти оси.

Над векторами можно производить математические действия, такие как векторное сложение, скалярное и векторное умножение. Кроме этого существуют дифференциальные операторы, действующие на векторы. Примером может служить оператор "набла":

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (1.2)$$

Операция скалярного умножения оператора "набла" на вектор $\vec{A}$ называется дивергенцией вектора $\vec{A}$:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right). \qquad (1.3)$$

В электростатике основным вектором является вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$. Используя формулы (1.1) – (1.3) можно записать выражение для дивергенции вектора $\vec{E}$:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \qquad (1.4)$$

Если в некоторой физической задаче известна зависимость вектора напряженности электрического поля от координат, то можно определить объемную плотность электрического заряда ρ (функцию распределения электрического заряда в пространстве):

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (1.5)$$

Уравнение (1.5) – это теорема Гаусса в дифференциальном виде для вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$. Здесь $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, ε – диэлектрическая проницаемость среды.

Задача 1

Напряженность электростатического поля задается формулой $\vec{E} = \vec{i}\cdot A\frac{x^{11}y^{12}}{b^{23}} + \vec{j}\cdot A\frac{y^{11}x^{12}}{b^{23}}$. Используя теорему Гаусса в дифференциальной форме, найдите объемную плотность заряда в точке $P(x_0, y_0)$, если $A = 3$ Н/Кл; $x_0 = 1$ м, $y_0 = 2$ м, $b = 1$ м.

Решение:

Сравнивая выражение для $\vec{E}$ из условия с формулой (1.1), можно определить проекции вектора $\vec{E}$:

$$E_x = A\frac{x^{11}y^{12}}{b^{23}};\; E_y = A\frac{y^{11}x^{12}}{b^{23}} \qquad (1.6)$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{x^{11}y^{12}}{b^{23}} \right) = A\frac{y^{12}}{b^{23}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{11}\right) = 11A\frac{y^{12}x^{10}}{b^{23}} = 11\cdot 3\cdot\frac{2^{12}\cdot 1^{10}}{1^{23}}, \qquad (1.7)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(A\frac{y^{11}x^{12}}{b^{23}} \right) = A\frac{x^{12}}{b^{23}}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{11}\right) = 11A\frac{x^{12}y^{10}}{b^{23}} = 11\cdot 3\cdot\frac{1^{12}\cdot 2^{10}}{1^{23}}. \quad (1.8)$$

В выражения (1.7) и (1.8) были подставлены значения $A = 3$ Н/Кл, $x = x_0 = 1$ м, $y = y_0 = 2$ м, $b = 1$ м.

Рассчитав значения выражений (1.7) и (1.8), подставим их в формулу (1.5), откуда можно выразить объемную плотность электрического заряда в заданной точке P:

$$\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E} = \varepsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right) = 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot\left(135168 + 33792\right) =$$

$= 1{,}50\cdot 10^{-6}$ Кл/м^3.

Ответ: 1,50 мкКл/м^3

1.1 Напряженность электростатического поля задается формулой

а) $\vec{E} = \vec{i}\cdot A\frac{xy^2}{b^3} + \vec{j}\cdot A\frac{yx^2}{b^3}$; б) $\vec{E} = \vec{i}\cdot A\frac{x^2y^3}{b^5} + \vec{j}\cdot A\frac{y^2x^3}{b^5}$;

в) $\vec{E} = \vec{i}\cdot 3A\frac{x^2y}{b^3} + \vec{j}\cdot A\frac{x^3}{b^3}$. Используя теорему Гаусса в дифференциальной форме, найдите объемную плотность заряда в точке $P(x_0, y_0)$.

$A = 1$ Н/Кл; $x_0 = 1$ м, $y_0 = 2$ м, $b = 1$ м.

Ответы: а) $4{,}4\cdot 10^{-11}$ Кл/м^3; б) 0,18 нКл/м^3; в) 0,11 нКл/м^3

1.2 Напряженность электростатического поля задается формулой

а) $\vec{E} = \vec{i}\cdot A\frac{x}{b} + \vec{j}\cdot B\frac{y}{b}$; б) $\vec{E} = \vec{i}\cdot A\frac{x}{b} + \vec{j}\cdot B\frac{y^2}{b^2}$;

в) $\vec{E} = \vec{i}\cdot A\frac{x}{b} + \vec{j}\cdot B\frac{y^3}{b^3}$; г) $\vec{E} = \vec{i}\cdot A\frac{x^2}{b^2} + \vec{j}\cdot B\frac{y}{b}$;

д) $\vec{E} = \vec{i}\cdot A\frac{x^2}{b^2} + \vec{j}\cdot B\frac{y^2}{b^2}$; е) $\vec{E} = \vec{i}\cdot A\frac{x^2}{b^2} + \vec{j}\cdot B\frac{y^3}{b^3}$;

ж) $\vec{E} = \vec{i}\cdot A\frac{x^3}{b^3} + \vec{j}\cdot B\frac{y^3}{b^3}$; з) $\vec{E} = \vec{i}\cdot A\frac{x^4}{b^4} + \vec{j}\cdot B\frac{y^4}{b^4}$

Используя теорему Гаусса в дифференциальной форме, найдите объемную плотность заряда в точке $P(x_0, y_0)$.

$A = 1$ Н/Кл, $B = 2$ Н/Кл, $x_0 = 1$ м, $y_0 = 2$ м, $b = 1$ м.

Ответы: а) $2{,}7\cdot 10^{-11}$ Кл/м^3; б) $8{,}0\cdot 10^{-11}$ Кл/м^3; в) $2{,}2\cdot 10^{-10}$ Кл/м^3;
г) $3{,}5\cdot 10^{-11}$ Кл/м^3; д) $8{,}9\cdot 10^{-11}$ Кл/м^3; е) $2{,}3\cdot 10^{-10}$ Кл/м^3;
ж) $2{,}4\cdot 10^{-10}$ Кл/м^3 з) $6{,}0\cdot 10^{-10}$ Кл/м^3;

1.3 Напряженность электростатического поля задается формулой

а) $\vec{E}=\vec{i}\cdot A\sin(Bx)+\vec{j}\cdot C\sin(Dy)$; б) $\vec{E}=\vec{i}\cdot A\sin(Bx)+\vec{j}\cdot C\cos(Dy)$;

в) $\vec{E}=\vec{i}\cdot A\cos(Bx)+\vec{j}\cdot C\sin(Dy)$; г) $\vec{E}=\vec{i}\cdot A\cos(Bx)+\vec{j}\cdot C\cos(Dy)$.

Используя теорему Гаусса в дифференциальной форме, найдите объемную плотность заряда в точке $P(x_0, y_0)$.

$A=1$ В/м, $B=2$ рад/м, $C=3$ В/м, $D=4$ рад/м, $x_0=1$ м, $y_0=2$ м.

Ответы: а) $-2{,}3\cdot10^{-11}$ Кл/м^3; б) $-1{,}1\cdot10^{-10}$ Кл/м^3;
в) $-3{,}2\cdot10^{-11}$ Кл/м^3; г) $-1{,}2\cdot10^{-10}$ Кл/м^3

1.4 Напряженность электростатического поля задается формулой

$\vec{E}=\vec{i}\cdot A\exp(-Bx)+\vec{j}\cdot C\exp(-Dy)$.

Используя теорему Гаусса в дифференциальной форме, найдите объемную плотность заряда в точке $P(x_0, y_0)$.

$A=1$ В/м, $B=2$ м$^{-1}$, $C=3$ В/м, $D=4$ м$^{-1}$, $x_0=1$ м, $y_0=2$ м.

Ответ: $-2{,}4\cdot10^{-12}$ Кл/м^3

1.5 Напряженность электростатического поля задается формулой

а) $\vec{E}=\vec{i}\cdot A\cos(Bx)+\vec{j}\cdot C\exp(-Dy)$;

б) $\vec{E}=\vec{i}\cdot A\sin(Bx)+\vec{j}\cdot C\exp(-Dy)$.

Используя теорему Гаусса в дифференциальной форме, найдите объемную плотность заряда в точке $P(x_0, y_0)$.

$A=1$ В/м, $B=2$ рад/м, $C=3$ В/м, $D=4$ м$^{-1}$, $x_0=1$ м, $y_0=2$ м.

Ответы: а) $-1{,}6\cdot10^{-11}$ Кл/м^3; б) $-7{,}4\cdot10^{-12}$ Кл/м^3

12. Связь $\vec{E}$ и φ

Оператором "набла" (1.2) можно действовать не только на векторы, но и на скалярные функции. Операция $\vec{\nabla} f = \mathrm{grad}\, f$ называется градиентом функции f. Используя формулу (1.2) получим:

$$\mathrm{grad}\, f = \vec{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (2.1)$$

Из (2.1) видно, что градиент функции f есть вектор, проекциями которого являются частные производные от этой функции по соответствующим координатам. **Вектор $\mathrm{grad}\, f$ направлен в сторону наибыстрейшего возрастания функции f.**

Рассмотрим пробную частицу с электрическим зарядом q_0, находящуюся в электростатическом поле с напряженностью $\vec{E}$ и обладающую потенциальной энергией W. Как известно, электростатическое поле потенциально, следовательно работа поля по перемещению частицы равна убыли потенциальной энергии:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dW \qquad (2.2)$$

Из (2.2) можно сделать выводы относительно проекций силы, действующей на частицу:

$$F_x = -\left.\frac{dW}{dx}\right|_{\substack{y=\mathrm{const}\\ z=\mathrm{const}}} = -\frac{\partial W}{\partial x}, \qquad (2.3)$$

$$F_y = -\left.\frac{dW}{dy}\right|_{\substack{x=\mathrm{const}\\ z=\mathrm{const}}} = -\frac{\partial W}{\partial y}, \qquad (2.4)$$

$$F_z = -\left.\frac{dW}{dz}\right|_{\substack{y=\mathrm{const}\\ x=\mathrm{const}}} = -\frac{\partial W}{\partial z}, \qquad (2.5)$$

Используя формулу (1.1) представим вектор силы в виде:

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial W}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial W}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial W}{\partial z}\right) = -\mathrm{grad}\, W \qquad (2.6)$$

Разделим уравнение (2.6) на q_0 и, учитывая, что $\dfrac{\vec{F}}{q_0} = \vec{E}$, а $\dfrac{W}{q_0} = \varphi$, получим связь между напряженностью электростатического поля $\vec{E}$ и электрическим потенциалом φ:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi. \qquad (2.7)$$

Эквипотенциальной поверхностью называется поверхность в силовом поле, в каждой точке которой одинаковый потенциал. Таким образом, если частица q_0 перемещается по эквипотенциальной поверхности, то ее потенциальная энергия не изменяется, и работа над частицей в этом случае не совершается. Из (2.2) следует, что сила, действующая на частицу перпендикулярна перемещению, а значит и эквипотенциальной поверхности.

Из (2.7) можно сделать вывод, что *напряженность $\vec{E}$ направлена в сторону наибыстрейшего убывания потенциала φ перпендикулярно эквипотенциальной поверхности.*

Используя формулу (2.1) можно рассчитать проекции вектора $\vec{E}$:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (2.8)$$

Модуль вектора $\vec{E}$ можно найти по формуле:

$$\left|\vec{E}\right| = E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} \qquad (2.9)$$

Задача 2:

Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону $\varphi = A\frac{x^{10}y^{10}}{b^{20}}$. Найти величину напряженности электрического поля в точке $P(x_0, y_0)$, если A = 2 В, $x_0 = 1$ м, $y_0 = 2$ м, b = 1 м.

Решение:

По формуле (2.8) рассчитаем проекции вектора напряженности $\vec{E}$:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{x^{10}y^{10}}{b^{20}}\right) = -A\frac{y^{10}}{b^{20}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{10}\right) = -10A\frac{y^{10}x^9}{b^{20}}, \qquad (2.10)$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(A\frac{x^{10}y^{10}}{b^{20}}\right) = -A\frac{x^{10}}{b^{20}}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{10}\right) = -10A\frac{x^{10}y^9}{b^{20}}, \qquad (2.11)$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial z} = 0. \qquad (2.12)$$

Подставляя в (2.10) и (2.11) значения координат $x = x_0,\ y = y_0$, получаем:

$E_x = -10\cdot 2\cdot\frac{2^{10}\cdot 1^9}{1^{20}} = -20480$ В/м, $E_y = -10\cdot 2\cdot\frac{1^{10}\cdot 2^9}{1^{20}} = -10240$ В/м

Результат подставляем в (2.9):

$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{(20480)^2 + (10240)^2 + 0} = 22897$ В/м

Ответ: E = 22,9 кВ/м

Задача 3:

Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону $\varphi = A\frac{x^{10}}{b^{10}} + B\frac{y^{15}}{b^{15}}$. Найти модуль напряженности электрического поля в точке $P(x_0, y_0)$, если A = 2 В, B = 3 В, $x_0 = 1$ м, $y_0 = 2$ м, b = 1 м.

Решение:

Аналогично задаче 1:

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{x^{10}}{b^{10}} + B\frac{y^{15}}{b^{15}}\right) = -\frac{A}{b^{10}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{10}\right) = -10A\frac{x^9}{b^{10}}, \qquad (2.13)$$

$$E_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(A\frac{x^{10}}{b^{10}} + B\frac{y^{15}}{b^{15}}\right) = -\frac{B}{b^{15}}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{15}\right) = -15B\frac{y^{14}}{b^{15}}, \qquad (2.14)$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial z} = 0. \qquad (2.15)$$

Подставляя в (2.13) и (2.14) значения координат $x = x_0,\ y = y_0$, получаем:

$E_x = -10 \cdot 2 \cdot \frac{1^9}{1^{10}} = -20$ В/м, $E_y = -15 \cdot 3 \cdot \frac{2^{14}}{1^{15}} = -737280$ В/м

Результат подставляем в (2.9):

$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{(20)^2 + (737280)^2 + 0} \approx 737280$ В/м

Ответ: E = 737 кВ/м

2.1 Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону а) $\varphi = A\frac{x^2 y^2}{b^4}$; б) $\varphi = A\frac{x^3 y^3}{b^6}$; в) $\varphi = A\frac{x^4 y^4}{b^8}$. Найти величину напряженности электрического поля в точке $P(x_0, y_0)$.

$A = 1$ В, $x_0 = 1$ м, $y_0 = 2$ м, b = 1 м.

Ответы: а) 8,9 В/м; б) 27 В/м; в) 72 В/м;

2.2 Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону а) $\varphi = A\frac{x^4}{b^4} + B\frac{y^4}{b^4}$; б) $\varphi = A\frac{x^3}{b^3} + B\frac{y^3}{b^3}$. Найти величину напряженности электрического поля в точке $P(x_0, y_0)$.

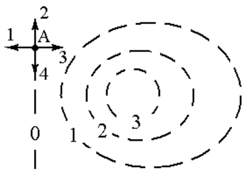
$A = 1$ В, $B = 2$ В, $x_0 = 1$ м, $y_0 = 2$ м, b = 1 м.

Ответы: а) 64 В/м; б) 24 В/м

2.3 Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону а) $\varphi = A\sin(Bx) + C\sin(Dy)$; б) $\varphi = A\sin(Bx) + C\cos(Dy)$;
в) $\varphi = A\cos(Bx) + C\sin(Dy)$; г) $\varphi = A\cos(Bx) + C\cos(Dy)$. Найти величину напряженности электрического поля в точке $P(x_0, y_0)$.

$A = 1$ В, $B = 2$ рад/м, $C = 3$ В, $D = 4$ рад/м, $x_0 = 1$ м, $y_0 = 2$ м.

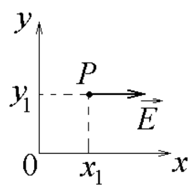
Ответы: а) 1,9 В/м; б) 12 В/м; в) 2,5 В/м; г) 12 В/м



2.4. На рисунке показаны эквипотенциальные линии системы зарядов и значения потенциала на них. Вектор напряженности электрического поля в точке А ориентирован в направлении...

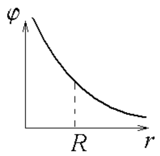
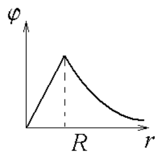
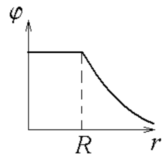
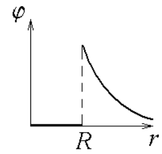
а) 1; б) 2; в) 3; г) 4;

2.5. В некоторой области пространства создано электростатическое поле, вектор напряженности которого в точке $P(x_1,y_1)$ направлен вдоль оси x. Какая зависимость потенциала электрического поля от координат $\varphi(x,y)$ может соответствовать такому направлению напряженности?

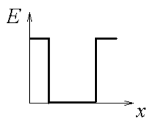
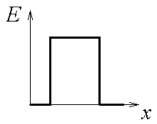
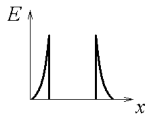
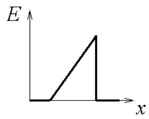


1) $\varphi = -2xy$ 2) $\varphi = 3y^2$ 3) $\varphi = -3x^2$ 4) $\varphi = 4x^4$

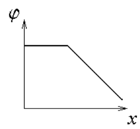
2.6. На металлический шар поместили положительный заряд Q. Зависимость потенциала электрического поля от расстояния до центра шара будет описываться графиком...

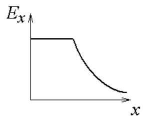
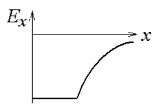
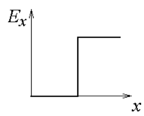
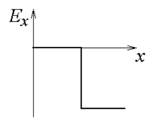
а)  б)  в)  г) 

2.7. Две бесконечные параллельные пластинки равномерно заряжены равными по величине и разноименными по знаку поверхностными плотностями заряда. Если ось X направить перпендикулярно пластинкам, то зависимость величины напряженности электрического поля в зависимости от *x* будет представлена графиком**...**

а)  б)  в)  г) 

2.8. Потенциал электрического поля зависит от координаты *x*, как показано на рисунке. Какой рисунок правильно отражает зависимость проекции напряженности электрического поля от координаты *x*?



а)  б)  в)  г) 

13. Расчет напряженности электрического поля, созданного дискретными зарядами.

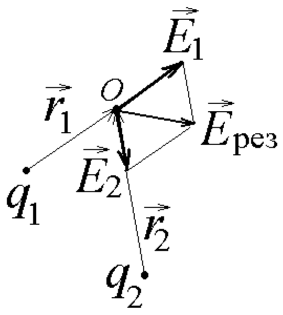


Рис. 1

Точечный заряд q создает вокруг себя электрическое поле с напряженностью

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\vec{e}_r, \qquad (3.1)$$

где $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$, r – расстояние от заряда до точки O, в которой исследуется поле, $\vec{e}_r$ – единичный вектор, направленный по радиус-вектору $\vec{r}$ от точечного заряда q до точки O.

Из (3.1) следует, что если заряд q положительный, то напряженность электрического поля $\vec{E}$ направлена от точки O в ту же сторону, что и вектор $\vec{e}_r$. В случае, если заряд q отрицательный, то вектор $\vec{E}$ направлен противоположно вектору $\vec{e}_r$.

