

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт горного дела и строительства

Кафедра «Механика материалов и геотехнологии»

Утверждено на заседании кафедры  
«Механика материалов и геотехнологии»  
«10» сентября 2024 г., протокол № 1

Заведующий кафедрой

  
\_\_\_\_\_ С.В. Анциферов

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ  
по дисциплине (модулю)  
«Сопротивление материалов»**

**основной профессиональной образовательной программы  
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки

**27.03.04 Управление в технических системах**

с направленностью (профилем)

**«Цифровые технологии в системах обеспечения качества»**

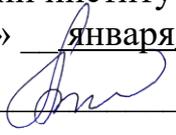
Форма обучения: *очная*

Идентификационный номер образовательной программы: 270304-01-24

Тула 2024

Методические указания к самостоятельной работе студентов составлены доцентом И.Ю. Ворониной и обсуждены на заседании кафедры механики материалов и геотехнологии института горного дела и строительства.

Протокол № 7 от «19» января 2024 г.

И.о. зав. кафедрой \_\_\_\_\_  С.В. Анциферов

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	4
ВВЕДЕНИЕ.....	5
Вопросы для самопроверки.....	17
Задачи для самостоятельного решения.....	20
Выводы.....	21
РАЗДЕЛ 1. Растяжение (сжатие) прямолинейного бруса.....	22
Основные теоретические сведения и расчетные формулы.....	22
Вопросы для самопроверки.....	45
Задачи для самостоятельного решения.....	47
Выводы.....	48
РАЗДЕЛ 2. Геометрические характеристики плоских фигур....	49
Основные теоретические сведения и расчетные формулы.....	49
Вопросы для самопроверки.....	63
Задачи для самостоятельного решения.....	64
Выводы.....	66
РАЗДЕЛ 3. Кручение бруса.....	67
Основные теоретические сведения и расчетные формулы.....	67
Вопросы для самопроверки.....	80
Задачи для самостоятельного решения.....	82
Выводы.....	85
РАЗДЕЛ 4. Изгиб прямого бруса.....	86
Основные теоретические сведения и расчетные формулы.....	86
Вопросы для самопроверки.....	115
Задачи для самостоятельного решения.....	117
Выводы.....	121
ЛИТЕРАТУРА.....	123
ПРИЛОЖЕНИЯ: .....	125
Справочные материалы.....	125
Таблицы сортамента прокатной стали.....	129

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель внеаудиторной работы - научить студентов осмысленно и самостоятельно работать с учебным материалом в рамках курса «Сопротивление материалов», творчески применять полученные знания, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свою квалификацию.

Методические указания по сопротивлению материалов предназначены для оказания помощи студентам при выполнении самостоятельной работы.

С этой целью в методические указания включены в сжатом виде теоретические сведения, основные расчетные формулы, примеры, иллюстрирующие приложение теории к решению задач. Качество усвоения материала студенты могут проверить самостоятельно, ответив на контрольные вопросы по теоретической части курса и решив типовые задачи, не требующие громоздких вычислений.

В каждом разделе большинство задач не связано друг с другом и могут рассматриваться отдельно. Это позволяет в соответствии с учебными планами различных направлений и специальностей достаточно просто компоновать содержание и объем внеаудиторной работы студентов.

## ВВЕДЕНИЕ

1. Наука о сопротивлении материалов. Предмет и задачи курса, его место среди других дисциплин.

Одной из основных задач техники является создание прочных, устойчивых, надежных, долговечных, безопасных в эксплуатации и в то же время экономичных сооружений и конструкций. При проектировании инженеру приходится выбирать материал и определять необходимые размеры отдельных элементов конструкций, что невозможно без изучения науки о сопротивлении материалов

*Сопротивление материалов – это наука о прочности, жёсткости и устойчивости частей конструкции.*

Под *прочностью* понимается способность конструкции, ее отдельных элементов и частей выдерживать определенную нагрузку без разрушения.