Если в пространство поместить два (или несколько) точечных электрических заряда (см. рис.1), то они будут создавать в точке O электрическое поле, напряженность которого $\vec{E}_{рез}$ можно найти с помощью *принципа суперпозиции* полей, то есть векторно складывая напряженности полей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, создаваемые зарядами q_1 и q_2 в точке O независимо друг от друга (метод параллелограмма). Таким образом

$$\vec{E}_{рез} = \sum \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \qquad (3.2)$$

На рис.1 приведен пример с положительным зарядом q_1 и отрицательным зарядом q_2. В точке O заряд q_1 создает поле, модуль напряженности которого равен $E_1 = \frac{kq_1}{r_1^2}$. Аналогично, заряд q_2 в точке O создает поле, модуль напряженности которого равен $E_2 = \frac{kq_2}{r_2^2}$. Возводя левую и правую части формулы (3.2) в квадрат, получим выражение $E_{рез}^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$. Таким образом модуль напряженности результирующего поля равен:

$$E_{рез} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha} \qquad (3.3)$$

Если в пространстве находится три и более электрических заряда, то формулу (3.2) проще всего записать в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$E_{рез\,x} = E_{1x} + E_{2x} + E_{3x} + \ldots \quad , \qquad (3.4)$$

$$E_{рез\,y} = E_{1y} + E_{2y} + E_{3y} + \ldots, \qquad (3.5)$$

$$E_{рез\,z} = E_{1z} + E_{2z} + E_{3z} + \ldots . \qquad (3.6)$$

Используя теорему Пифагора и формулы (3.4) – (3.6), можно найти модуль напряженности результирующего поля:

$$E_{\text{рез}} = \sqrt{E^2_{\text{рез}\,x} + E^2_{\text{рез}\,y} + E^2_{\text{рез}\,z}} \qquad (3.7)$$

Задача 4.

Заряды q_1 = 1 мкКл и q_2 =2 мкКл находятся на серединах соседних сторон квадрата со стороной b = 1 м и создают электрическое поле с напряженностью $\vec{E}_{\text{рез}}$ в точке P, находящейся в вершине квадрата (см. рис. 2). Найти величину горизонтальной и вертикальной проекции вектора $\vec{E}_{\text{рез}}$, а также его модуль $\left|\vec{E}_{\text{рез}}\right|$

Решение:

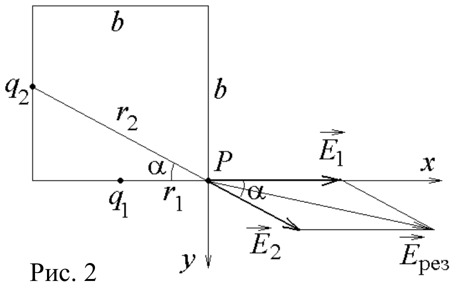


Рис. 2

Проведем оси x и y вдоль двух сторон квадрата, а начало отсчета поместим в точку P. Расстояния от зарядов q_1 и q_2 до точки P равны $r_1 = \frac{b}{2} = 0{,}5$ м,

$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2} = b\frac{\sqrt{5}}{2} = 0{,}5\cdot\sqrt{5} \text{ м.}$$

Можно найти косинус и синус угла α:

$$\cos\alpha = \frac{b}{r_2} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Воспользуемся формулами (3.4) и (3.5), а затем и (3.7):

$$E_{\text{рез}\,x} = E_1 + E_2\cos\alpha = \frac{kq_1}{r_1^2} + \frac{kq_2}{r_2^2}\cos\alpha = 9\cdot10^9\cdot\left(\frac{10^{-6}}{0{,}5^2} + \frac{2\cdot10^{-6}}{0{,}5^2\cdot5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 48{,}9 \text{ кВ/м}$$

$$E_{\text{рез}\,y} = E_2\sin\alpha = \frac{kq_2}{r_2^2}\sin\alpha = \frac{9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-6}}{0{,}5^2\cdot5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = 6{,}43 \text{ кВ/м}$$

$$E_{\text{рез}} = \sqrt{E^2_{\text{рез}\,x} + E^2_{\text{рез}\,y}} = \sqrt{48{,}9^2 + 6{,}43^2} = 49{,}3 \text{ кВ/м}$$

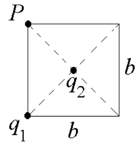
Модуль вектора $\left|\vec{E}_{\text{рез}}\right|$ можно найти с помощью формулы (3.3), не находя его проекции:

$$E_{\text{рез}} = \sqrt{\left(\frac{kq_1}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{kq_2}{r_2^2}\right)^2 + 2\frac{kq_1}{r_1^2}\frac{kq_2}{r_2^2}\cos\alpha} =$$

$$= 9\cdot10^9\cdot10^{-6}\sqrt{\left(\frac{1}{0{,}5^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{0{,}5^2\cdot5}\right)^2 + 2\frac{1}{0{,}5^2}\frac{2}{0{,}5^2\cdot5}\frac{2}{\sqrt{5}}} = 49{,}3 \text{ кВ/м}$$

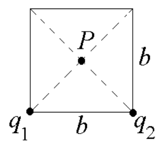
Ответ: $E_{\text{рез}\,x} = 48{,}9$ кВ/м; $E_{\text{рез}\,y} =$ 6,43 кВ/м; $\left|\vec{E}_{\text{рез}}\right| = 49{,}3$

3.1 Заряд q_1 находится в вершине квадрата со стороной b, а заряд q_2 – в центре. Найти модуль напряженности электрического поля в точке Р, находящейся в другой вершине этого квадрата (см. рис.). $q_1 = 1$ мкКл, $q_2 = 2$ мкКл, $b = 1$ м.



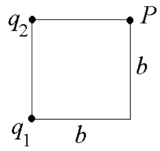
Ответ: 43 кВ/м

3.2 Заряды q_1 и q_2 находятся в соседних вершинах квадрата со стороной b. Найти модуль напряженности электрического поля в точке Р, находящейся в центре квадрата (см. рис.). $q_1 = 1$ мкКл, $q_2 = 2$ мкКл, $b = 1$ м.



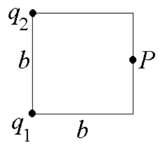
Ответ: 40 кВ/м

3.3 Заряды q_1 и q_2 находятся в соседних вершинах квадрата со стороной b. Найти величину горизонтальной проекции напряженности электрического поля в точке Р, находящейся в третьей вершине квадрата (см. рис.). $q_1 = 1$ мкКл, $q_2 = 2$ мкКл, $b = 1$ м.



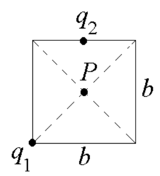
Ответ: 21 кВ/м

3.4 Заряды q_1 и q_2 находятся в соседних вершинах квадрата со стороной b. Найти величину горизонтальной проекции напряженности электрического поля в точке Р, находящейся на середине противоположной стороны квадрата (см. рис.).
$q_1 = 1$ мкКл, $q_2 = 2$ мкКл, $b = 1$ м.



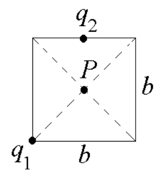
Ответ: 19 кВ/м

3.5 Заряд q_1 находится в вершине квадрата со стороной b, а заряд q_2 – на середине стороны. Найти модуль напряженности электрического поля в точке Р, находящейся в центре квадрата (см. рис.).
$q_1 = 1$ мкКл, $q_2 = 2$ мкКл, $b = 1$ м.

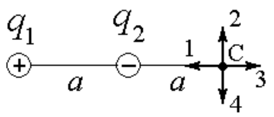


Ответ: 61 кВ/м

3.6 Заряд q_1 находится в вершине квадрата со стороной b, а заряд q_2 – на середине стороны. Найти величину вертикальной проекции напряженности электрического поля в точке Р, находящейся в центре квадрата (см. рис.). $q_1 = 1$ мкКл, $q_2 = 2$ мкКл, $b = 1$ м.

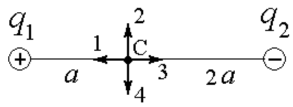


Ответ: 59 кВ/м



3.7. Электрическое поле создано точечными зарядами q_1 и q_2. Если $q_1 = +q$, $q_2 = -q$, а расстояние между зарядами и от q_2 до точки С равно a, то вектор напряженности поля в точке С ориентирован в направлении ...

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) равен 0



3.8. Электрическое поле создано точечными зарядами q_1 и q_2. Если $q_1 = +q$, $q_2 = -q$, точка С находится на расстоянии a от заряда q_1 и на расстоянии $2a$ от q_2, то вектор напряженности поля в точке С ориентирован в направлении ...

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) равен 0

14. Расчет потенциала электрического поля, созданного дискретными зарядами.

Электростатическое поле точечного заряда характеризуется не только вектором напряженности $\vec{E}$ (см. (3.1)), но и потенциалом φ:

$$\varphi = \frac{kq}{r}. \qquad (4.1)$$

Из (4.1) видно, что потенциал – это скалярная величина, которая может быть как положительная, так и отрицательная в зависимости от знака заряда.

Используя *принцип суперпозиции* полей, можно найти потенциал результирующего электрического поля в заданной точке O как алгебраическую сумму потенциалов полей, созданных каждым зарядом независимо друг от друга (см. рис. 1):

$$\varphi_{\text{рез}} = \sum \varphi_i = \varphi_1 + \varphi_2 + ... = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} + ... \qquad (4.2)$$

Задача 5.

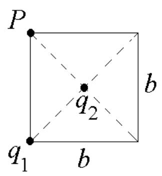
Используя условие задачи 4, найти потенциал φ электрического поля в точке P.

Решение:

Подставим данные из задачи 4 в формулу (4.2):

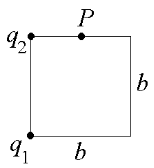
$$\varphi_{\text{рез}} = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{10^{-6}}{0,5} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0,5 \cdot \sqrt{5}} \right) = 34,1 \text{ кВ}$$

Ответ: $\varphi_{\text{рез}}$ = 34,1 кВ



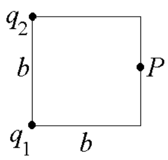
4.1 Заряд q_1 находится в вершине квадрата со стороной b, а заряд q_2 – в центре. Найти потенциал электрического поля в точке Р, находящейся в другой вершине этого квадрата (см. рис.).
$q_1 = 1$ мкКл, $q_2 = 2$ мкКл, $b = 1$ м.

Ответ: 34,5 кВ



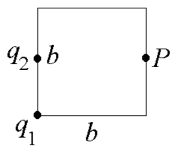
4.2 Заряды q_1 и q_2 находятся в соседних вершинах квадрата со стороной b. Найти потенциал электрического поля в точке Р, делящей сторону квадрата на два равных отрезка (см. рис.).
$q_1 = 1$ мкКл, $q_2 = 2$ мкКл, $b = 1$ м.

Ответ: 44 кВ



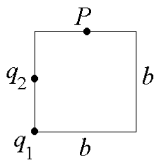
4.3 Заряды q_1 и q_2 находятся в соседних вершинах квадрата со стороной b. Найти потенциал электрического поля в точке Р, находящейся на середине противоположной стороны квадрата (см. рис.).
$q_1 = 1$ мкКл, $q_2 = 2$ мкКл, $b = 1$ м.

Ответ: 24 кВ



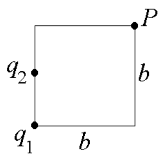
4.4 Заряд q_1 находится в вершине квадрата со стороной b, а заряд q_2 – на середине стороны. Найти потенциал электрического поля в точке Р, находящейся на середине противоположной стороны квадрата (см. рис.). $q_1 = 1$ мкКл, $q_2 = 2$ мкКл, $b = 1$ м.

Ответ: 26 кВ



4.5 Заряд q_1 находится в вершине квадрата со стороной b, а заряд q_2 – на середине стороны. Найти потенциал электрического поля в точке Р, находящейся на середине стороны квадрата (см. рис.).
$q_1 = 1$ мкКл, $q_2 = 2$ мкКл, $b = 1$ м.

Ответ: 34 кВ



4.6 Заряд q_1 находится в вершине квадрата со стороной b, а заряд q_2 – на середине стороны. Найти потенциал электрического поля в точке Р, находящейся в противоположной вершине квадрата (см. рис.).
$q_1 = 1$ мкКл, $q_2 = 2$ мкКл, $b = 1$ м.

Ответ: 22 кВ

15. Расчет потенциала электрического поля, созданного распределенным зарядом.

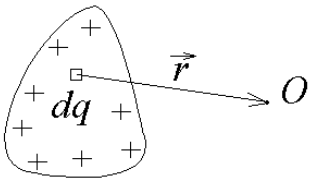


Рис.3

Электрическое поле часто создается не дискретными зарядами, а распределенными в пространстве с плотностью $\rho = dq/dV$. Тогда необходимо разбить заряженную область на малые элементы с объемом dV и зарядом $dq = \rho dV$ (см. рис.3). При расчете потенциала в некоторой точке пространства O принцип суперпозиции (4.2) для бесконечного числа таких элементов будет выглядеть следующим образом:

$$\varphi = \int d\varphi = \int \frac{kdq}{r} = \int_V \frac{k\rho dV}{r} \qquad (5.1)$$

– где r – расстояние от малого элемента с зарядом dq до точки O.

Часто заряд распределяется вдоль тонкой линии, тогда заряд малого элемента длины dl лучше выражать через линейную плотность заряда $dq = \rho dl$, и уравнение (5.1) преобразуется в

$$\varphi = \int_L \frac{k\rho dl}{r} \qquad (5.2)$$

Задача 6.

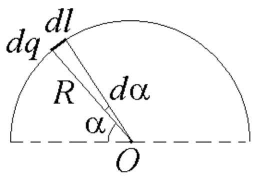


Рис. 4

Положительный заряд распределен по тонкому полукольцу радиуса R = 1 м с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2$, где 0<α < π,

ρ_0 = 1 мкКл/м. Определить потенциал, создаваемый этим зарядом в центре полукольца.

Решение:

Выделим элемент $dl = Rd\alpha$ на полуокружности и, учитывая, что расстояние от элемента до точки O равно $r = R$, по формуле (5.2) рассчитаем потенциал в точке O:

$$\varphi = \int_L \frac{k\rho dl}{r} = \frac{k\rho_0}{R} \int_0^{\pi} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 Rd\alpha = \frac{k\rho_0}{\pi^2} \frac{\alpha^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{k\rho_0 \pi}{3} = \frac{9 \cdot 10^9 . 10^{-6} \cdot 3{,}14}{3} = 9{,}42 \text{ кВ}$$

Ответ: 9,42 кВ

Задача 7

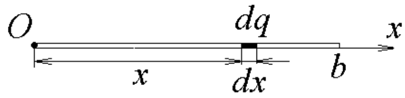


Рис.5

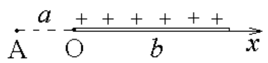
Тонкий стержень заряжен неравномерно. Электрический заряд распределен по нему с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \left(\frac{x}{b}\right)^2$, где x – координата точки на стержне, b = 1 м – длина стержня, ρ_0 = 1 мкКл/м. Чему равна величина потенциала, создаваемого этим зарядом в начале координат O, совпадающем с концом стержня?

Решение:

Выделим элементарный заряд dq на стержне длиной dx на расстоянии x от начала координат O (см. рис.5). Учитывая, что $r = x$, а
$dq = \rho dx$, найдем по формуле (5.2) потенциал в точке O:

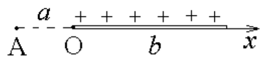
$$\int_L \frac{k\rho dl}{r} = \int_0^b \frac{k\rho_0 \left(\frac{x}{b}\right)^2 dx}{x} = \frac{k\rho_0}{b^2}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^b = \frac{k\rho_0}{2} = \frac{9\cdot 10^9\cdot 10^{-6}}{2} = 4{,}5 \text{ кВ}$$

Ответ: 4,5 кВ



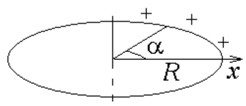
5.1 Вдоль стержня длины b равномерно распределен заряд q. Найти потенциал в точке A на продолжении стержня на расстоянии a от его конца (см. рис.). $b = 1$ м, $a = 1$ м, $q = 1$ мкКл.

Ответ: 6,2 кВ



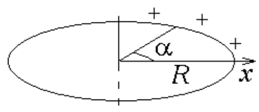
5.2 Вдоль стержня длины b равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\rho = const$. Найти потенциал в точке A на продолжении стержня на расстоянии a от его конца (см. рис.).
$b = 1$ м, $a = 1$ м, $\rho = 1$ мкКл/м.

Ответ: 6,2 кВ



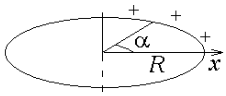
5.3 Положительный заряд распределен по тонкому кольцу радиуса R с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \sin^2\alpha,\ \ 0 \le \alpha \le 2\pi$. Определить потенциал, создаваемый этим зарядом в центре кольца.
R = 1 м, $\rho_0 = 1$ мкКл/м.

Ответ: 28 кВ



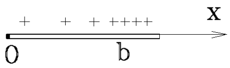
5.4. Положительный заряд распределен по тонкому кольцу радиуса R с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right),\ \ 0 \le \alpha \le 2\pi$. Определить потенциал, создаваемый этим зарядом в центре кольца.
R = 1 м, $\rho_0 = 1$ мкКл/м.

Ответ: 57 кВ



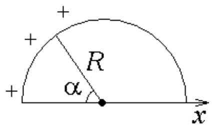
5.5 Положительный заряд распределен по тонкому кольцу радиуса R с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2$, $0 \le \alpha \le 2\pi$. Определить потенциал, создаваемый этим зарядом в центре кольца.
R = 1 м, $\rho_0 = 1$ мкКл/м.

Ответ: 75 кВ



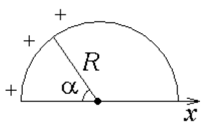
5.6 Тонкий стержень заряжен неравномерно. Электрический заряд распределен по нему с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \left(\frac{x}{b}\right)$, $0 \le x \le b$, где x - координата точки на стержне, b - длина стержня. Чему равна величина потенциала, создаваемого этим зарядом в начале координат О, совпадающем с концом стержня? $b = 1$ м, $\rho_0 = 1$ мкКл/м.

Ответ: 9 кВ



5.7 Положительный заряд распределен по тонкому полукольцу радиуса R с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \sin^2 \alpha$, $0 \le \alpha \le \pi$. Определить потенциал, создаваемый этим зарядом в центре полукольца.
$R = 1$ м, $\rho_0 = 1$ мкКл/м.

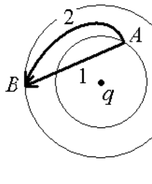
Ответ: 14 кВ



5.8 Положительный заряд распределен по тонкому полукольцу радиуса R с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)$, $0 \le \alpha \le \pi$. Определить потенциал, создаваемый этим зарядом в центре полукольца.
R = 1 м, $\rho_0 = 1$ мкКл/м.

Ответ: 14 кВ

5.9. Электрон перемещается в кулоновском поле заряженной частицы из точки А в точку В в одном случае по траектории 1, в другом случае по траектории 2. Как соотносятся величины работ, совершаемых электрическим полем над электроном, в этих двух случаях?