*Жесткость* конструкции и составляющих ее элементов предполагает способность противостоять внешним нагрузкам таким образом, чтобы при этом изменение формы и размеров элементов не превышали заранее установленной величины.

*Устойчивость* – свойство всей конструкции и ее элементов сохранять начальную форму равновесия. Равновесие считается устойчивым, если под действием малых возмущений (силовых, температурных) возникают малые отклонения от начального состояния.

*Сопротивление материалов* изучает поведение различных материалов при действии на них сил и указывает, как рационально подобрать для каждого элемента конструкции надлежащий материал и размеры, исходя из требований надежности и экономичности.

Являясь одной из дисциплин общинженерной подготовки, сопротивление материалов в своей теоретической части широко использует методы теоретической механики и математики, а в экспериментальной – физики и материаловедения. Сопротивление материалов изучает прочность, жесткость и устойчивость тел сравнительно простой формы, являющихся элементами сложных инженерных конструкций, машин и механизмов. Расчет конструкций в целом рассматривается рядом инженерных дисциплин, к которым относятся «Строительная механика», «Строительные конструкции», «Детали машин» и другие.

2. Реальный элемент конструкции и его расчетная схема.

Расчет любого элемента конструкции начинается с выбора его *расчетной схемы*. В сопротивлении материалов при расчетах на прочность, жесткость и устойчивость реальный элемент конструкции заменяется его упрощенной, *освобожденной от второстепенных, несущественных особенностей*, схемой, называемой *расчетной*.

Для одного и того же элемента можно предложить несколько расчетных схем, отличающихся друг от друга степенью упрощения (идеализации), но что особенно важно в практической деятельности – одной и той же расчетной схеме могут соответствовать различного вида реальные элементы конструкции, часто совершенно не похожие друг на друга. Это важнейшее свойство расчетной схе-

мы позволяет, после ее анализа и изучения, получить единый метод расчета элементов конструкций, имеющих одну и ту же расчетную схему.

Какие бы расчетные схемы ни предлагались к рассмотрению, в каждой из них обязательно присутствуют определенные идеализации свойств реального объекта. В первую очередь идеализируются структура и свойства материала. Материал предполагается *сплошным, однородным, изотропным и деформируемым*.

*Сплошность* материала означает отсутствие в нем каких-либо пустот т.е. считается, что материал непрерывно занимает весь объем тела.

*Однородность* материала предполагает, что его свойства во всех точках тела одинаковы.

*Изотропия материала* означает, что его физико–механические свойства по любому направлению одинаковы.

В сопротивлении материалов сплошная, однородная и изотропная среда наделяется свойством *упругости*.

*Упругость* – свойство материала восстанавливать свое начальное состояние после удаления внешних сил.

В реальных телах под действием внешних сил происходит изменение взаимного расположения частиц, при этом, как правило, изменяются форма, размеры и объем тела.

Подобное *изменение взаимного расположения частиц тела, вызывающее изменение его размеров и форм, называется деформацией*.

Тела, *полностью* восстанавливающие свое начальное состояние после снятия нагрузки, называются *идеально-упругими*. Для большинства материалов до определенного предела деформации упруги и пропорциональны приложенным нагрузкам. Подобные деформации называются *линейно-упругими*, а материал – *линейно-упругим*.

При определенных условиях после снятия нагрузки некоторые материалы могут не полностью восстанавливать свое начальное состояние, а получать *остаточные*, или *пластические* деформации.

Деформации, зависящие от времени, называются *вязкими*, а свойство тел деформироваться во времени при действии постоянной нагрузки называют *ползучестью*.

При выборе расчетной схемы геометрические формы тел (элементов), из которых состоит конструкция, принято относить к одной из трех групп: *брусья (стержни), оболочки и пластинки, массивные тела*.

*Брусом* или *стержнем* называется тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с его длиной (рис.1).

*Ось бруса* это геометрическое место точек, являющихся центрами тяжести поперечных сечений. В зависимости от формы оси, брусья могут быть прямолинейными и криволинейными. Поперечные сечения могут быть постоянными по всей длине, постоянными в пределах одного или нескольких его участков, а также плавно изменяться вдоль оси бруса.