а) $A_1 > A_2$; б) $A_1 < A_2$; в) $A_1 = A_2 = 0$; г) $A_1 = A_2 \ne 0$

16. Расчет напряженности электрического поля, созданного распределенным зарядом.

Применение принципа суперпозиции (3.2) для нахождения напряженности электрического поля $\vec{E}$ в векторной форме вызывает большие трудности из-за бесконечного числа элементарных зарядов dq, распределенных в пространстве. В этом случае необходимо воспользоваться не векторным сложением вкладов полей $d\vec{E}$, а сложением их проекций:

$$E_x = \int dE_x\,, \quad E_y = \int dE_y \qquad (6.1)$$

Задача 8

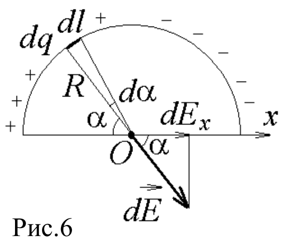


Рис.6

Заряд распределен по тонкому полукольцу радиуса R = 1 м с линейной плотностью

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 \sin^3\alpha, & 0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \\ \rho = -\rho_0 \sin^3\alpha, & \dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi \end{cases}.$$

Определить проекцию на ось x напряженности электрического поля, создаваемого этим зарядом в центре полукольца, если $\rho_0 = 1$ мкКл/м.

Решение:

Как видно из рис.6, проекция на ось x напряженности электрического поля, созданного элементарным зарядом $dq = \rho dl$ в точке O равна:

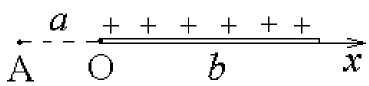
$$dE_x = dE \cdot \cos\alpha \qquad (6.3)$$

Учитывая, что $dl = Rd\alpha$, а $\cos\alpha d\alpha = d(\sin\alpha)$, получим

$$E_x = \int \frac{k\rho dl}{r^2}\cos\alpha = \int_0^{\pi/2} \frac{k\rho_0 \sin^3\alpha}{R^2}\cos\alpha R d\alpha - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{k\rho_0 \sin^3\alpha}{R^2}\cos\alpha R d\alpha =$$

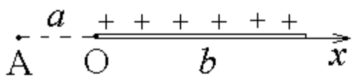
$$= \frac{k\rho_0}{R}\left(\left.\frac{\sin^4\alpha}{4}\right|_0^{\pi/2} - \left.\frac{\sin^4\alpha}{4}\right|_{\pi/2}^{\pi} \right) = \frac{k\rho_0}{4R}\big(1-(-1)\big) = \frac{k\rho_0}{2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 10^{-6}}{2} = 4500\,\text{В/м}$$

Ответ: 4,5 кВ/м



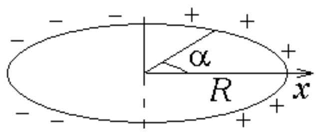
6.1 Вдоль стержня длины b равномерно распределен заряд q. Найти величину напряженности электрического поля в точке A на продолжении стержня на расстоянии a от его конца (см. рис.). $b = 1$ м, $a = 1$ м, $q = 1$ мкКл.

Ответ: 4,5 кВ/м



6.2 Вдоль стержня длины b равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\rho = const$. Найти величину напряженности электрического поля в точке A на продолжении стержня на расстоянии a от его конца (см. рис.).
$b = 1$ м, $a = 1$ м, $\rho = 1$ мкКл/м.

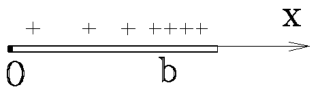
Ответ: 4,5 кВ/м



6.3 Заряд распределен по тонкому кольцу радиуса R с линейной плотностью $\begin{cases} \rho = \rho_0 \sin^2\alpha, & -\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \\ \rho = -\rho_0 \sin^2\alpha, & \dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$.

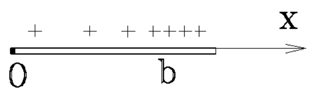
Определить величину проекции на ось x напряженности электрического поля, создаваемого этим зарядом в центре кольца, если R = 1 м, $\rho_0 = 1$ мкКл/м.

Ответ: 12 кВ/м



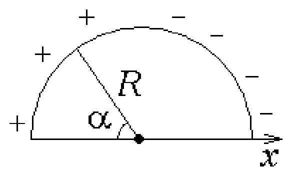
6.4 Тонкий стержень заряжен неравномерно. Электрический заряд распределен по нему с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \left(\dfrac{x}{b}\right)^2$, $0 \le x \le b$, где x - координата точки на стержне, b - длина стержня. Чему равна величина напряженности электрического поля, создаваемого этим зарядом в начале координат О, совпадающем с концом стержня? $b = 1$ м, $\rho_0 = 1$ мкКл/м.

Ответ: 9,0 кВ/м



6.5 Тонкий стержень заряжен неравномерно. Электрический заряд распределен по нему с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \left(\dfrac{x}{b}\right)^3$, $0 \le x \le b$, где x - координата точки на стержне, b - длина стержня. Чему равна величина напряженности электрического поля, создаваемого этим зарядом в начале координат О, совпадающем с концом стержня? $b = 1$ м, $\rho_0 = 1$ мкКл/м.

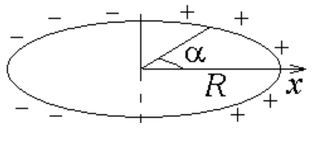
Ответ: 4,5 кВ/м



6.6 Заряд распределен по тонкому полукольцу радиуса R с линейной плотностью $\begin{cases} \rho = \rho_0 \cos^2\alpha, & 0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \\ \rho = -\rho_0 \cos^2\alpha, & \dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi \end{cases}$.

Определить проекцию на ось x напряженности электрического поля, создаваемого этим зарядом в центре полукольца, если R = 1 м, $\rho_0 = 1$ мкКл/м.

Ответ: 12 кВ/м



6.7 Заряд распределен по тонкому кольцу радиуса R с линейной плотностью

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 \sin^4\alpha, & -\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \\ \rho = -\rho_0 \sin^4\alpha, & \dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}.$$

Определить величину проекции на ось x напряженности электрического поля, создаваемого этим зарядом в центре кольца, если
R = 1 м, $\rho_0 = 1$ мкКл/м.

Ответ: 7,2 кВ/м

17. Закон Джоуля - Ленца

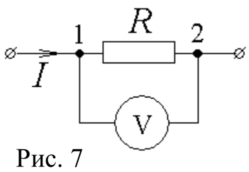


Рис. 7

При перемещении электрического заряда q из точки 1 в точку 2 электрическое поле совершает работу

$$A = q\Delta\varphi\,, \qquad (7.1)$$

где $\Delta\varphi$ – разность потенциалов или напряжение $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi$.

Как известно, сила тока определяется, как *заряд, протекающий через поперечное сечение провода за единицу времени*, т.е.

$$I = \frac{dq}{dt}\,. \qquad (7.2)$$

Если известна зависимость силы тока $I(t)$, то из (7.2) можно выразить заряд, протекающий за малый промежуток времени:

$$dq = Idt\,, \qquad (7.3)$$

и преобразовать формулу (7.1) следующим образом:

$$dA = dqU = IdtU = IUdt = Pdt\,, \qquad (7.4)$$

где $P = IU$ – электрическая мощность.

Используя закон Ома для однородного участка цепи $U = IR$, и подставляя его в (7.4), получим закон Джоуля-Ленца:

$$dQ = dA = I^2Rdt \qquad (7.5)$$

В формуле (7.5) учтено то обстоятельство, что работа электрического поля, совершенная над электрическими зарядами, не приводит к увеличению их кинетической энергии, а выделяется в виде тепла dQ.

Таким образом, из (7.5) можно рассчитать тепло, выделившееся в сопротивлении R за любой промежуток времени:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I^2Rdt \qquad (7.6)$$

Задача 9.

По проводу сопротивлением R_1 = 20 Ом течет переменный электрический ток. Сила тока изменяется по закону $I = A(t/\tau)^{10}$,

где A = 3 А, τ = 1 с. Чему равно количество теплоты, выделившейся в проводе за промежуток времени от $t_0 = 0$ до t_1 = 2 с?

Решение:

Подставим функцию силы тока от времени в формулу (7.6):

$$Q = \int_0^{t_1} A^2\left(\frac{t}{\tau}\right)^{20} R_1dt = \left.\frac{A^2R_1t^{21}}{21\cdot\tau^{20}}\right|_0^{t_1=2\text{ с}} = \frac{A^2R_1t_1^{21}}{21\cdot\tau^{20}} = \frac{3^2\cdot 20\cdot 2^{21}}{21\cdot 1^{20}} = 17975589 \text{ Дж}$$

Ответ: Q = 18 МДж

Задача 10.

По проводу сопротивлением R_1 = 20 Ом течет переменный электрический ток. Сила тока изменяется по закону $I = A\sin\omega t$,
где A = 3 А/с, $\omega = \frac{\pi}{2}$ рад/с. Чему равно количество теплоты, выделившейся в проводе за промежуток времени от $t_0 = 0$ до t_1 = 2 с?

Решение:

Подставим функцию силы тока от времени в формулу (7.6):

$$Q = \int_0^{t_1} A^2 \sin^2 \omega t \cdot R_1 dt = A^2 R_1 \int_0^{t_1} \frac{1-\cos 2\omega t}{2} dt = \frac{A^2 R_1}{2}\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)\Bigg|_0^{t_1} =$$

$$= \frac{3^2 \cdot 20}{2}\left(2 - \frac{\sin 2\pi}{\pi}\right) = 180 \text{ Дж}$$

Ответ: Q = 180 Дж

7.1 По проводу сопротивлением R_1 течет переменный электрический ток. Сила тока изменяется по закону

а) $I = A\frac{t}{\tau}$; б) $I = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$; в) $I = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$; г) $I = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$;

д) $I = A\sqrt{\left(\frac{t}{\tau}\right)^3}$; е) $I = A\sqrt{\left(\frac{t}{\tau}\right)^5}$; ж) $I = A\sqrt{\left(\frac{t}{\tau}\right)^{19}}$.

$A = 1$ А, $R_1 = 1$ Ом, $t_1 = 1$ с, τ = 1 с.

Чему равно количество теплоты, выделившейся в проводе за время t_1?

Ответы: а) 0,33 Дж; б) 0,20 Дж; в) 0,14 Дж; г) 0,11 Дж;
д) 250 мДж; е) 167 мДж; ж) 50 мДж;

7.2 По проводу сопротивлением R_1 течет переменный электрический ток. Сила тока изменяется по закону

а) $I = A\sin\omega t$; б) $I = A\cos\omega t$.

Чему равно количество теплоты, выделившейся в проводе за время t_1?

$A = 1$ А, $R_1 = 1$ Ом, $\omega = \frac{\pi}{2}$ рад/с, $t_1 = 1$ с

Ответы: а) 500 мДж; б) 500 мДж

7.3 По проводу сопротивлением R_1 течет переменный электрический ток. Сила тока изменяется по закону $I = A\exp(-Bt)$. Чему равно количество теплоты, выделившейся в проводе за время t_1?

$A = 1$ А, $R_1 = 1$ Ом, $B = 1$ с$^{-1}$, $t_1 = 1$ с. Ответ: 432 мДж

7.4. Напряженность электрического поля в проводнике увеличили в 2 раза. Как изменилась удельная тепловая мощность (тепло, выделяющееся за единицу времени в единице объема)?

а) увеличилась в 2 раза; <u>б) увеличилась в 4 раза</u>;
в) увеличилась в 8 раз; г) уменьшилась в 2 раза.

18. Заряд, прошедший через поперечное сечение проводника

Используя формулу (7.3), можно найти количество электричества, т.е. электрический заряд, прошедший через поперечное сечение провода за любой промежуток времени

$$\Delta q = \int_{t_0}^{t_1} I dt \qquad (8.1)$$

Задача 11.

Используя условие задачи 9, найти полный заряд, прошедший через поперечное сечение провода за промежуток времени от $t_0 = 0$ до $t_1 = 2$ с.

Решение:

Используем формулу (8.1):

$$\Delta q = \int_0^{t_1} A\left(\frac{t}{\tau}\right)^{10} dt = A\frac{t^{11}}{11\cdot\tau^{10}}\Bigg|_0^{t_1} = 3\cdot\frac{2^{11}}{11\cdot 1^{10}} = 559 \text{ Кл.}$$

Ответ: $\Delta q = 559$ Кл

Задача 12

Используя условие задачи 10, найти полный заряд, прошедший через поперечное сечение провода за промежуток времени от $t_0 = 0$ до $t_1 = 2$ с.

Решение:

Используем формулу (8.1):

$$\Delta q = \int_0^{t_1} A\sin\omega t\, dt = -A\frac{\cos\omega t}{\omega}\Bigg|_0^{t_1} = -3\left(\frac{\cos\pi - \cos 0}{\pi/2}\right) = \frac{12}{\pi} = 3{,}82 \text{ Кл.}$$

Ответ: $\Delta q = 3{,}82$ Кл

8.1 По проводу сопротивлением R_1 течет переменный электрический ток. Сила тока изменяется по закону

а) $I = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + B\frac{t}{\tau}$; б) $I = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + B\frac{t}{\tau}$;

в) $I = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$ г) $I = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^5 + B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$.

Чему равен заряд, прошедший через поперечное сечение провода за время t_1?

$A = 1$ А, $B = 1$ А, $R_1 = 1$ Ом, $t_1 = \tau = 1$ с

Ответы: а) 833 мКл б) 750 мКл; в) 583 мКл; г) 367 мКл

8.2 По проводу сопротивлением R_1 течет переменный электрический ток. Сила тока изменяется по закону

а) $I = A\sin\omega t$;б) $I = A\cos\omega t$.

Чему равен заряд, прошедший через поперечное сечение провода за время t_1?

$A = 1$ А, $\omega = \frac{\pi}{3}$ рад/с, $R_1 = 1$ Ом, $t_1 = 1$ с

Ответы: а) 477 мКл; б) 0,83 Кл

8.3 По проводу сопротивлением R_1 течет переменный электрический ток. Сила тока изменяется по закону
а) $I = A\sin^2 \omega t$; б) $I = A\cos^2 \omega t$. Чему равен заряд, прошедший через поперечное сечение провода за время t_1?

$A=1$ А, $\omega = \frac{\pi}{2}$ рад/с, $R_1 = 1$ Ом, $t_1 = 1$ с

Ответы: а) 500 мКл; б) 0,50 Кл

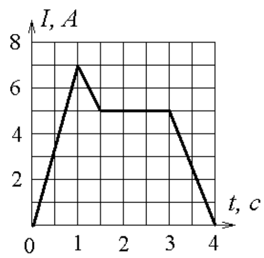
8.4 По проводу сопротивлением R_1 течет переменный электрический ток. Сила тока изменяется по закону $I = A\exp(-Bt)$. Чему равен заряд, прошедший через поперечное сечение провода за время t_1?
$A=1$ А, $B=1$ с$^{-1}$, $R_1 = 1$ Ом, $t_1 = 1$ с

Ответ: 632 мКл

8.5. Сила тока, текущего по проводнику, меняется во времени, как показано на рисунке. Какой заряд протечет сквозь поперечное сечение проводника в промежуток времени

от t_1 = 1 с до t_2 = 3 с?

а) 7 Кл; б) 12 Кл; <u>в) 10,5 Кл</u>; г) 1,5 Кл.



19. Правила Кирхгофа

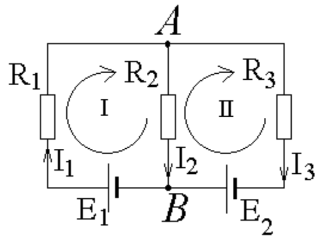


Рис.8

Электрическая схема всегда содержит множество элементов, таких как резисторы, конденсаторы, источники тока, катушки индуктивности. Эти элементы связаны соединительными проводами. В сложной схеме всегда есть *узлы* и *контуры*.

Узлы – это точки, в которой соединяются три и более проводов. На рис.8 узлами будут точки *A* и *B*.

Контур – это замкнутая линия, проведенная вдоль соединительных проводов так, что нигде не пересекает саму себя. На рис.8 изображены два контура I и II. Обход вдоль этих контуров здесь выбран по часовой стрелке (в общем случае можно выбрать произвольно).

Обычно известны характеристики всех элементов, входящих в схему, т.е. сопротивления резисторов, Э.Д.С. источников тока и т.д. Рассчитать схему – значит найти все токи, текущие по разным цепям. В этом могут помочь правила Кирхгофа.

1-е правило Кирхгофа: $\sum I_i = 0$. (9.1)

Алгебраическая сумма всех сил токов, сходящихся в узле равна 0.

Токи, втекающие в узел берутся со знаком "–", а токи вытекающие из узла – со знаком "+". Таким образом для узла *B* на рис.8 можно записать

$$I_2 + I_3 - I_1 = 0. \qquad (9.2)$$

2-е правило Кирхгофа: $\sum I_i R_i = \sum E_i$, (9.3)

– алгебраическая сумма падений напряжений на каждом элементе контура равна алгебраической сумме э.д.с. в этом контуре.

Падение напряжения на сопротивлении считается положительным, если направление тока через это сопротивление совпадает с направлением обхода контура, выбранного произвольно.

Э.Д.С. считается положительной, если при обходе контура осуществляется переход через источник от "–" (меньший отрезок) к "+" (больший отрезок). Запишем формулу (9.3) для двух контуров:

Контур I: $I_1 R_1 + I_2 R_2 = +E_1$ (9.4)

Контур II: $I_3 R_3 - I_2 R_2 = +E_2$ (9.5)

Таким образом, чтобы рассчитать схему, т.е. найти токи I_1, I_2 и I_3, надо решить систему уравнений (9.2), (9.4), (9.5).

Если известны некоторые токи, то расчет схемы упрощается, и можно иногда обойтись решением всего одного уравнения.

Задача 13.

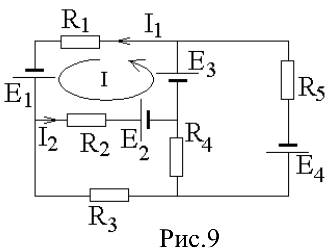


Рис.9

Найти Э.Д.С. E_1, если
$R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 3$ Ом,
$E_2 = 1$ В, $E_3 = 4$ В,
$I_1 = 3$ А, $I_2 = 2$ А.
Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

Решение:

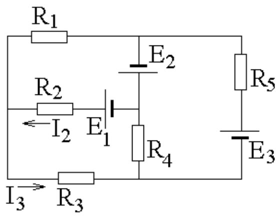
Запишем формулу (9.3) для контура I (см. рис.9).

$$I_1R_1 + I_2R_2 = E_3 + E_1 - E_2 \qquad (9.6)$$

Из (9.6) выразим E_1:

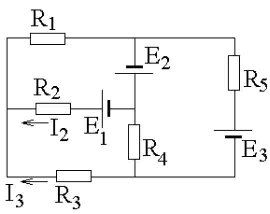
$E_1 = I_1R_1 + I_2R_2 - E_3 + E_2$ =3·4 + 2·6 – 4 + 1 = 21 В

Ответ: E_1 = 21 В



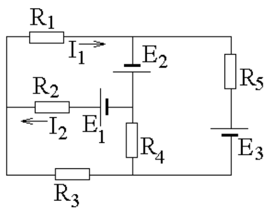
9.1 Найти величину силы тока I_4, протекающего через сопротивление R_4.
$R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $E_1 = 1$ В, $E_2 = 2$ В, $I_2 = 1$ А, $I_3 = 2$ А.
Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

Ответ: 1,8 А



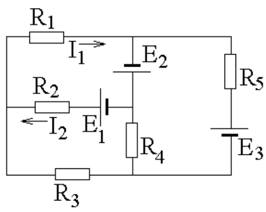
9.2 Найти величину силы тока I_4, протекающего через сопротивление R_4.
$R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $E_1 = 1$ В, $E_2 = 2$ В, $I_2 = 1$ А, $I_3 = 2$ А.
Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

Ответ: 1,3 А



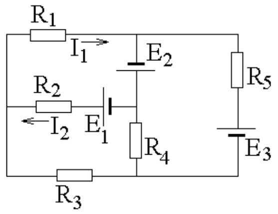
9.3 Найти Э.Д.С. источника E_2.
$R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом,
$E_1 = 1$ В, $I_1 = 1$ А, $I_2 = 2$ А.
Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

Ответ: 4 В



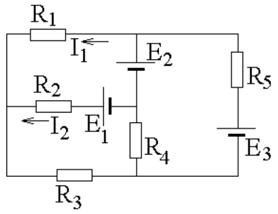
9.4 Найти сопротивление R_1.
$R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $E_1 = 1$ В,
$E_2 = 3$ В, $I_1 = 2$ А, $I_2 = 1$ А.
Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

Ответ: 1,0 Ом



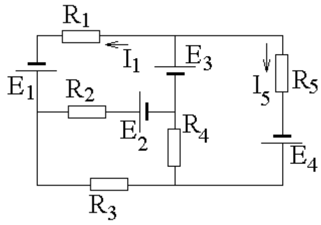
9.5 Найти сопротивление R_2.
$R_1 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $R_5 = 5$ Ом,
$E_1 = 1$ В, $E_2 = 4$ В, $I_1 = 2$ А, $I_2 = 3$ А.
Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

Ответ: 0,33 Ом



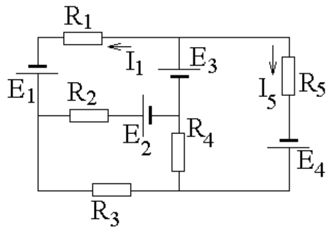
9.6 Найти сопротивление R_2.
$R_1 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_5 = 5$ Ом, $E_1 = 1$ В,
$E_2 = 3$ В, $E_3 = 4$ В, $I_1 = 2$ А, $I_2 = 3$ А.
Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

Ответ: 0,67 Ом



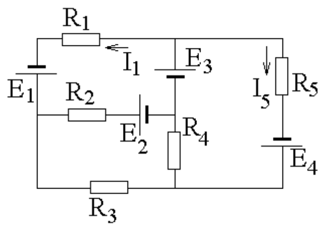
9.7 Найти величину силы тока, протекающего через сопротивление R_2.
$R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $E_1 = 1$ В,
$E_2 = 4$ В, $E_3 = 4$ В, $I_1 = 3$ А, $I_5 = 2$ А.
Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

Ответ: 1,8 А



9.8 Найти величину силы тока, протекающего через сопротивление R_4.
$R_4 = 5$ Ом, $R_5 = 4$ Ом, $E_2 = 4$ В, $E_3 = 4$ В, $E_4 = 1$ В, $I_1 = 3$ А, $I_5 = 2$ А.
Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

Ответ: 0,6 А



9.9 Найти величину силы тока, протекающего через сопротивление R_3.
$R_1 = 6$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_5 = 4$ Ом, $E_1 = 4$ В, $E_4 = 1$ В, $I_1 = 3$ А,
$I_5 = 2$ А.
Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

Ответ: 2,3 А

20. Расчет потока вектора напряженности и индукции электрического поля

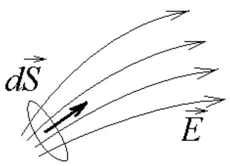


Рис.10

Электрическое поле можно изобразить графически, нарисовав силовые линии. *Силовая линия* – это линия в силовом поле, в каждой точке которой напряженность электрического поля $\vec{E}$ направлена по касательной. Следовательно, если поместить покоящуюся заряженную частицу в электрическое поле, то она начнет двигаться вдоль силовой линии.

Модуль напряженности $\vec{E}$ на графическом изображении поля можно определить, как *густоту силовых линий,* т.е число линий, пересекающих единичную поперечную площадку:

$$E = \frac{dN}{dS_{\perp}}. \qquad (10.1)$$

Тогда число силовых линий, пересекающих площадку можно найти следующим образом:

$$dN = E \cdot dS_{\perp} = \vec{E} \cdot d\vec{S} = d\Phi_E, \qquad (10.2)$$

где вектор $d\vec{S}$ по модулю равен площади dS и направлен по нормали к этой площадке. Величина $d\Phi_E$ в формуле (10.2) называется потоком вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ через площадку $d\vec{S}$. Чтобы рассчитать поток через большую площадь *S* любой формы надо проинтегрировать формулу (10.2):

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{S} \qquad (10.3)$$

Воспользуемся теоремой Остроградского для вектора напряженности электрического поля:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \oint_S \vec{E} d\vec{S} \qquad (10.4)$$

Подставим теорему Гаусса (1.5) в (10.4) и получим теорему Остроградского-Гаусса в интегральном виде:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum q_i \qquad (10.5)$$

Таким образом, $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon\varepsilon_0}$ – поток вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ сквозь замкнутую поверхность, равен сумме всех зарядов внутри этой поверхности, деленной на произведение $\varepsilon\varepsilon_0$, где ε – диэлектрическая проницаемость среды ($\varepsilon = 1$ для вакуума или воздуха), $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная.

В изотропном пространстве вектор электрической индукции $\vec{D}$ связан с вектором $\vec{E}$ материальным уравнением:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}. \qquad (10.6)$$

Подставляя (10.6) в (10.5), можно получить теорему Остроградского-Гаусса для вектора $\vec{D}$:

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV = \sum q_i, \qquad (10.7)$$

где $\sum q_i$ – сумма сторонних зарядов, находящихся внутри замкнутой поверхности S.

Задача 14

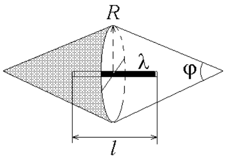


Рис.11

Из двух круговых прямых конусов с углом раствора φ = 10° и радиусом основания R = 2 см составлена фигура, вдоль оси симметрии которой помещен равномерно заряженный отрезок длиной l =6 см с линейной плотностью заряда λ = 2 мкКл/м. Середина отрезка совпадает с центром фигуры. Найти поток вектора электрического смещения через поверхность одного из конусов.

Решение:

В общем случае расчет потока электрического смещения через заштрихованную область конуса по формуле (10.3) с использованием (10.6) вызывает огромные трудности. Но заряженный стержень расположен на оси конуса симметрично относительно плоскости основания конуса. Таким образом, можно сделать вывод, что поток через заштрихованную область равен *половине потока через всю поверхность* фигуры на рис.11.

Поток вектора $\vec{D}$ через замкнутую поверхность можно рассчитать по закону Остроградского-Гаусса по формуле (10.7):

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \sum q_i = \lambda \cdot l = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 0,06 = 120 \text{ нКл.} \qquad (10.8)$$

Откуда следует ответ.

Ответ: $\Phi_D = \dfrac{120}{2}$ = 60 нКл

Задача 15

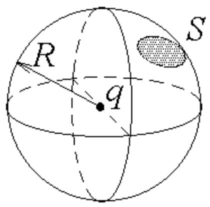


Рис.12

Заряд q = 4 нКл помещен в центр сферы радиуса R = 2 м. Найдите поток вектора напряженности электрического поля сквозь небольшую область поверхности сферы площадью S = 50 см^2.

Решение:

Напряженность электрического поля, созданного точечным зарядом, направлена вдоль радиуса сферы, т.е. вдоль нормали к поверхности сферы. Угол между вектором $\vec{E}$ и любой площадкой на сфере $d\vec{S}$ равен 0°. Модуль напряженности на поверхности сферы равен $E = \dfrac{kq}{R^2}$ (см. (3.1)). Таким образом, поток вектора $\vec{E}$ можно легко рассчитать по формуле (10.3):

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}d\vec{S} = \int_S \frac{kq}{R^2} dS \cos 0^0 = \frac{kqS}{R^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-9} \cdot 50 \cdot 10^{-4}}{2^2} = 0,045 \text{ В·м.}$$

Ответ: 45 мВ·м

Задача 16

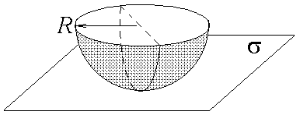


Рис.13

Электрическое поле создается горизонтальной бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда σ = 2 мКл/м^2. На плоскость положили полусферу радиуса R = 1 см. Найти поток вектора электрического смещения через боковую поверхность полусферы.

Решение:

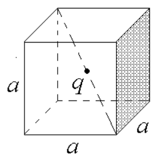
Заряженная плоскость на рис.13 создает однородное электрическое поле, перпендикулярное основанию полусферы и по модулю равное $D = \sigma/2$. Поток через всю поверхность полусферы равен сумме потоков через заштрихованную поверхность Φ_1 и через основание полусферы Φ_2. Но по теореме Остроградского-Гаусса (10.7) этот поток должен быть равен нулю, так как внутри замкнутой поверхности нет ни одного заряда (заряды находятся вне замкнутой поверхности на плоскости).

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 0 \qquad (10.9)$$

Таким образом, вместо потока Φ_1 можно найти поток Φ_2:

$$|\Phi_1| = |-\Phi_2| = D \cdot S = \frac{\sigma}{2} \cdot \pi R^2 = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot \pi \cdot 10^{-4} = 3{,}14 \cdot 10^{-7} \text{ Кл.}$$

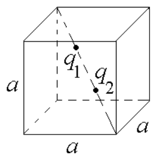
Ответ: 314 нКл



10.1 Заряд q помещен в центр куба со стороной a. Найдите поток вектора напряженности электрического поля сквозь одну грань.
$q = 1$ нКл, $a = 1$ см.

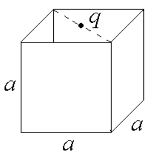
Ответ: 19 В·м

10.2 Заряды q_1 и q_2 помещены на диагонали куба со стороной a так, что делят эту диагональ на три равные части. Чему равен поток вектора напряженности электрического поля сквозь внешнюю поверхность куба.



$q_1 = 1$ нКл, $q_2 = 2$ нКл, $a = 1$ см.

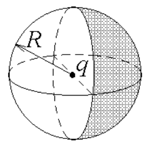
Ответ: 339 В·м



10.3 Заряд q помещен в центр верхней грани куба со стороной a. Найдите поток вектора электрического смещения через все остальные грани.
$q = 1$ нКл, $a = 1$ см.

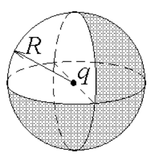
Ответ: 0,50 нКл

10.4 Заряд q помещен в центр сферы радиуса R. Найдите поток вектора напряженности электрического поля сквозь правую половину сферы.



$q = 2$ нКл, $R = 1$ см.

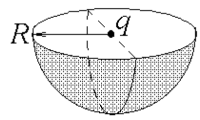
Ответ: 113 В·м



10.5 Заряд q помещен в центр сферы радиуса R. Найдите поток вектора напряженности электрического поля сквозь три четверти сферы. $q = 4$ нКл, $R = 1$ см.

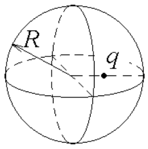
Ответ: 339 В·м

10.6 Заряд q помещен в центр полусферы радиуса R. Найдите поток вектора напряженности электрического поля сквозь поверхность полусферы.



$q = 5$ нКл, $R = 2$ м.

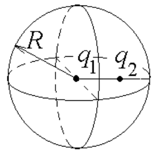
Ответ: 282 В·м



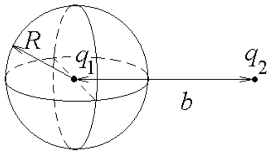
10.7 Заряд q помещен внутрь сферы радиуса R на расстоянии $R/2$ от центра. Найдите поток вектора напряженности электрического поля сквозь поверхность сферы.
$q = 5$ нКл, $R = 3$ м.

Ответ: 565 В·м

10.8 Заряд q_1 помещен в центр сферы, а заряд q_2 – на расстоянии $R/2$ от центра. Найдите поток вектора напряженности электрического поля сквозь поверхность сферы. $q_1 = 5$ нКл, $q_2 = 3$ нКл, $R = 3$ м.



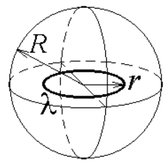
Ответ: 904 В·м



10.9 Заряд q_1 помещен в центр сферы, а заряд q_2 – на расстоянии b от центра. Найдите поток вектора напряженности электрического поля сквозь поверхность сферы.
$q_1 = 5$ нКл, $q_2 = 3$ нКл, $R = 3$ м, $b = 5$ м.

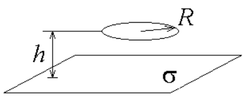
Ответ: 565 В·м

10.10 Внутрь сферы радиуса R помещено равномерно заряженное кольцо радиуса r и линейной плотностью заряда λ. Центр кольца совпадает с центром сферы. Найдите поток вектора напряженности электрического поля сквозь поверхность сферы.



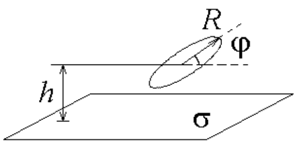
$\lambda = 4$ нКл/м, $R = 2$ м, $r = 1$ см.

Ответ: 28 В·м



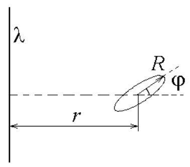
10.11 Над бесконечной плоскостью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ, в параллельной плоскости на расстоянии h расположен небольшой круг радиуса R. Найти поток вектора напряженности электрического поля сквозь поверхность круга. $\sigma = 1$ нКл/м^2, $R = 3$ см, $h = 1$ м.

Ответ: 160 мВ·м



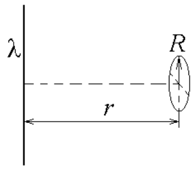
10.12 Над бесконечной плоской поверхностью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ, расположена круглая пластинка, центр которой лежит на расстоянии h. Плоскости пластинки и поверхности расположены под углом φ. Найти поток вектора напряженности электрического поля сквозь поверхность пластинки. $\sigma = 1$ нКл/м^2, $\varphi = 30^0$, $R = 1$ см, $h = 5$ м.

Ответ: 15 мВ·м



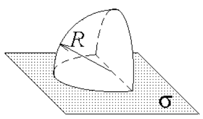
10.13 Электрическое поле создается бесконечной прямой равномерно заряженной нитью с линейной плотностью заряда λ. На большом удалении r расположена круглая пластинка радиуса R. Угол между плоскостью пластинки и перпендикуляром к нити, проходящим через центр пластинки, равен φ. Найти поток вектора электрического смещения через поверхность пластинки. $\lambda = 1$ мКл/м, $\varphi = 30^0$, $R = 1$ см, $r = 12$ м, $h = 5$ м.

Ответ: 2,1 нКл



10.14 Электрическое поле создается бесконечной прямой равномерно заряженной нитью с линейной плотностью заряда λ. На большом удалении r расположена круглая пластинка радиуса R. Нить проходит параллельно плоскости пластинки. Найти поток вектора электрического смещения через поверхность пластинки. $\lambda = 2$ мКл/м, $R = 1$ см, $r = 5$ м.

Ответ: 20 нКл



10.15 Электрическое поле создается бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда σ. На плоскость положили четверть сферы радиуса R. Найти поток вектора электрического смещения через поверхность четверти сферы. $\sigma = 2$ мКл/м^2, $R = 2$ см.

Ответ: 628 нКл

21. Волны де Бройля.

Если электромагнитное излучение с длиной волны $\lambda = 2\pi c/\omega$ должно проявлять свойства частицы-фотона с энергией $E = \hbar\omega = 2\pi\hbar c/\lambda$ и импульсом $p = E/c = 2\pi\hbar/\lambda$, то и материальные частицы с импульсом $\vec{p}$, (массой m и скоростью v) должны обладать свойствами волн с длиной волны

$$\lambda_{Б} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv} \qquad (1.1).$$

Такая волна называется **волной де Бройля.**

В замкнутом пространстве электромагнитное излучение находится в устойчивом состоянии в виде стоячих волн. Поэтому можно ожидать устойчивого состояния "стоячей" волны де Бройля электрона в атоме, когда вдоль орбиты укладывается целое число волн де Бройля:

$$2\pi r_n = n\lambda_{Б}, \quad n = 1, 2, 3, ... \qquad (1.2)$$

Из формул (1) и (2) следует **правило квантования Бора**, определяющее радиусы разрешенных электронных орбит:

$$L_n = mv_n r_n = n\hbar, \;\; n = 1, 2, 3, ... \qquad (1.3)$$

Здесь m – масса электрона, v_n – его скорость на орбите с радиусом r_n. Момент импульса электрона L_n может быть равен только целому числу постоянных Планка $\hbar$. (т.е. $\hbar$ – это квант момента импульса).

Рассмотрим модель водородоподобного или одноэлектронного атома, когда вокруг ядра с зарядом $+Ze$ вращается по орбите с радиусом r_n единственный электрон под действием силы Кулона

$$\frac{Ze \cdot e}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} = \frac{mv_n^2}{r_n} \qquad (1.4)$$

Используя уравнение (3) и (4) можно вывести разрешенные радиусы орбит:

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}{mZe^2} = n^2 r_1, \;\; n = 1, 2, 3, ... \qquad (1.5)$$

где $r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{mZe^2}$ – **боровский радиус** или радиус первой боровской орбиты.

Из курса электромагнетизма известна формула для работы электрического поля над частицей с зарядом q, проходящей разность потенциалов $\Delta\varphi$:

$$A_{поля} = q\Delta\varphi \qquad (1.6)$$

Так как работа всех сил над частицей равна изменению ее кинетической энергии $A_{поля} = \Delta E_k$, то в случае ускорения частицы с нулевой начальной скоростью в электрическом поле, кинетическую энергию частицы можно найти по формуле:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = q\Delta\varphi \qquad (1.7)$$

Задача 1

Микрочастица с массой m и зарядом q, ускоренная разностью потенциалов $\Delta\varphi$ из состояния покоя, обладает длиной волны де Бройля $\lambda_Б$. Найти $\Delta\varphi$. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; $m = 6{,}4 \cdot 10^{-27}$ кг; $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл; $\lambda_Б = 10^{-12}$ м.