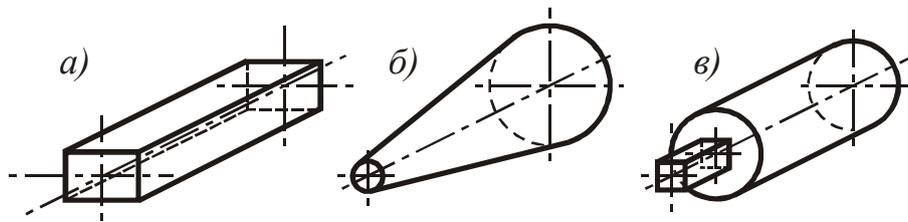


Рис. 1. Разновидности брусьев: *a* - брус постоянного поперечного сечения; *б* - брус с плавно изменяющимся поперечным сечением; *в* - ступенчатый брус

*Примечание:* в ряде случаев при решении конкретных задач вместо бруса, имеющего определенную форму поперечного сечения, удобно рассматривать его расчетную схему, представляющую его ось (рис. 2).

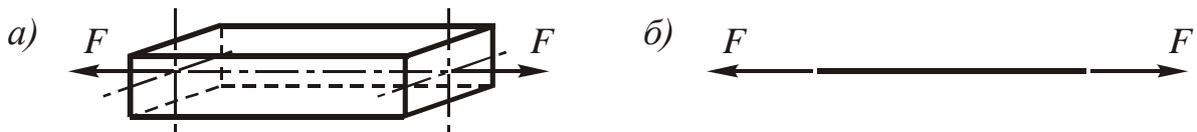


Рис. 2. Брус и его расчетная схема: *a* - брус прямоугольного поперечного сечения; *б* - его расчетная схема

*Оболочкой* (рис. 3, *a*) называется тело, один из размеров которого – толщина - значительно меньше двух остальных – длины и ширины.

Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, называется *срединой*. Если срединная поверхность оболочки представляет собой плоскость, то тело называется *пластинкой* (рис. 3, *б*).

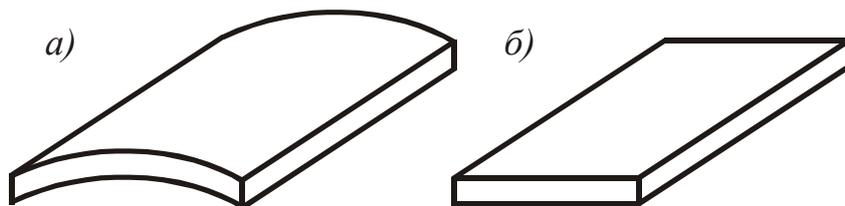


Рис. 3. Расчетные схемы оболочки (*a*) и пластинки (*б*)

*Массивным* называется тело, у которого все три размера одного порядка.

В курсе сопротивления материалов, как правило, изучается стержень (брус) или конструкции, элементами которых являются стержни (рис. 4).

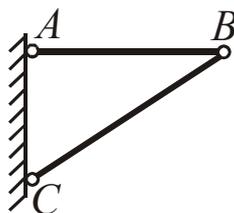


Рис. 4. Расчетная схема стержневой конструкции (системы)

### 3. Основные гипотезы и принципы.

При рассмотрении поведения тела под действием внешних нагрузок в сопротивлении материалов вводится ряд предположений о характере его деформаций, что существенно упрощает вывод формул и построение методов его расчета на прочность, жесткость и устойчивость.

Подобные предположения называются *гипотезами*. В данном разделе упомянем только одну из них – *гипотезу плоских сечений*, сформулированную Бернулли: *поперечные сечения бруса, плоские до деформации, остаются плоскими и после его деформации*.