Решение:

Из формулы (1.1) выразим импульс частицы и подставим его в формулу (1.7):

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_Б} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{p^2}{2mq} = \frac{4\pi^2\hbar^2}{\lambda_Б^2 \cdot 2mq} = \frac{2\pi^2 \cdot 10^{-68}}{10^{-24} \cdot 6{,}4 \cdot 10^{-27} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-19}} = 96{,}4 \text{ В}$$

Ответ: 96,4 В

Задача 2

Электрон находится на третьей боровской орбите атома, радиус которой $r_3 =$ 0,48 нм. Во сколько раз увеличится длина волны де Бройля этого электрона при переходе на четвертую орбиту? Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с;
$m =$ 9,1·10^{-31} кг.

Решение:

Из формулы (1.5) рассчитаем радиус первой, а затем и четвертой боровской орбиты:

$$r_1 = \frac{r_3}{3^2} \Rightarrow r_4 = r_1 \cdot 4^2 = \frac{16 r_3}{9}. \qquad (1.8)$$

Выражая из формулы (1.3) длину волны де Бройля на разных орбитах, найдем их отношение:

$$\frac{\lambda_4}{\lambda_3} = \left(\frac{2\pi r_4}{4}\right) \Big/ \left(\frac{2\pi r_3}{3}\right) = \frac{3r_4}{4r_3} = \frac{3}{4r_3} \cdot \frac{16r_3}{9} = \frac{4}{3}$$

Ответ: увеличится в 1,33 раза.

1-1. Микрочастица с массой m и зарядом q ускорена разностью потенциалов $\Delta\varphi$ из состояния покоя. Найти длину волны де Бройля этой микрочастицы (в пм).
Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; $m = 6{,}4 \cdot 10^{-27}$ кг; $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл; $\Delta\varphi = 1$ В.

Ответ: 9,82 пм

1-2. Электрическое поле совершило работу A над покоившейся микрочастицей с массой m. Найти длину волны де Бройля ускоренной микрочастицы. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; $m = 6{,}4 \cdot 10^{-27}$ кг; $A = 1$ эВ.

Ответ: 13,9 пм

1-3. Электрическое поле совершило работу A над покоившейся микрочастицей с массой m, при этом длина волны де Бройля микрочастицы стала равна $\lambda_Б$. Найти работу поля A (в эВ).
Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; $m = 6{,}4 \cdot 10^{-27}$ кг; $\lambda_Б = 10^{-12}$ м.

Ответ: 193 эВ

1-4. Электрон находится на третьей боровской орбите атома, радиус которой $r =$ 0,48 нм. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; $m =$ 9,1·10^{-31} кг.
а) Найти длину волны де Бройля этого электрона (в нм).
б) Чему станет равна длина волны де Бройля этого электрона (в нм) на четвертой боровской орбите?
в) Чему равна скорость этого электрона (в км/с)?
г) Чему равен импульс этого электрона?
д) Чему станет равен импульс этого электрона при переходе на четвертую орбиту?
е) Чему станет равна скорость этого электрона (в км/с) при переходе на четвертую орбиту?
ж) Чему станет равна кинетическая энергия этого электрона (в эВ) при переходе на четвертую орбиту?

Ответы: а) 1,01 нм; б) 1,34 нм; в) 687 км/с; г) 6,25·10^{-25} кг·м/с; д) 4,69·10^{-25} кг·м/с; е) 515 км/с; ж) 0,755 эВ;

1-5. Электрон находится на третьей боровской орбите атома, радиус которой $r =$ 0,48 нм. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; $m =$ 9,1·10^{-31} кг.
а) Во сколько раз увеличится момент импульса этого электрона при переходе на четвертую орбиту?
б) На сколько электрон-вольт уменьшится кинетическая энергия этого электрона при переходе на четвертую орбиту?
в) На сколько нанометров увеличится длина волны де Бройля этого электрона при переходе на четвертую орбиту?
г) На сколько увеличится момент импульса этого электрона при переходе на четвертую орбиту?
д) Во сколько раз уменьшится кинетическая энергия этого электрона при переходе на четвертую орбиту?
е) Во сколько раз уменьшится импульс этого электрона при переходе на четвертую орбиту?
Ответы: а) 1,33 раз; б) 0,587 эВ; в) 0,335 нм; г) 10^{-34} Дж·с; д) 1,78 раз; е) 1,33 раз.

22. Физический смысл волновой функции микрочастицы.

Если состояние движения частицы описывается волновой функцией $\psi(\vec{r},t)$, то вероятность ее обнаружения в пределах малого объема dV в момент времени t определяется формулой

$$dP = \left|\psi(\vec{r},t)\right|^2 dV \qquad (2.1)$$

Здесь $\vec{r}$ – радиус-вектор не частицы, а участка пространства с объемом dV. Таким образом микрочастицу можно рассматривать, как объект, "размазанный" в пространстве с **объемной плотностью вероятности** $|\psi|^2$.

Вероятность того, что в данный момент времени t частица присутствует "где-то" равна 1. Поэтому, проинтегрировав выражение (6) по всему объему нашего мира, мы получим **условие нормировки волновой функции**:

$$\int\left|\psi(\vec{r},t)\right|^2 dV = 1 \qquad (2.2)$$

Если микрочастица находится в замкнутом ограниченном пространстве, то интеграл (2.2) необходимо брать в пределах этого пространства. Примером может служить частица, находящаяся в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечными стенками и шириной a. Тогда нормировочный интеграл (2.2) будет выглядеть так:

$$\int_0^a\left|\psi(x,t)\right|^2 dx = 1$$

Если волновая функция сферически симметрична, то формулу (2.1) можно переписать в виде:

$$dP = |\psi|^2\, 4\pi r^2 dr \qquad (2.3)$$

Функцию $f = \frac{dP}{dr} = |\psi|^2\, 4\pi r^2$ можно назвать радиальной плотностью вероятности. Чтобы найти расстояние от центра силового поля до точки, где вероятность обнаружения микрочастицы максимальна, надо исследовать функцию f на экстремум, т.е. $\frac{df}{dr} = 0$.

В декартовой системе координат в одномерном случае, когда $\psi = \psi(x,t)$, координату точки, где вероятность обнаружения микрочастицы максимальна, можно найти, исследовав на экстремум функцию

$$f = \frac{dP}{dx} = \left|\psi(x,t)\right|^2$$

Задача 3

ψ-функция некоторой частицы имеет вид $\psi = \frac{A}{r}e^{-r/\alpha}$, где r – расстояние от этой частицы до силового центра; $\alpha = 10^{-10}$ м. Используя условие нормировки, определите коэффициент A.

Решение:

Так как волновая функция сферически симметрична, то выражение для объема $dV = 4\pi r^2 dr$ подставляем в формулу (2.2) и рассчитываем нормировочный интеграл, который должен быть равен 1:

$$\int_0^\infty \frac{A^2}{r^2} e^{-2r/\alpha} 4\pi r^2 dr = 4\pi A^2 \int_0^\infty e^{-2r/\alpha} dr = 4\pi A^2 \left.\frac{e^{-2r/\alpha}}{-2/\alpha}\right|_0^\infty = 2\pi\alpha A^2 = 1$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 10^{-10}}} = 3{,}99\cdot 10^4 \text{ м}^{-1/2}$$

Ответ: $3{,}99\cdot10^4$ м$^{-1/2}$

Задача 4

Найти координату x микрочастицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной a=10^{-9} м с бесконечными стенками, при которой плотность вероятности ее нахождения максимальна. Волновая функция микрочастицы имеет вид $\psi = Ax^5(a-x)^2$

Решение:

Плотность вероятности максимальна, когда квадрат модуля волновой функции максимален, т.е. модуль волновой функции имеет экстремум.

Условие экстремума: $\frac{d|\psi|^2}{dx} = 0$.

$$\frac{d}{dx}\left(A^2x^{10}(a-x)^4\right) = A^2 10x^9(a-x)^4 - A^2x^{10}4(a-x)^3 = 0$$

$$A^2x^9(a-x)^3\left(10(a-x)-4x\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = a;\ x_3 = 10a/14 = 0{,}714\cdot10^{-9}\text{ м}$$

Ответ: 0,714 нм

2-1. ψ-функция некоторой частицы имеет вид $\psi = \frac{A}{r}e^{-r/\alpha}$, где r – расстояние от этой частицы до силового центра; α = 10^{-10} м.
Определить плотность вероятности нахождения этой частицы на расстоянии r от начала координат. $A = \sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha}}$, r = $2\cdot10^{-10}$ м.

Ответы: $7{,}29\cdot10^{26}$ м$^{-3}$

2-2. ψ-функция некоторой частицы имеет вид $\psi = Ae^{-r/\alpha}$, где r – расстояние от этой частицы до силового центра; α = 10^{-10} м.
а) На каком удалении r от начала координат (в нм) вероятность нахождения микрочастицы максимальна?
б) Определить плотность вероятности нахождения этой частицы на расстоянии r от начала координат. $A = \sqrt{\frac{1}{\pi\alpha^3}}$, r = $2\cdot10^{-10}$ м.

Ответы: а) 0,1 нм; б) $5{,}83\cdot10^{27}$ м$^{-3}$

2-3. ψ-функция некоторой частицы имеет вид $\psi = A\sin\frac{\pi x}{a}$, где a – ширина ямы. Используя условие нормировки, определите коэффициент A. a = 10^{-9} м.

Ответ: $4{,}47\cdot10^4$ м$^{-1/2}$

2-4. Микрочастица в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечными стенками имеет волновую функцию $\psi = Ax(a-x)$,
где $A^2 = 3\cdot10^{46}$ м$^{-5}$. Найти ширину ямы a.

Ответ: 1 нм

2-5. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид $\psi = A\frac{e^{-\alpha r}}{r}$, где r – расстояние от этой частицы до силового центра; α – некоторая постоянная. Определить плотность вероятности нахождения этой частицы на расстоянии r от начала координат.

$A = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}$, $r = 2\cdot10^{-10}$ м, $\alpha = 10^{10}$ м$^{-1}$.

Ответ: $7{,}29\cdot10^{26}$ м$^{-3}$

2-6. Найти максимальную плотность вероятности нахождения микрочастицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной
a=10^{-9} м с бесконечными стенками, если волновая функция имеет вид
а) $\psi = Ax^2(a-x)^2$. $A^2 = 6{,}3\cdot10^{83}$ м$^{-9}$; б) $\psi = Ax(a-x)$. $A^2 = 3\cdot10^{46}$ м$^{-5}$.
в) $\psi = Ax^3(a-x)$. $A^2 = 2{,}52\cdot10^{83}$ м$^{-9}$; г) $\psi = Ax(a-x)^2$. $A^2 = 1{,}05\cdot10^{65}$ м$^{-7}$.
д) $\psi = Ax^2(a-x)$. $A^2 = 1{,}05\cdot10^{65}$ м$^{-7}$. Ответы:

а) $2{,}46\cdot10^9$ м$^{-1}$; б) $1{,}88\cdot10^9$ м$^{-1}$; в) $2{,}8\cdot10^9$ м$^{-1}$; г) $2{,}3\cdot10^9$ м$^{-1}$; д) $2{,}3\cdot10^9$ м$^{-1}$

2-7. Найти координату x микрочастицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной a=10^{-9} м с бесконечными стенками, при которой плотность вероятности ее нахождения максимальна. Волновая функция микрочастицы имеет вид
а) $\psi = Ax^4(a-x)$; б) $\psi = Ax(a-x)^2$; в) $\psi = Ax(a-x)^3$.
г) $\psi = Ax^3(a-x)$

Ответы: а) 0,8 нм; б) 0,333 нм; в) 0,25 нм; г) 0,75 нм.

2-8. Волновая функция микрочастицы определена только в области $0 \le x \le a$, где a = 10^{-9} (ширина ямы).
а) $\psi = A\sin\frac{2\pi x}{a}$; б) $\psi = A\sin\frac{3\pi x}{a}$; в) $\psi = A\sin\frac{4\pi x}{a}$;
г) $\psi = A\sin\frac{5\pi x}{a}$; д) $\psi = A\sin\frac{8\pi x}{a}$

А) Найти минимальное расстояние между точками, в которых вероятность обнаружения частицы максимальна.
Б) Найти максимальное расстояние между точками, в которых вероятность обнаружения частицы максимальна.

Ответы: А) а) 0,5 нм; б) 0,333 нм; в) 0,25 нм; г) 0,2 нм; д) 0,125 нм
Б) а) 0,5 нм; б) 0,667 нм; в) 0,75 нм; г) 0,8 нм; д) 0,875 нм

2-9. Свободная микрочастица имеет сферически симметричную волновую функцию $\psi = Ae^{-r/\alpha}$, где $A = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha^3}}$, $\alpha = 10^{-10}$ м. Определить расстояние r от частицы до силового центра (в нм), где плотность вероятности нахождения микрочастицы равна $5{,}83 \cdot 10^{27}$ м$^{-3}$.

Ответ: 0,2 нм

2-10. Волновая функция, описывающая состояние электрона в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками имеет вид а) $\psi = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{2\pi x}{a}$; б) $\psi = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{4\pi x}{a}$ в) $\psi = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{5\pi x}{a}$, где $a = 10^{-9}$ м.

Определить кординату x электрона (в нм), где плотность вероятности его нахождения равна $2 \cdot 10^9$ м$^{-1}$.

Ответы: а) 0,25 нм; б) 0,125 нм; в) 0,1 нм

23. Стационарное уравнение Шредингера

Часто встречаются задачи, когда частица движется в **стационарном** внешнем поле, и **ее потенциальная энергия не зависит явно от времени**. В этом случае состояние частицы можно описать волновой функцией $\psi(\vec{r})$, зависящей только от координат, которая является решением **стационарного уравнения Шредингера:**

$$\Delta\psi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - U(\vec{r})\right)\psi = 0, \qquad (3.1)$$

где
$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \qquad (3.2)$$

– оператор Лапласа (в декартовой системе координат), m – масса частицы, E – ее полная энергия, $U(\vec{r})$ – потенциальная энергия частицы. Таким образом $E_k = E - U(\vec{r})$ – кинетическя энергия частицы.

Задача 5

Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид:
$\psi = A\sin(\alpha x)\sin(\beta y)e^{-\gamma z}$. Кинетическая энергия частицы равна $E_к$. Найти константу α. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; $E_к$ = 5 эВ; m= 2,5·10^{-29} кг;
β = 6·10^{10} м$^{-1}$; γ = 2·10^{10} м$^{-1}$.

Решение:

Определим вторые частные производные от волновой функции:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -A\alpha^2\sin(\alpha x)\sin(\beta y)e^{-\gamma z} = -\alpha^2\psi;$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -A\beta^2\sin(\alpha x)\sin(\beta y)e^{-\gamma z} = -\beta^2\psi;$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = A(-\gamma)^2\sin(\alpha x)\sin(\beta y)e^{-\gamma z} = \gamma^2\psi.$$

По формуле (3.2) найдем лапласиан волновой функции:

$$\Delta\psi = \psi\left(-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2\right)$$

Из уравнения (3.1) найдем α, учитывая, что $E_k = E - U(\vec{r})$:

$$\psi\left(-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2\right) + \frac{2m}{\hbar^2}E_k\psi = 0 \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{2mE_k}{\hbar^2} - \beta^2 + \gamma^2};$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\cdot 2,5\cdot 10^{-29}\cdot 5\cdot 1,6\cdot 10^{-19}}{10^{-68}} - 36\cdot 10^{20} + 4\cdot 10^{20}} = 2,83\cdot 10^{10}\,\text{м}^{-1}$$

Ответ: 2,83·10^{10} м$^{-1}$

Задача 6

Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид:
$\psi = A\left(\cos\alpha y + e^{i\alpha z}\right)$, где i – мнимая единица. Кинетическая энергия частицы равна $E_к$. Найти константу α. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; $E_к$ = 5 эВ;

m = 2,5·10^{-29} кг.

Решение:

Определим вторые частные производные от волновой функции:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0;$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-A\alpha^2\cos\alpha y;$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=A(i\alpha)^2 e^{i\alpha z}=-A\alpha^2 e^{i\alpha z}$$

По формуле (3.2) найдем лапласиан волновой функции:

$$\Delta\psi=-\alpha^2 A\left(\cos\alpha y+e^{i\alpha z}\right)=-\alpha^2\psi$$

Из уравнения (3.1) найдем α, учитывая, что $E_k=E-U(\vec{r})$:

$$-\alpha^2\psi+\frac{2m}{\hbar^2}E_k\psi=0\ \Rightarrow\ \alpha=\sqrt{\frac{2mE_k}{\hbar^2}}=\sqrt{\frac{2\cdot 2,5\cdot 10^{-29}\cdot 5\cdot 1,6\cdot 10^{-19}}{10^{-68}}}=6,32\cdot 10^{10}\text{ì}^{-1}$$

Ответ: 6,32·10^{10} м$^{-1}$

3-1. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид: $\psi=Ae^{-\alpha x}\sin(\beta y)\cos(\gamma z)$. Найти полную энергию частицы (в эВ), считая потенциальную энергию равной нулю.
Принять $\hbar=10^{-34}$ Дж·с; m = 2,5·10^{-29} кг; α = 4·10^{10} м$^{-1}$; β = 6·10^{10} м$^{-1}$; γ= 2·10^{10} м$^{-1}$.

Ответ: 3 эВ

3-2. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид: $\psi=Ae^{-\alpha x-\beta y}\cos(\gamma z)$. Найти полную энергию частицы (в эВ), считая потенциальную энергию равной нулю.
Принять $\hbar=10^{-34}$ Дж·с; m = 2,5·10^{-29} кг; α = 4·10^{10} м$^{-1}$; β = 2·10^{10} м$^{-1}$; γ= 6·10^{10} м$^{-1}$.

Ответ: 2 эВ

3-3. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид: $\psi=Ae^{-\alpha x-\beta y-\gamma z}$. Найти полную энергию частицы (в эВ), считая потенциальную энергию равной U = 8 эВ.
Принять $\hbar=10^{-34}$ Дж·с; m = 2,5·10^{-29} кг; α = 4·10^{10} м$^{-1}$; β = 6·10^{10} м$^{-1}$; γ= 2·10^{10} м$^{-1}$.

Ответ: 1 эВ

3-4. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид: а) $\psi=A\sin(\alpha x)\sin(\beta y)e^{-i\gamma z}$; б) $\psi=Ae^{i\alpha x}\sin(\beta y)e^{-i\gamma z}$ где i – мнимая единица. Найти полную энергию частицы (в эВ), считая потенциальную энергию равной нулю.
Принять $\hbar=10^{-34}$ Дж·с; m = 2,5·10^{-29} кг; α = 4·10^{10} м$^{-1}$; β = 6·10^{10} м$^{-1}$; γ= 2·10^{10} м$^{-1}$.

Ответ: а) 7 эВ; б) 7 эВ

3-5. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид: $\psi=Ae^{-i\alpha x}e^{-\beta y}\cos(\gamma z)$, где i – мнимая единица. Найти полную энергию частицы (в эВ), считая потенциальную энергию равной U = 6 эВ.

Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; m = 2,5·10^{-29} кг;
α = 4·10^{10} м$^{-1}$; β = 6·10^{10} м$^{-1}$; γ = 2·10^{10} м$^{-1}$.

Ответ: 4 эВ

3-6. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид: $\psi = Ae^{-\alpha x}\sin(\beta y)\cos(\gamma z)$. Кинетическая энергия частицы равна E. Найти массу частицы. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; E = 5 эВ;
α = 4·10^{10} м$^{-1}$; β = 6·10^{10} м$^{-1}$; γ = 2·10^{10} м$^{-1}$.

Ответ: 1,5·10^{-29} кг

3-7. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид: $\psi = Ae^{-\alpha x}e^{-\beta y}e^{-i\gamma z}$, где i - мнимая единица. Кинетическая энергия частицы равна E. Найти массу частицы.
Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; E = 5 эВ;
α = 4·10^{10} м$^{-1}$; β = 2·10^{10} м$^{-1}$; γ = 6·10^{10} м$^{-1}$.

Ответ: 10^{-29} кг

3-8. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид: $\psi = A\sin(\alpha x)e^{-\beta y}e^{-\gamma z}$. Кинетическая энергия частицы равна E. Найти массу частицы.
Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; E = 5 эВ;
α = 5·10^{10} м$^{-1}$; β = 2·10^{10} м$^{-1}$; γ = 4·10^{10} м$^{-1}$.

Ответ: 3,13·10^{-30} кг

3-9. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид: а) $\psi = A\sin(\alpha x)\sin(\beta y)e^{-i\gamma z}$; б) $\psi = Ae^{i\alpha x}\sin(\beta y)e^{-i\gamma z}$, где i – мнимая единица. Кинетическая энергия частицы равна E. Найти массу частицы.
Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; E = 5 эВ;
α = 4·10^{10} м$^{-1}$; β = 6·10^{10} м$^{-1}$; γ = 2·10^{10} м$^{-1}$.

Ответы: а) 3,5·10^{-29} кг; б) 3,5·10^{-29} кг.

3-10. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид: $\psi = A\exp(-i\alpha x + i\beta y)\cos(\gamma z)$, где i – мнимая единица. Кинетическая энергия частицы равна E. Найти массу частицы.
Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; E = 5 эВ;
α = 4·10^{10} м$^{-1}$; β = 6·10^{10} м$^{-1}$; γ = 2·10^{10} м$^{-1}$.

Ответ: 3,5·10^{-29} кг

3-11. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид: $\psi = Ae^{-\alpha x}\sin(\beta y)\cos(\gamma z)$. Кинетическая энергия частицы равна E. Найти константу α. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; E = 5 эВ;
$m = 2{,}5\cdot10^{-29}$ кг; $\beta = 6\cdot10^{10}$ м$^{-1}$; $\gamma = 4\cdot10^{10}$ м$^{-1}$.

Ответ: $3{,}46\cdot10^{10}$ м$^{-1}$

3-12. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид: $\psi = A\exp(-\alpha x - i\beta y - \gamma z)$, где i - мнимая единица. Кинетическая энергия частицы равна E. Найти константу α. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; E = 5 эВ;
$m = 2{,}5\cdot10^{-29}$ кг; $\beta = 8\cdot10^{10}$ м$^{-1}$; $\gamma = 2\cdot10^{10}$ м$^{-1}$.

Ответ: $4{,}47\cdot10^{10}$ м$^{-1}$

3-13. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид: $\psi = Ae^{-\alpha x}e^{i\beta y}$, где i – мнимая единица. Найти кинетическую энергию частицы (в эВ). Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; $m = 2{,}5\cdot10^{-29}$ кг;
$\alpha = 4\cdot10^{10}$ м$^{-1}$; $\beta = 6\cdot10^{10}$ м$^{-1}$.

Ответ: 2,5 эВ

3-14. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид: $\psi = Ae^{-i\alpha x}\cos(\gamma z)$, где i – мнимая единица. Кинетическая энергия частицы равна E. Найти массу частицы. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; E = 5 эВ;
$\alpha = 4\cdot10^{10}$ м$^{-1}$; $\gamma = 2\cdot10^{10}$ м$^{-1}$.

Ответ: $1{,}25\cdot10^{-29}$ кг

3-15. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид: $\psi = Ae^{-i\alpha x}\sin(\gamma z)$, где i – мнимая единица. Кинетическая энергия частицы равна E. Найти константу α. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; E = 5 эВ;
$m = 2{,}5\cdot10^{-29}$ кг; $\gamma = 2\cdot10^{10}$ м$^{-1}$.

Ответ: $6\cdot10^{10}$ м$^{-1}$

3-16. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид: $\psi = A(\cos\alpha x + \sin\alpha x)$.

Кинетическая энергия частицы равна E. $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с;
а) Найти кинетическую энергию частицы (в эВ).
$m = 2{,}5\cdot10^{-29}$ кг; $\alpha = 4\cdot10^{10}$ м$^{-1}$.
б) Найти массу частицы. E = 5 эВ; $\alpha = 4\cdot10^{10}$ м$^{-1}$.
в) Найти константу α. E = 5 эВ; $m = 2{,}5\cdot10^{-29}$ кг.

Ответы: а) 2 эВ; б) 10^{-29} кг; в) $6{,}32\cdot10^{10}$ м$^{-1}$

3-17. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид: $\psi = A\left(\cos\alpha x + e^{i\alpha x}\right)$, где i – мнимая единица. Найти кинетическую энергию частицы (в эВ). Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; $m = 2{,}5\cdot10^{-29}$ кг; $\alpha = 4\cdot10^{10}$ м$^{-1}$.

Ответ: 2 эВ

3-18. Волновая функция микрочастицы с массой m имеет вид: $\psi = A\left(\cos\alpha z + e^{i\alpha y}\right)$, где i – мнимая единица. Кинетическая энергия частицы равна E. Найти массу частицы. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; E = 5 эВ; $\alpha = 4\cdot 10^{10}$ м$^{-1}$.

Ответ: 10^{-29} кг

24. Частица в одномерной прямоугольной потенциальной яме. Одномерный квантовый гармонический осциллятор.

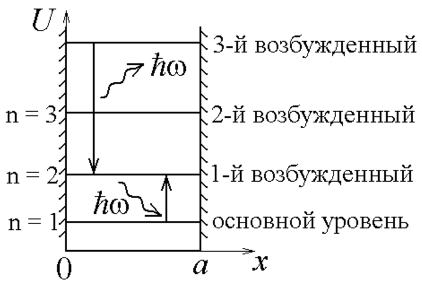


Рис.1

Разрешенные значения энергии микрочастицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной a с бесконечными стенками определяются формулой

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ma^2}, \text{ где } n = 1,2,3... \quad (4.1)$$

При поглощении фотона с энергией $\hbar\omega$ электрон может перейти на вышележащий уровень энергии (см. рис.1). Такой переход называется **возбуждением** электрона. При переходе с верхних **возбужденных** уровней на более низкие уровни энергии электрон испускает фотон с энергией (см. рис.1 и рис.2)

$$\hbar\omega = E_{n_2} - E_{n_1}, \qquad (4.2)$$

где E_{n_2} – энергия верхнего уровня, с которого осуществляется переход, E_{n_1} – энергия уровня, на который переходит электрон. Эти энергии определяются по формуле (4.1), подставляя в нее номера уровней n_2 и n_1.

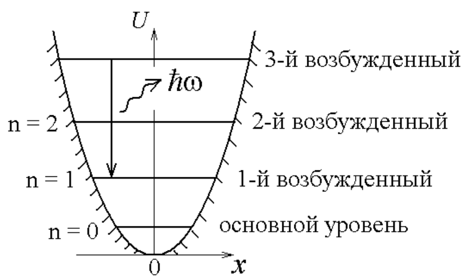


Рис.2

Разрешенные значения энергии одномерного квантового гармонического осциллятора определяются формулой

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, \qquad (4.3)$$

где n = 0, 1, 2, 3..., ω_0 – собственная циклическая частота квантового осциллятора.

Энергия фотона, испущенного осциллятором при переходе из какого-либо возбужденного состояния в нижележащее, определяется формулой (4.2).

Задача 7

Микрочастица с массой m находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками шириной a. Энергия микрочастицы на втором возбужденном уровне равна E = 36 эВ. Найти импульс излученного фотона при переходе микрочастицы в основное состояние. Постоянная Планка $h = 6{,}63\cdot 10^{-34}$ Дж·с

Решение:

Номер второго возбужденного уровня $n_2 = 3$, а основного уровня $n_1 = 1$. Из формулы (4.1) расчитаем выражение:

$$\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{E_{n_2}}{n_2^2} = \frac{36 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{3^2} = 6,4 \cdot 19^{-19} \text{ Дж}.$$

По формуле (4.2) найдем энергию излученного фотона:

$$\hbar\omega = E_{n_2} - E_{n_1} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left(n_2^2 - n_1^2\right) = 6,4 \cdot 10^{-19}\left(3^2 - 1^2\right) = 51,2 \cdot 10^{-19} \text{Дж}$$

Импульс фотона равен $p_\phi = E_\phi / c$:

$$p_\phi = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{51,2 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} = 17,1 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$$

Ответ: $1{,}71 \cdot 10^{-26}$ кг·м/с;

Задача 8

Находясь в основном состоянии, одномерный квантовый гармонический осциллятор поглотил фотон с энергией E = 9 эВ и оказался в третьем возбужденном состоянии. Найти наименьшую частоту волны фотона, который может быть излучен этим осциллятором. Постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с

Решение:

Номер основного состояния квантового осциллятора равен $n_1 = 0$, а номер третьего возбужденного состояния – $n_2 = 3$. Используя формулы (4.3) и (4.2) найдем $\hbar\omega_0$:

$$E_\phi = \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 - \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 = \left(n_2 - n_1\right)\hbar\omega_0 \Rightarrow$$

$$\hbar\omega_0 = \frac{E_\phi}{n_2 - n_1} = \frac{9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{3 - 0} = 4,8 \cdot 10^{-19} \text{Дж}$$

Наименьшую частоту (а значит и наименьшую энергию) будет иметь фотон, излученный осциллятором при самом коротком переходе его из верхнего состояния ($n_2 = 3$) в соседнее нижнее состояние ($n_1 = 2$).

$$h\nu = \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 - \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 = \left(n_2 - n_1\right)\hbar\omega_0 = 4,8 \cdot 10^{-19} \text{Дж}$$

Найдем частоту $\nu = \frac{4,8 \cdot 10^{-19}}{h} = \frac{4,8 \cdot 10^{-19}}{6,63 \cdot 10^{-34}} = 7,24 \cdot 10^{14}$ Гц

Ответ: $7{,}24 \cdot 10^{14}$ Гц

4-1. Микрочастица с массой m находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками шириной a. Постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с

а) Энергия микрочастицы на втором возбужденном уровне
равна E = 36 эВ.

б) Энергия микрочастицы на третьем возбужденном уровне
равна E = 32 эВ.

в) Энергия микрочастицы на третьем уровне равна E = 36 эВ.

г) Энергия микрочастицы на четвертом уровне равна E = 32 эВ.

А) Найти энергию излученного фотона (в эВ) при переходе микрочастицы в основное состояние.
Б) Найти длину волны излученного фотона (в нм) при переходе микрочастицы в основное состояние.
В) Найти импульс излученного фотона при переходе микрочастицы в основное состояние.

Ответы:

А) а) 32 эВ; б) 30 эВ; в) 32 эВ; г) 30 эВ
Б) а) 38,8 нм; б) 41,4 нм; в) 38,8 нм; г) 41,4 нм
В) а) $1{,}71\cdot10^{-26}$ кг·м/с; б) $1{,}6\cdot10^{-26}$ кг·м/с; в) $1{,}71\cdot10^{-26}$ кг·м/с; г) $1{,}6\cdot10^{-26}$ кг·м/с

4-2. Микрочастица с массой m находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками шириной a.
Находясь в основном состоянии, микрочастица поглотила фотон с энергией $E_ф$ и перешла
а) во второе возбужденное состояние. $E_ф = 8$ эВ.
б) в третье возбужденное состояние. $E_ф = 15$ эВ
в) на третий энергетический уровень. $E_ф = 8$ эВ.
г) на четвертый энергетический уровень. $E_ф = 15$ эВ.

Затем эта частица совершила один переход в одно из состояний с меньшей энергией.
А) Найти наименьшую энергию фотона (в эВ), который может быть излучен этой частицей при таком переходе.
Б) Найти наименьший импульс фотона, который может быть излучен этой частицей при таком переходе.
В) Найти наибольшую длину волны фотона(в нм), который может быть излучен этой частицей при таком переходе.

Ответы:

А) а) 5 эВ; б) 7 эВ; в) 5 эВ; г) 7 эв
Б) а) $2{,}67\cdot10^{-27}$ кг·м/с; б) $3{,}73\cdot10^{-27}$ кг·м/с; в) $2{,}67\cdot10^{-27}$ кг·м/с; г) $3{,}73\cdot10^{-27}$ кг·м/с.
В) а) 248 нм; б) 178 нм; в) 248 нм; г) 178 нм

4-3. Находясь в основном состоянии, одномерный квантовый гармонический осциллятор поглотил фотон с энергией $E_ф$ и оказался
а) во втором возбужденном состоянии. $E_ф = 8$ эВ.
б) в третьем возбужденном состоянии. $E_ф = 9$ эВ.
Найти наибольшую длину волны фотона (в нм), который может быть излучен этим осциллятором.

Ответы: а) 311 нм; б) 414 нм

4-4. При переходе одномерного квантового гармонического осциллятора из четвертого возбужденного состояния в основное был излучен фотон с энергией E = 8 эВ. Найти

а) длину волны фотона (в нм), который был бы излучен при переходе на соседний энергетический уровень.

б) частоту фотона, который был бы излучен при переходе на соседний энергетический уровень.

в) частоту фотона, который был излучен при последующем переходе в основное состояние.

Ответы: а) 622 нм; б) $4{,}82 \cdot 10^{14}$ Гц; в) $5{,}79 \cdot 10^{15}$ Гц

4-5. При переходе одномерного квантового гармонического осциллятора из четвертого возбужденного состояния на соседний энергетический уровень был излучен фотон с энергией E = 8 эВ. Найти длину волны фотона (в нм), который был излучен при последующем переходе в основное состояние.

Ответ: 51,8 нм

4-6. Находясь в первом возбужденном состоянии, одномерный квантовый гармонический осциллятор поглотил фотон с энергией E = 8 эВ и оказался в третьем возбужденном состоянии. Найти

а) наибольшую длину волны фотона (в нм), который может быть излучен этим осциллятором.

б) наименьшую длину волны фотона (в нм), который может быть излучен осциллятором в этом состоянии.

в) наименьшую частоту фотона, который может быть излучен этим осциллятором.

г) наибольшую частоту фотона, который может быть излучен осциллятором в этом состоянии

Ответы: а) 311 нм; б) 104 нм; в) $9{,}65 \cdot 10^{14}$ Гц; г) $2{,}88 \cdot 10^{15}$ Гц

4-7. Находясь в основном состоянии, одномерный квантовый гармонический осциллятор поглотил фотон с энергией E = 8 эВ и оказался во втором возбужденном состоянии. Найти наименьшую частоту фотона, который может быть излучен этим осциллятором.

Ответ: $9{,}65 \cdot 10^{14}$ Гц

25. Спектральные серии излучения водородоподобных атомов.

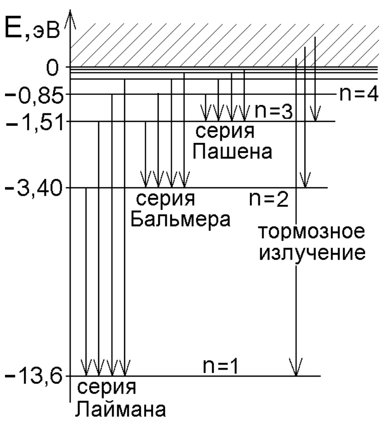


Рис.3

Спектр водородоподобных атомов может быть разделен на наблюдающиеся на опыте **спектральные серии**, соответсвующие переходам электрона на *определенный* уровень энергии *со всех* лежащих выше возбужденных энергетических уровней. Соответствующие переходы между боровскими орбитами показаны на рис.3 (атом водорода).

серия Лаймана – переходы на основной уровень энергии $n_2 \to n_1 = 1$;

серия Бальмера – переходы в первое возбужденное состояние $n_2 \to n_1 = 2$;

серия Пашена – переходы $n_2 \to n_1 = 3$;

Энергия фотона, излученного при переходе электрона с уровня n_2 на уровень n_1, определяется формулой (4.2) $\hbar\omega = E_{n_2} - E_{n_1}$.

Разрешенные значения энергии электрона в водородоподобном атоме определяются формулой

$$E_n = -\frac{|E_1|}{n^2}, \qquad (5.1)$$

где n = 1, 2, 3..., E_1 – энергия электрона в основном ($n = 1$) состоянии.

Задача 9

Во сколько раз максимальная длина волны фотона из серии Бальмера меньше минимамальной длины волны фотона из серии Пашена в спектре излучения этого атома?

Решение:

Чем короче переход электрона на рис.3, тем меньше энергия испущенного электрона. Так как энергия фотона пропорциональна циклической частоте и обратна пропорциональна длине волны, то самый короткий переход электрона будет соответствовать самой большой длине волны, а самый длинный переход будет соответствовать самой короткой длине волны.

Самый короткий переход из серии Бальмера $n_2 = 3 \;\to\; n_1 = 2$ соответствует максимальной длине волны из этой серии. Используя формулу (5.1) и (4.2), получим:

$$\lambda_{\max Б} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi c\hbar}{E_{n_2} - E_{n_1}} = \frac{2\pi c\hbar}{\left(\frac{|E_1|}{n_1^2} - \frac{|E_1|}{n_2^2}\right)} = \frac{2\pi c\hbar}{|E_1|\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)} = \frac{2\pi c\hbar}{|E_1|}\frac{36}{5}$$

Самый длинный переход в серии Пашена $n_2 = \infty \to n_1 = 3$ соответствует самой короткой длине волны в этой серии:

$$\lambda_{\min П} = \frac{2\pi c\hbar}{\left(\frac{|E_1|}{n_1^2} - \frac{|E_1|}{n_2^2}\right)} = \frac{2\pi c\hbar}{\left(\frac{|E_1|}{3^2} - \frac{|E_1|}{\infty}\right)} = \frac{2\pi c\hbar}{|E_1|} \cdot 9$$

Найдем отношение этих длин волн:

$$\frac{\lambda_{\min П}}{\lambda_{\max Б}} = \frac{9}{36/5} = \frac{9\cdot 5}{36} = 1,25$$

Ответ: меньше в 1,25 раза

5-1. В некотором водородоподобном атоме электрон может иметь разрешенные значения энергии, определяемые формулой $E_n = -\frac{|E_1|}{n^2}$, где n = 1, 2, 3... Постоянная Планка $h = 6,63\cdot 10^{-34}$ Дж·с, E_1 = 13,6 эВ. Найти

А) для серии Лаймана спектра излучения водородоподобного атома

Б) для серии Бальмера спектра излучения водородоподобного атома

В) для серии Пашена спектра излучения водородоподобного атом

а) отношение наибольшей частоты фотона к наименьшей частоте фотона.