При анализе расчетной схемы и решении подавляющего большинства задач в сопротивлении материалов, кроме соответствующих гипотез, используют некоторые *предпосылки*, называемые *принципами*. Их три: принцип *относительной жесткости систем* (принцип *неизменности начальных размеров*), принцип *независимости действия сил* (принцип *суперпозиции*), принцип Сен-Венана.

*Примечание:* Баре де Сен-Венан – французский ученый, один из создателей теории упругости.

Первый из вышеперечисленных принципов основан на том, что в большинстве случаев форма тела под действием внешних сил изменяется несущественно, что позволяет при составлении уравнений равновесия считать тело недеформированным, имеющим те же геометрические размеры, какие оно имело до нагружения.

**Пример 1.** На рис. 5, *а* показана стержневая система, состоящая из двух одинаковых стержней и нагруженная в узле *A* силой *F*. Под действием этой силы стержни деформируются, и узел *A* смещается вниз (рис. 5, *б*).

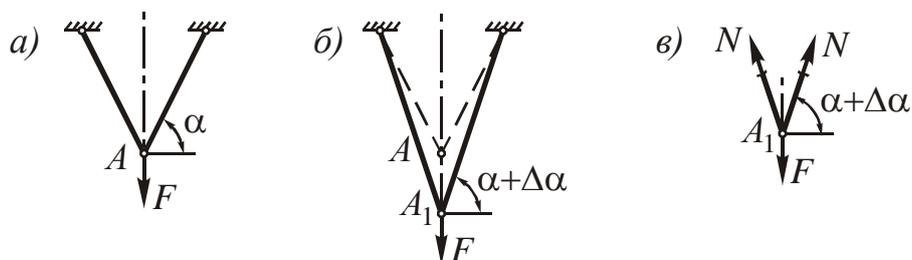


Рис. 5. Применение принципа неизменности начальных размеров к расчету стержневой системы: *а* - симметричная стержневая система до деформации; *б* - стержневая система после деформации; *в* - вырезанный узел  $A_1$

Используя методы теоретической механики можно показать, что внутренние усилия (рис. 5, *в*), действующие в стержнях, равны и могут быть найдены из выражения

$$N = \frac{F}{2 \sin(\alpha + \Delta\alpha)}.$$

Приращением  $\Delta\alpha$  угла  $\alpha$  можно пренебречь в силу малости деформаций стержней и, как следствие этого, *при составлении уравнений статики можно считать элементы конструкции абсолютно жесткими*.

Таким образом,

$$N = \frac{F}{2 \sin \alpha}.$$

Принцип *независимости действия сил* может быть сформулирован следующим образом: *результат действия на конструкцию нескольких внешних сил, равносильен сумме результатов действия каждой из этих сил в отдельности.*

**Пример 2.** Принцип независимости действия сил можно проиллюстрировать, рассмотрев перемещение точки  $A$  бруса под действием внешних сил  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 6).

Перемещение  $f_A$  точки  $A$  от действия этих сил может быть представлено в виде суммы перемещений

$$f_A = f_1 + f_2,$$

где  $f_1$  и  $f_2$  - перемещения от сил  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 6, б, в)

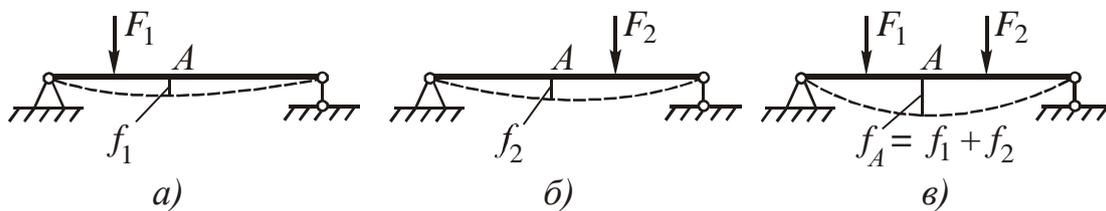


Рис. 6. Иллюстрация принципа независимости действия сил:

$a$  – прогиб  $f_1$  в сечении  $A$  от действия силы  $F_1$ ;

$б$  – прогиб  $f_2$  в том же сечении от действия силы  $F_2$ ;

$в$  - полный прогиб  $f_A$  от совместного действия сил  $F_1$  и  $F_2$

*Примечание:* первые два принципа справедливы только при соблюдении пропорциональности между перемещениями и внешними силами.