б) отношение наибольшей длины фолны фотона к наименьшей длине волны фотона.

в) наибольшую частоту фотона.

г) наименьшую частоту фотона.

д) наименьшую длину волны фотона (в нм)

е) наибольшую длину волны фотона (в нм)

Ответы:

А) а) 1,33; б) 1,33; в) $3{,}28\cdot 10^{15}$ Гц; г) $2{,}46\cdot 10^{15}$ Гц; д) 91,4 нм; е) 122 нм

Б) а) 1,8; б) 1,8; в) $8{,}21\cdot 10^{14}$ Гц; г) $4{,}56\cdot 10^{14}$ Гц; д) 366 нм; е) 658 нм

В) а) 2,29; б) 2,29; в) $3{,}65\cdot 10^{14}$ Гц; г) $1{,}60\cdot 10^{14}$ Гц; д) 823 нм; е) 1880 нм

5-2. Во сколько раз минимальная частота фотона из серии Лаймана больше максимальной частоты фотона из серии Бальмера в спектре излучения атома водорода?

Ответ: в 3 раза

5-3. Во сколько раз минимальная частота фотона из серии Лаймана больше минимамальной частоты фотона из серии Пашена в спектре излучения атома водорода?

Ответ: в 15,4 раза

5-4. Во сколько раз минимальная частота фотона из серии Бальмера больше минимамальной частоты фотона из серии Пашена в спектре излучения атома водорода?

Ответ: в 2,86 раза

26.Заполнение электронных оболочек. Система четырех квантовых чисел.

Состояние электрона в атоме описывается системой из четырех квантовых чисел:

- главного $n = 1, 2, 3, \ldots;$
- орбитального $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1;$
- магнитного $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l;$
- спинового $\sigma = \pm 1/2$;

В одноэлектронном атоме разрешенная энергия электрона зависит только от главного квантового числа n.

Разрешенные значения **момента импульса электрона** L, **магнитного момента** p_m и их проекций зависят от *орбитального и магнитного* квантовых чисел:

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}\,;\; p_m = \mu_Б\sqrt{l(l+1)}\,;\;\; l = 0, 1, ..., n-1,$$
$$L_z = \hbar m; \qquad p_{mz} = -\mu_Б\, m\,; \qquad m = 0,\; \pm 1, ..., \pm l. \qquad (6.1)$$

Разрешенные значения величины **собственного момента импульса** электрона L_s, **собственного магнитного момента** p_{ms} и их проекций на выделенную ось $L_{s\,z}$ и p_{msz} зависят от квантового числа s (или σ), называемого *спиновым квантовым числом.*

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}; \quad p_{ms} = 2\mu_Б\sqrt{s(s+1)}, \qquad s = 1/2;$$
$$L_{s\,z} = \hbar\sigma, \qquad p_{ms\,z} = -2\mu_Б\,\sigma, \qquad \sigma = \pm 1/2 \qquad (6.2)$$

Принцип запрета Паули (1925 г.): в одной квантовой системе в один момент времени не могут находиться две тождественные микрочастицы с полуцелым спином в одинаковом состоянии (с одинаковыми четырьмя квантовыми числами). Таким образом в многоэлектронном атоме находятся электроны, отличающиеся значением хотя бы одного квантового числа.

Совокупность состояний электронов с одинаковым главным квантовым числом n называется **электронной оболочкой** атома. Каждая оболочка делится на **электронные подоболочки**, т.е. набор состояний с одинаковыми числами n и l. Оболочки и подоболочки атомов принято обозначать буквами:

n	1	2	3	4	5
оболочки	K	L	M	N	O

l	0	1	2	3	4
подоболочки	*s*	*p*	*d*	*f*	*g*

Естественно, что электроны будут находиться в основном состоянии с наименьшей возможной энергией, а так как собраться на низшем энергетическом уровне 1*s* они не могут по принципу Паули, то последовательно начнут заполнять все свободные уровни (состояния), начиная с низших.

Полностью заполненная подоболочка содержит

$$N = 2\cdot(2l+1) \text{ электронов.} \qquad (6.3)$$

Эти электроны различаются значениями квантовых чисел m и σ. В полностью заполненной оболочке будет

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2 \quad \text{электронов .} \qquad (6.4)$$

Задача 10

В некоторой подоболочке (A) некоторой полностью заполненной оболочки атома находится в k =1,4 раза больше электронов, чем в соседней подоболочке (B) из этой же оболочки. Во сколько раз больше орбитальный магнитный момент электрона из подоболочки B, чем его собственный (спиновый) магнитный момент.

Решение:

Пусть подоболочка *A* характеризуется орбитальным квантовым числом $l_A = l$. Тогда подоболочка *B* будет характеризоваться орбитальным квантовым числом $l_B = l - 1$. Так как все подоболочки полностью заполнены электронами, то их количество определяется по формуле (6.3):

$$N_A = 2(2l_A + 1) = 2(2l + 1);$$
$$N_B = 2(2l_B + 1) = 2(2l - 1)$$

Из условия, что $N_A = 1,4N_B$, найдем квантовое число l:

$$2(2l+1) = 1,4 \cdot 2(2l-1) \Rightarrow 2l + 1 = 2,8l - 1,4 \Rightarrow l = \frac{1+1,4}{2,8-2} = 3$$

Таким образом по формуле (6.1) можно найти орбитальный магнитный момент электрона на подоболочке *B*:

$$p_{mB} = \mu_Б \sqrt{l_B(l_B+1)} = \mu_Б \sqrt{(l-1)l} = \mu_Б \sqrt{6},$$

и по формуле (6.2) собственный магнитный момент такого электрона:

$$p_{msB} = 2\mu_Б \sqrt{s(s+1)} = 2\mu_Б \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \mu_Б \sqrt{3}$$

Найдем отношение $p_m / p_{ms} = \sqrt{2}$.

Ответ: в 1,41 раза

Задача 11

В некотором атоме конфигурация электронных оболочек имеет вид: $1s^2 2s^2 p^6 3s^2 p^6 d^{10} 4s^2 p^6 d^{10} f^8 5s^2 p^6$. Определить максимальную возможную величину суммарной проекции орбитальных моментов импульса всех его электронов на выделеное направление. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с.

Решение

Если некоторая подоболочка с квантовым числом l полностью заполнена, то электроны в этой подоболочке будут иметь все значения проекций орбитальных моментов импульса из ряда

$$L_z = 0, \pm\hbar, \pm 2\hbar, \ldots, \pm l\hbar,$$

а сумма всех этих проекций равна нулю. Отсюда можно сделать вывод, что все заполненные подоболочки, такие как $s^2, p^6, d^{10}, f^{14} \ldots$, не дают вклада в суммарную проекцию момента импульса многоэлектронного атома.

Из конфигурации электронных оболочек ясно, что незаполненной подоболочкой является $4f^8$, на которой находятся 8 электронов с орбитальным квантовым числом $l = 3$. Учитывая, что одинаковое значение магнитного квантового числа m может быть у двух электронов этой подоболочки (со спином $+1/2$ и $-1/2$), найдем максимальную суммарную проекцию момента импульса:

$$\sum L_z = \underbrace{3\hbar + 3\hbar + 2\hbar + 2\hbar + \hbar + \hbar + 0 + 0}_{\text{8 электронов}} = 12\hbar$$

Ответ: $12 \cdot 10^{-34}$ Дж·с

6-1. В некотором атоме конфигурация электронных оболочек имеет вид: а) $1s^2 2s^2 p^6 3s^2 p^6 d^8 4s^2$; б) $1s^2 2s^2 p^6 3s^2 p^6 d^4 4s^2$
Определить максимальную возможную величину суммарной проекции орбитальных моментов импульса всех его электронов на выделеное направление. $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с.

Ответ: а) $4 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; б) $6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с

6-2. В некотором атоме конфигурация электронных оболочек имеет вид: $1s^2 2s^2 p^6 3s^2 p^6 d^{10} 4s^2 p^6 d^{10} f^4 5s^2 p^6$. Определить максимальную возможную величину суммарной проекции орбитальных моментов импульса всех его электронов на выделеное направление. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с.

Ответ: 10^{-33} Дж·с.

6-3. Максимальная величина проекции орбитального момента импульса некоторого электрона в атоме была равна $2\hbar$. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; $\mu_Б = 9,27 \cdot 10^{-24}$ А·м^2.
Чему равняется
а) модуль орбитального момента импульса этого электрона.
б) величина орбитального магнитного момента этого электрона.

Ответы: а) $2,45 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; б) $2,27 \cdot 10^{-23}$ А·м^2.

6-4. В некоторой подоболочке (*A*) некоторой полностью заполненной оболочки атома находится в *k* раз больше электронов, чем в соседней подоболочке (*B*) из этой же оболочки. Найти максимальную возможную проекцию орбитального момента импульса электрона
а) из подоболочки *A*; б) из подоболочки *B*.
Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; $k = 1,4$.

Ответы: а) $3 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; б) $2 \cdot 10^{-34}$ Дж·с;

6-5. В некоторой подоболочке (*A*) некоторой полностью заполненной оболочки атома находится в *k* раз больше электронов, чем в соседней подоболочке (*B*) из этой же оболочки. Найти максимальную возможную проекцию орбитального магнитного момента электрона
а) из подоболочки *A*; б) из подоболочки *B*.
Принять $\mu_Б = 9,27 \cdot 10^{-24}$ А·м^2; $k = 1,4$.

Ответы: а) $2,78 \cdot 10^{-23}$ А·м^2; б) $1,85 \cdot 10^{-23}$ А·м^2;

6-6. В некоторой подоболочке (*A*) некоторой полностью заполненной оболочки атома находится в *k* раз больше электронов, чем в соседней подоболочке (*B*) из этой же оболочки. Найти минимальное возможное количество электронов во всей оболочке. $k = 1,4$.

Ответ: 32

6-7. А) В *s*-подоболочке некоторой полностью заполненной оболочки атома находится $k = 4\%$ электронов из всей оболочки.

Б) В p-подоболочке некоторой полностью заполненной оболочки атома находится $k = 12\%$ электронов из всей оболочки

В) В d-подоболочке некоторой полностью заполненной оболочки атома находится $k = 20\%$ электронов из всей оболочки.

Найти

а) максимальную возможную величину проекции орбитального момента импульса электрона в этой оболочке.

б) максимальную возможную величину орбитального момента импульса электрона в этой оболочке.

в) максимальную возможную величину проекции орбитального магнитного момента электрона в этой оболочке.

г) максимальную возможную величину орбитального магнитного момента электрона в этой оболочке. Принять $\hbar = 10^{-34}$ Дж·с; $\mu_Б = 9,27 \cdot 10^{-24}$ А·м^2;

Ответы: для вех случаев А), Б) и В)
а) $4 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; б) $4,47 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; в) $3,71 \cdot 10^{-23}$ А·м^2; г) $4,15 \cdot 10^{-23}$ А·м^2;

6-8. В некоторой подоболочке (A) некоторой полностью заполненной оболочки атома находится в k =1,4 раза больше электронов, чем в соседней подоболочке (B) из этой же оболочки.

а) Во сколько раз больше орбитальный момент импульса электрона из подоболочки A, чем из подоболочки B.

б) Во сколько раз больше орбитальный магнитный момент электрона из подоболочки A, чем из подоболочки B.

в) Во сколько раз больше орбитальный магнитный момент электрона из подоболочки A, чем его собственный (спиновый) магнитный момент.

Ответы: а) в 1,41 раза; б) в 1,41 раза; в) в $\underline{2}$ раза.

27. Собственная и примесная проводимость полупроводников.

Как известно, проводимость вещества прямо пропорциональна концентрации носителей тока n_e. Удельную проводимость σ_e в собственных (без примесей) полупроводниках можно выразить формулой:

$$\sigma_e \sim n_\text{e} = \text{const} \cdot \exp\left(\frac{E_\Phi}{kT}\right) \qquad (7.1),$$

где $E_\text{ф}$ – энергия Ферми, равная $E_\Phi = -\frac{1}{2}\Delta E_\text{з}$. Уровень Ферми в собственых полупроводниках находится посередине запрещенной зоны шириной $\Delta E_\text{з}$ между нижним уровнем зоны проводимости и верхним уровнем валентной зоны.

При очень низкой температуре преобладает примесная проводимость. Собственная проводимость очень мала. С ростом температуры примесная проводимость достигает своего максимального значения и перестает изменяться уже при комнатной температуре. Удельную проводимость в примесных полупроводниках можно расчитать по формуле:

$$\sigma_\text{примес} \sim n_\text{осн} = \begin{cases} \text{const} \cdot \exp\left(\frac{E_\Phi}{kT}\right) & \text{при } T \le T_\text{кр}, \\ \text{const} \approx n_\text{примеси} & \text{при } T \ge T_\text{кр}, \end{cases} \qquad (7.2)$$

в этом случае уровень Ферми смещается ближе к примесному уровню энергии.

Для донорной примеси $E_\text{ф} \approx -|\Delta E_\partial|$, т.е. уровень Ферми лежит немного ниже нижнего уровня зоны проводимости ($|\Delta E_\partial| \ll |\Delta E_\text{з}|$). Основными носителями тока в этом случае являются свободные электроны в зоне проводимости.

Для акцепторной примеси $E_\text{ф} \approx -|\Delta E_a|$, т.е. уровень Ферми лежит немного выше верхнего уровня валентной зоны ($|\Delta E_a| \ll |\Delta E_\text{з}|$). Основными носителями тока в этом случае являются дырки в валентной зоне.

Положение уровня Ферми слабо зависит от температуры, и при решении задач можно считать его неизменным.

Постоянная Больцмана k = 1,38·10^{-23}Дж/К

Задача 12

Ширина запрещенной зоны у алмаза $\Delta E_\text{А}$=7 эВ. Во сколько раз возрастет электропроводность алмаза при нагревании от 0°С до +10°С?

Решение:

По формуле (7.1) определим удельную электропроводность при разных температурах σ_1 и σ_2 и найдем отношение σ_2/σ_1 :

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_0 \cdot \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT_2}\right)}{\sigma_0 \cdot \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT_1}\right)} = \exp\left(\frac{\Delta E}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right) = \exp\left(\frac{7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}}\left(\frac{1}{273} - \frac{1}{283}\right)\right) = 191$$

Ответ: в 191 раз

7-1. Ширина запрещенной зоны у кремния ΔE_K =1,1 эВ.

а) Во сколько раз возрастет электропроводность кремния при нагревании от 0°С до +10°С?

б) На сколько увеличился натуральный логарифм удельной проводимости ($\ln\sigma$) кремния при нагревании от 0°С до +10°С?

Ответы: а) в 2,28 раза; б) : 0,825

7-2. Найти ширину запрещенной зоны у алмаза (в эВ), если электропроводность алмаза при нагревании от 0°С до +10°С возрастает в n = 191 раз.

Ответ: 7 эВ

7-3. Ширина запрещенной зоны у алмаза ΔE_A =7 эВ. Первоначальная температура алмаза 0°С. До какой температуры (в °С) его нагрели, если его электропроводность возросла в n = 191 раз?

Ответ: 10°С

7-4. Найти ширину запрещенной зоны у собственного полупроводника, если натуральный логарифм его удельной проводимости ($\ln\sigma$) при нагревании от 0°С до +10°С увеличился на n = 5?

Ответ: 6,66 эВ

7-5. Уровень Ферми в собственном полупроводнике лежит на расстоянии ΔE_1= 0,4 эВ выше верхнего уровня валентной зоны. Во сколько раз возрастет электропроводность этого полупроводника при нагревании от 0°С до +10°С?

Ответ: 1,82 раза

7-6. На каком расстоянии (в эВ) от нижнего уровня зоны проводимости лежит уровень Ферми в собственном полупроводнике, если электропроводность этого полупроводника при нагревании от 0°С до +10°С возрастает в n =4 раз?

Ответ: 0,924 эВ

7-7. Уровень Ферми в собственном полупроводнике лежит на расстоянии ΔE_1= 0,4 Эв выше верхнего уровня валентной зоны. Начальная температура полупроводника 0°С. Во сколько раз возрастет электропроводность этого полупроводника при увеличении температуры в n = 1,5 раза?

Ответ: 288 раз

7-8. Уровень Ферми в собственном полупроводнике лежит на расстоянии ΔE_1= 0,4 эВ ниже нижнего уровня зоны проводимости. Натуральный логарифм концентрации свободных носителей заряда в этом полупроводнике изменился на величину $\Delta(\ln n)$ = 5 при увеличении температуры в 1,5 раза? Найти начальную температуру полупроводника.

Ответ: 309 К

7-9. Ширина запрещенной зоны полупроводника p-типа равна ΔE_3 =1 эВ. Акцепторные уровни лежат на расстоянии ΔE_a = 0,01 эВ выше выалентной зоны. Концентрация основных носителей заряда в таком полупроводнике при низкой температуре T_1 равна n_1. Найти концентрацию атомов примеси. Считать, что валентность атома примеси на единицу меньше валентности полупроводника. T_1 = 30 К; $n_1 = 10^{10}$ м$^{-3}$.

Ответ: $4{,}77 \cdot 10^{11}$ м$^{-3}$

7-10. Ширина запрещенной зоны полупроводника n-типа равна $\Delta E_з$=1,1 эВ. Донорные уровни лежат на расстоянии $\Delta E_д$ = 0,01 эВ ниже зоны проводимости. Концентрация основных носителей заряда в таком полупроводнике при низкой температуре T_1 равна n_1. Найти концентрацию атомов примеси. Считать, что валентность атома примеси на единицу больше валентности полупроводника. T_1 = 30 К; $n_1 = 10^{10}$ м$^{-1}$.

Ответ: $4{,}77 \cdot 10^{11}$ м$^{-3}$

28. Расчет средних величин с помощью распределения Ферми-Дирака.

Функция распределения Ферми-Дирака для электронного газа в металлах

$$dn_{\text{Ф-Д}} = A\cdot f_{\text{Ф}}(E)\cdot\sqrt{E}dE, \text{ где } A = \frac{(2m_e)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}.$$

При Т = 0 К $f_{\text{Ф}}(E) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \le E \le E_{\text{Ф}}, \\ 0 \text{ при } E \ge E_{\text{Ф}} \end{cases}$ (эту формулу можно применять и при $T = T_{\text{комн}} \approx 300\ K$ с точностью до ~ 1 %).

Вычисление средних значений:

$$\langle F(E)\rangle = \frac{\int_0^\infty F(E)dn_{\text{Ф-Д}}}{\int_0^\infty dn_{\text{Ф-Д}}} \approx \frac{\int_0^{E_{\text{Ф}}} F(E)\sqrt{E}dE}{\int_0^{E_{\text{Ф}}} \sqrt{E}dE}. \qquad (8.1)$$

При T = 0 К приближенный расчет становится точным, так как все электроны в зоне проводимости металла будут располагаться ниже уровня Ферми.

Задача 13

Распределение Ферми-Дирака для электронного газа в металлах при температуре T = 0 К задается формулой: $dn = A\sqrt{E}dE$. Энергия Ферми некоторого металла равна $E_{\text{ф}}$ = 4 эВ. Для свободных электронов из зоны проводимости проводника при T = 0 К найти $\langle E^9\rangle$.