Принцип *Сен-Венана* утверждает, что замена нагрузки, приложенной к малой части объема тела, статически ей эквивалентной, т.е. имеющей тот же главный вектор и главный момент, вызывает лишь местные деформации.

Применение принципа Сен–Венана позволяет расширить общность основных расчетных формул сопротивления материалов, так как освобождает проектировщика от необходимости учитывать конкретные особенности местного приложения нагрузки.

#### 4. Внешние силы (нагрузки).

Внешние нагрузки (силы), приложенные к упругому телу, являются результатом его взаимодействия с другими телами, жидкими или газообразными средами.

По способу приложения силы делятся на *поверхностные* и *объемные*. Поверхностные силы (рис. 7) распределены по поверхности тела, например, давление воды на плотину, давление газов в стволе оружия и т.д. Величина нагруз-

ки, приходящаяся на единицу площади тела, называется *интенсивностью нагрузки* и обозначается  $p$ . Измеряется эта величина в паскалях  $\dot{\text{Па}} = \frac{\dot{\text{Н}}}{\text{м}^2}$ . В расчетах обычно используют кратную паскалю единицу  $\text{МПа}$  – мегапаскаль, равный  $10^6 \text{ Па}$ .

*Объемные силы*, такие, как собственный вес, силы инерции распределены по всему объему тела, и в большинстве расчетов, если нет специальной оговорки, не учитываются в силу своей малости по сравнению с другими внешними силами.

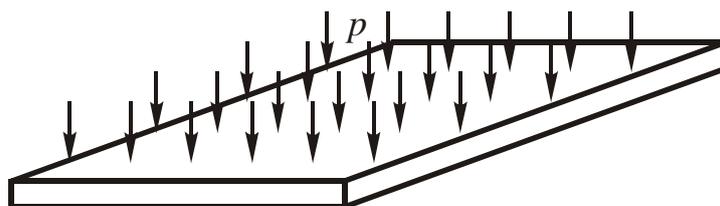


Рис. 7. Внешние силы, распределенные по поверхности тела

Поверхностные нагрузки могут быть *распределенными* и *сосредоточенными*.

*Распределенными нагрузками* называются силы, приложенные на некоторой площади или длине элемента конструкции.

В инженерной практике расчетов часто встречаются нагрузки, распределенные вдоль линии, так называемые *погонные нагрузки*. Интенсивностью подобной нагрузки, обозначаемой  $q$ , называют величину нагрузки, приходящуюся на единицу длины и измеряемую в  $\frac{\dot{\text{Н}}}{\text{м}}$  или  $\frac{\hat{\text{Н}}}{\text{м}}$ . Интенсивность нагрузки  $q$  может быть постоянной или переменной вдоль линии ее приложения.

Характер изменения подобной нагрузки по длине представляется графиком, называемым *эпюрой*. Для равномерно распределенной нагрузки эпюра  $q$  имеет прямоугольное очертание, для нагрузки, изменяющейся линейно (треугольной нагрузки) - треугольное очертание (рис. 8). В общем случае очертание эпюры определяются зависимостью  $q = f(z)$ .

При решении ряда задач приходится вычислять равнодействующую распределенной нагрузки, ее проекции на координатные оси и моменты относительно какой-либо точки. Напомним, что *величина равнодействующей распределенной нагрузки равна площади эпюры этой нагрузки и приложена в ее центре тяжести* (рис. 9).