Решение:

В данной задача $F(E) = E^9$. Подставляем эту функцию в формулу (8.1) и рссчитываем $\langle F(E)\rangle = \langle E^9\rangle$:

$$\langle E^9\rangle = \frac{\int_0^{E_f} E^9\sqrt{E}dE}{\int_0^{E_f}\sqrt{E}dE} = \frac{\left.\frac{E^{21/2}}{21/2}\right|_0^{E_f}}{\left.\frac{E^{3/2}}{3/2}\right|_0^{E_f}} = \frac{2/21}{2/3}\frac{E_f^{21/2}}{E_f^{3/2}} = \frac{3}{21}E_f^9 = \frac{3}{21}\left(4\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^9$$

Ответ: $2{,}5\cdot 10^{-165}$ Дж^9

8-1. Распределение Ферми-Дирака для электронного газа в металлах при температуре T = 0 К задается формулой: $dn = A\sqrt{E}dE$. Энергия Ферми некоторого металла равна $E_{\text{ф}}$ = 4 эВ. Для свободных электронов из зоны проводимости проводника при T = 0 К найти а) $\langle E^2\rangle$; б) $\langle E^3\rangle$; б) $\langle E^4\rangle$; г) $\langle E^5\rangle$

Ответы:а) $1{,}76\cdot 10^{-37}$ Дж^2; б) $8{,}74\cdot 10^{-56}$ Дж^3; в) $4{,}58\cdot 10^{-74}$ Дж^4; г) $2{,}48\cdot 10^{-92}$ Дж^5

8-2. По условию 8-1 найти среднее значение энергии в любой степени.

8-3. Распределение Ферми-Дирака для электронного газа в металлах при температуре T = 0 К задается формулой: $dn = A\sqrt{E}dE$. Для свободных электронов из зоны проводимости проводника при T = 0 К найти

а) $\langle E^2\rangle / \langle E\rangle^2$; б) $\langle E^4\rangle / \langle E^2\rangle^2$; в) $\langle E\rangle / \langle\sqrt{E}\rangle^2$; г) $\sqrt{\langle E^{12}\rangle} / \langle E^3\rangle^2$

Ответы: а) 1,19; б) 1,48; в) 1,07; г) 3

29. Закон радиоактивного распада.

При радиоактивном распаде уменьшение количества ядер в образце за небольшой промежуток времени dt пропорционально количеству атомов и этому промежутку времени: $dN = -\lambda N dt$. Интегрируя это выражение, приходим к закону радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \qquad (9.1)$$

где λ **– постоянная распада**.

Из формулы (9.1) следует, что число ядер, распавшихся в промежуток времени от t_1 до t_2 равно

$$\Delta N = N_0 \left(e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2} \right). \qquad (9.2)$$

Периодом полураспада называется время, за которое распадается половина первоначального количества радиоактивных ядер. Используя формулу (9.1), можно показать, что $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Среднее время жизни ядра можно рассчитать по формуле

$$\tau = \langle t \rangle = \frac{\int\limits_{t=0}^{t=\infty} t dN(t)}{\int\limits_{t=0}^{t=\infty} dN(t)} = \frac{1}{\lambda} \qquad (9.3)$$

Задача 14

Радиоактивный образец поместили в герметичный сосуд. Найти среднее время жизни ядер этого образца, если через время t_1 = 1 мин распадается 30% от первоначального количества этих ядер?

Решение:

Если распадается 30% ядер, то в образце остается 70% ядер, т.е.

$$N = 0,7 N_0 = N_0 e^{-\lambda t}. \qquad (9.4)$$

Подставляя постоянную распада, найденную из формулы (9.4), в формулу (9.3), найдем среднее время жизни:

$$\lambda = -\frac{\ln 0,7}{t} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\lambda} = -\frac{t}{\ln 0,7} = \frac{-60}{-0,3567} = 168 \text{ c}$$

Ответ: 168 с = 2,8 мин;

9-1. Радиоактивный образец, содержащий N ядер радиоактивного изотопа, поместили в герметичный сосуд. Период полураспада этого изотопа равен T. Сколько ядер образца распадется за промежуток времени от t_1 до t_2? N = 6,4·10^{20}; t_1 = 1 мин; t_2 = 3 мин; T = 2 мин.

Ответ: 2,26·10^{20}

9-2. Радиоактивный образец, содержащий N ядер радиоактивного изотопа, поместили в герметичный сосуд. Период полураспада этого изотопа равен T. N = 6,4·10^{20}; t_1 = 1 мин; T = 2 мин.

а) Сколько ядер образца распадется к моменту времени t_1?

б) Сколько ядер образца останется к моменту времени t_1?

Ответы: а) $1{,}87\cdot10^{20}$; б) $4{,}53\cdot10^{20}$

9-3. Радиоактивный образец, содержащий N ядер радиоактивного изотопа, поместили в герметичный сосуд. Постоянная распада этого изотопа равена λ. $N = 6{,}4\cdot10^{20}$; $t_1 = 1$ мин; $\lambda = 0{,}03$ с$^{-1}$.

а) Сколько ядер образца останется к моменту времени t_1?

б) Сколько ядер образца распадется к моменту времени t_1?

Ответы: а) $1{,}06\cdot10^{20}$; б) $5{,}34\cdot10^{20}$

9-4. Радиоактивный образец, содержащий N ядер радиоактивного изотопа, поместили в герметичный сосуд. Постоянная распада этого изотопа равена λ. Сколько ядер образца распадется за промежуток времени от t_1 до t_2? $N = 6{,}4\cdot10^{20}$; $t_1 = 1$ мин; $t_2 = 3$ мин; $\lambda = 0{,}03$ с$^{-1}$.

Ответ: $1{,}03\cdot10^{20}$

9-5. Радиоактивный образец, содержащий N ядер радиоактивного изотопа, поместили в герметичный сосуд. Среднее время жизни этого изотопа равно τ. Сколько ядер образца распадется за промежуток времени от t_1 до t_2? $N = 6{,}4\cdot10^{20}$; $t_1 = 1$ мин; $t_2 = 3$ мин; $\tau = 2$ мин.

Ответ: $2{,}45\cdot10^{20}$

9-6. Радиоактивный образец, содержащий N ядер радиоактивного изотопа, поместили в герметичный сосуд. Среднее время жизни этого изотопа равно τ. $N = 6{,}4\cdot10^{20}$; $t_1 = 1$ мин; $\tau = 2$ мин.

а) Сколько ядер образца распадется к моменту времени t_1?

б) Сколько ядер образца останется к моменту времени t_1?

Ответы: а) $2{,}52\cdot10^{20}$; б) $3{,}88\cdot10^{20}$

9-7. Концентрация ядер одного изотопа с периодом полураспада T_1 в k раз превышала концентрацию ядер другого изотопа с периодом полураспада T_2. Через какой промежуток времени

а) концентрация ядер этих изотопов станут равными?

б) концентрация ядер первого изотопа станет в k раз меньше концентрации ядер второго изотопа?

$k = 2$; $T_1 = 3$ мин; $T_2 = 5$ мин.

Ответы: а) 450 с = 7,5 мин; б) 15мин=900 с

9-8. Концентрация ядер одного изотопа с постоянной распада λ_1 в k раз превышала концентрацию ядер другого изотопа с периодом полураспада T_2. Через какой промежуток времени

а) концентрация ядер этих изотопов станут равными?

б) концентрация ядер первого изотопа станет в k раз меньше концентрации ядер второго изотопа?

$k = 2$; $\lambda_1 = 0{,}005$ с$^{-1}$; $T_2 = 5$ мин.

Ответы: а) 258 с; б) 515 с

9-9. Энергетический выход реакции деления ядра некоторого нестабильного изотопа $E_В$. Сколько тепла (в Дж) выделилось за время t, если первоначальное число ядер этого изотопа N_0, а период полураспада равен T. $E_В = 100$ МэВ; $N_0 = 2{,}5\cdot10^{10}$; $T = 2$ мин; $t = 5$ мин.

Ответ: 0,329 Дж

9-10. Энергетический выход реакции деления ядра некоторого нестабильного изотопа $E_В$. Сколько тепла (в Дж) выделилось за время t, если первоначальное число ядер этого изотопа N_0, а постоянная распада равна λ. $E_В = 100$ МэВ; $N_0 = 2{,}5\cdot10^{10}$; $\lambda = 0{,}08$ с$^{-1}$; $t = 2$ мин.

Ответ: 0,400 Дж

9-11. Энергетический выход реакции деления ядра некоторого нестабильного изотопа $E_В$. Сколько тепла (в Дж) выделилось за время t, если первоначальное число ядер этого изотопа N_0, а среднее время жизни ядра равно τ. $E_В = 100$ МэВ; $N_0 = 2{,}5\cdot10^{10}$; $\tau = 5$ мин; $t = 2$ мин.

Ответ: 0,132 Дж

9-12. При распаде ядер радиоактивного изотопа выделилось Q тепла за время t. Первоначальное число ядер этого изотопа N_0, а среднее время жизни ядра равно τ. Найти энергетический выход (в МэВ) реакции деления одного ядра. $Q = 0{,}2$ Дж; $N_0 = 2{,}5\cdot10^{10}$; $\tau = 5$ мин; $t = 2$ мин.

Ответ: 152 МэВ

9-13. При распаде ядер радиоактивного изотопа выделилось Q тепла за время t. Первоначальное число ядер этого изотопа N_0, а период полураспада равен T. Найти энергетический выход (в МэВ) реакции деления одного ядра. $Q = 0{,}2$ Дж; $N_0 = 2{,}5\cdot10^{10}$; $T = 2$ мин; $t = 5$ мин.

Ответ: 60,7 МэВ

9-14. При распаде ядер радиоактивного изотопа выделилось Q тепла за время t. Первоначальное число ядер этого изотопа N_0, а постоянная распада равна λ. Найти энергетический выход (в МэВ) реакции деления одного ядра. $Q = 0{,}2$ Дж; $N_0 = 2{,}5\cdot10^{10}$; $\lambda = 0{,}05$ с$^{-1}$; $t = 2$ мин.

Ответ: 50,1 МэВ

9-15. При распаде ядер радиоактивного изотопа выделилось Q тепла за время t. Первоначальное число ядер этого изотопа N_0, энергетический выход реакции деления одного ядра $E_В$. Найти период полураспада ядер этого изотопа (в мин). $Q = 0{,}2$ Дж; $E_В = 100$ МэВ; $N_0 = 2{,}5\cdot10^{10}$; $t = 2$ мин.

Ответ: 2 мин

9-16. Радиоактивный образец, содержащий изотоп с периодом полураспада T, поместили в герметичный сосуд. Сколько процентов ядер образца

а) распадется за промежуток времени от t_1 до t_2?

б) останетсячерез время t_1?

t_1 = 1 мин; t_2 = 3 мин; T = 2 мин.

Ответы: а) 35,4%; б) 70,7 %

9-17. Радиоактивный образец, содержащий изотоп с периодом полураспада T, поместили в герметичный сосуд. Через какое время t_1 в образце останется 30% радиоактивных ядер этого изотопа? T = 2 мин.

Ответ: 208 с=3,47 мин

9-18. Радиоактивный образец, содержащий изотоп с периодом полураспада T, поместили в герметичный сосуд. Через какое время t_1 распадется 30% радиоактивных ядер этого изотопа? T = 2 мин.

Ответ: 61,7 с=1,03 мин

9-19. Радиоактивный образец поместили в герметичный сосуд. Найти период полураспада ядер этого образца, если через время t_1 = 1 мин.

а) распадается 30% от первоначального количества этих ядер?

б) останется 30% от первоначального количества этих ядер?

Ответы: а) 117 с=1,94 мин; б) 34,5 с=0,576 мин

9-20. Радиоактивный образец поместили в герметичный сосуд. Найти постоянную распада ядер этого образца, если через время t_1 = 1 мин.

а) распадается 30% от первоначального количества этих ядер?

б) останется 30% от первоначального количества этих ядер?

Ответы: а) 0,00594 $с^{-1}$; б) 0,0201 $с^{-1}$

9-21. Радиоактивный образец поместили в герметичный сосуд. Найти среднее время жизни ядер этого образца, если через время t_1 = 1 мин останется 30% от первоначального количества этих ядер?

Ответ: 49,8 с=0,83 мин

30. Определения, законы, качественные вопросы.

10-1. Из эксперимента Резерфода по рассеянию α-частиц на атомах вещества следует, что вся масса атома сосредоточена в очень малой области пространства, размеры которой не превышают величины ...

10-2. Спектры излучения, которые состоят из отдельных узких спектральных линий, называются ...

10-3. В водородоподобном атоме электрон переходит с пятой орбиты на первую, излучая квант света. При этом спектральная линия, соответствующая этому переходу, принадлежит серии ...

10-4. В водородоподобном атоме электрон переходит с седьмой орбиты на вторую, излучая квант света. При этом спектральная линия, соответствующая этому переходу, принадлежит серии ...

10-5. В водородоподобном атоме электрон переходит с четвертой орбиты на третью, излучая квант света. При этом спектральная линия, соответствующая этому переходу, принадлежит серии ...

10-6. На какую орбиту должен перейти электрон с восьмой орбиты атома водорода, чтобы спектральная линия, соответствующая этому переходу, находилась в видимом диапазоне спектра излучения?

10-7. На какую орбиту должен перейти электрон с восьмой орбиты атома водорода, чтобы спектральная линия, соответствующая этому переходу, находилась в ультрафиолетовом диапазоне спектра излучения?

10-8. На какую орбиту должен перейти электрон с четвертой орбиты атома водорода, чтобы спектральная линия, соответствующая этому переходу, находилась в инфракрасной области спектра излучения?

10-9. На какую ближайшую орбиту должен перейти электрон с первой орбиты атома водорода, чтобы в спектре излучения могли появиться видимые глазом спектральные линии?

10-10. На какую ближайшую орбиту должен перейти электрон с первой орбиты атома водорода, чтобы в спектре излучения могли появиться спектральные линии в инфракрасной области излучения?

10-11. Излучение испускается или поглощается атомом в виде светового кванта энергии $\hbar\omega$ при переходе электрона из одного стационарного состояния в другое. Величина кванта равна разности энергий этих состояний. Это утверждение сформулировал ...

10-12. Гипотезу о том, что частицы вещества обладают не только корпускулярными, но волновыми свойствами, выдвинул ...

10-13. Основным уравнением квантовой механики является уравнение ...

10-14. Состояние микрочастицы описывается в квантовой механике функцией, которая называется ...

10-15. Квадрат модуля волновой функции, описывающей состояние микрочастицы, равен величине, которая называется ...

10-16. Если проинтегрировать плотность вероятности по всему объему пространства, т.е. $\int|\psi|^2\,dV$, то интеграл будет равен ...

10-17. Частица находится в прямоугольной потенциальной яме шириной a с бесконечными стенками. Чему равна плотность вероятности найти частицу около стенки ...

10-18. Состояние частицы описывается волновой функцией $\psi(x, y, z)$. Чему равна вероятность найти частицу в точке с координатами (x_1, y_1, z_1)?

10-19. Микрочастица налетает на барьер, энергия которого больше энергии самой частицы. При этом частица оказывается по другую сторону барьера. Это явление называется ...

10-20. При неупругом столкновении электрона с атомом газа электрон может перейти на более высокую боровскую орбиту. Такое явление называется ...

10-21. При неупругом столкновении электрона с атомом газа электрон может преодолеть притяжение ядра и оторваться от атома. Такое явление называется ...

10-22. Чему равен самый маленький момент импульса электрона в атоме водорода в теории Бора?

10-23. Гиромагнитное отношение для атома водорода определяет связь между механическим моментом импульса электрона и ...

10-24. Гиромагнитное отношение для атома водорода определяет связь между магнитным моментом электрона и ...

10-25. Нельзя одновременно определить точные значения сопряженных величин, таких как координату x и проекцию импульса на эту ось p_x. Это утверждение называется принципом ...

10-26. Если потенциальный барьер сделать выше при той же самой ширине, то вероятность прохождения частица за счет туннельного эффекта должна ...

10-27. Если потенциальный барьер сделать уже при той же высоте, то вероятность прохождения частица за счет туннельного эффекта должна ...

10-28. Если потенциальный барьер сделать ниже при той же ширине, то вероятность прохождения частица за счет туннельного эффекта должна ...

10-29. Если потенциальный барьер сделать шире при той же высоте, то вероятность прохождения частица за счет туннельного эффекта должна ...

10-30. Назовите четвертое квантовое число для электрона в атоме:

1) главное; 2) орбитальное; 3) магнитное; 4) ....

10-31. Назовите четвертое квантовое число для электрона в атоме:

1) спиновое; 2) орбитальное; 3) магнитное; 4) ....

10-32. Назовите четвертое квантовое число для электрона в атоме:

1) спиновое; 2) главное; 3) магнитное; 4) ....

10-33. Назовите четвертое квантовое число для электрона в атоме:

1) спиновое; 2) главное; 3) орбитальное; 4) ....

10-34. Как называется величина, определяемая по формуле $\hbar\sqrt{l(l+1)}$, где l – орбитальное квантовое число.

10-35. Как называется величина, определяемая по формуле $\mu_Б\sqrt{l(l+1)}$, где l – орбитальное квантовое число, а $\mu_Б$ – магнетон Бора?

10-36. Как называется величина, определяемая по формуле $\mu_Б m$, где m – магнитное квантовое число, а $\mu_Б$ – магнетон Бора?

10-37. Как называется величина, определяемая по формуле $\hbar m$, где m – магнитное квантовое число, а $\hbar$ – постоянная Планка?

10-38. В одном квантовом состоянии, при котором одинаковы все квантовые числа, не может находиться два электрона в одной квантовой системе. Это утверждение называется принципом ...

10-39. Орбитальное квантовое число некоторого электрона в оболочке равно 3. Чему может быть равно главное квантовое число для этого электрона?

10-40. Орбитальное квантовое число некоторого электрона в оболочке равно 3. Чему может быть равно магнитное квантовое число для этого электрона?

10-41. Магнитное квантовое число некоторого электрона в оболочке равно (–3). Чему может быть равно орбитальное квантовое число для этого электрона?

10-42. Магнитное квантовое число некоторого электрона в оболочке равно (–3). Чему может быть равно главное квантовое число для этого электрона?

10-43. Главное квантовое число некоторого электрона в оболочке равно 3. Чему может быть равно орбитальное квантовое число для этого электрона?

10-44. Главное квантовое число некоторого электрона в оболочке равно 3. Чему может быть равно магнитное квантовое число для этого электрона?

10-45. Спин некоторого электрона в оболочке равен 1/2. Чему может быть равно магнитное квантовое число для этого электрона?

10-46. Как может изменяться орбитальное квантовое число при изменении состояния электрона в атоме (правило отбора)?

10-47. Как может изменяться магнитное квантовое число при изменении состояния электрона в атоме (правило отбора)?

10-48. При помещении источника в магнитное поле его спектральные линии испытывают расщепление. Это явление называется эффектом ...

10-49. Нуклиды с одинаковым числом протонов, но с разным числом нейтронов в ядре, называются ...