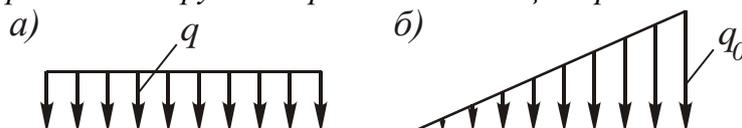


Рис. 8. Эпюры нагрузок, распределенных по длине: а - эпюра равномерно распределенной нагрузки; б - эпюра распределенной нагрузки, изменяющейся линейно

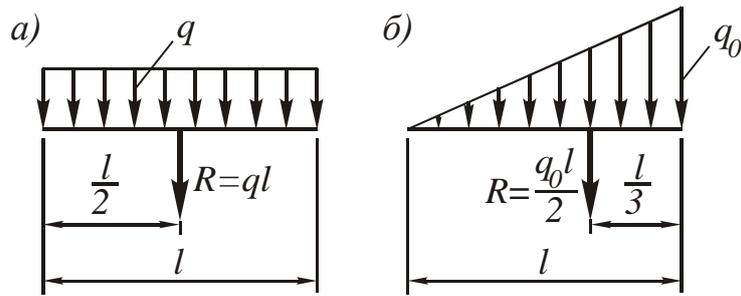


Рис. 9. Определение величины равнодействующей  $R$  распределенной нагрузки и точки ее приложения при:  $a$  - равномерно распределенной нагрузке;  $b$  - распределенной нагрузке, изменяющейся линейно

Проекция распределенной нагрузки на любую ось равна проекции ее равнодействующей  $R$ , момент относительно какой-либо точки - моменту ее равнодействующей (рис. 10).

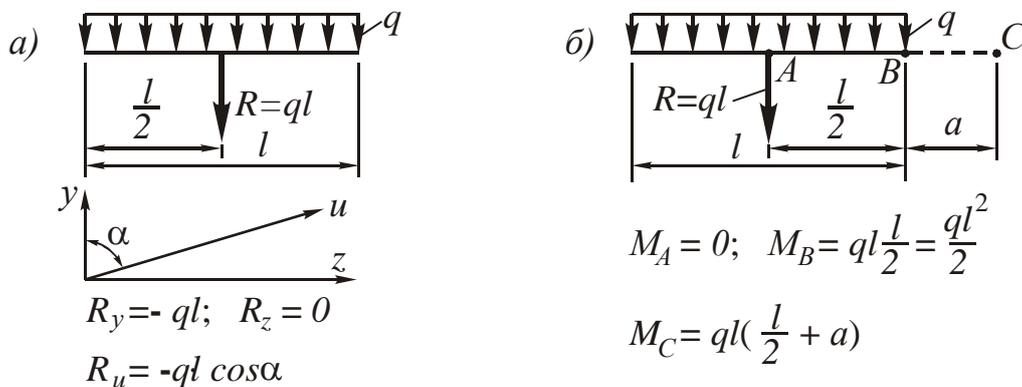


Рис. 10. Определение проекций и моментов распределенной нагрузки:  $a$  - проекции на оси  $y, z, u$ ;  $b$  - моменты относительно точек  $A, B, C$

Если площадь приложения поверхностной нагрузки мала по сравнению с размерами тела, распределенная нагрузка заменяется ее равнодействующей, которая называется *сосредоточенной силой* (рис. 11).

Кроме перечисленных, встречаются нагрузки, называемые *сосредоточенными моментами*, или *парами сил*. Размерность пары сил  $\hat{I} \cdot \hat{i}$  или  $\hat{e}\hat{I} \cdot \hat{i}$ . Напомним, что проекция пары сил на любую ось равна нулю, момент пары относительно любой точки плоскости равен моменту самой пары.

По характеру действия во времени нагрузки делятся на *статические* и *динамические*.

Любые нагрузки, приложенные к конструкции, изменяются во времени, что приводит к изменению ее деформации и возникновению сил инерции. Если внешние силы намного превосходят силы инерции, последними можно пренебречь и считать внешние силы постоянными, не изменяющимися во времени – *статическими*. Если же инерционные силы сравнимы с внешними (силами) нагрузками, то они рассматриваются как *динамические* (рис. 12).



Рис. 11. Схема к определению сосредоточенной силы

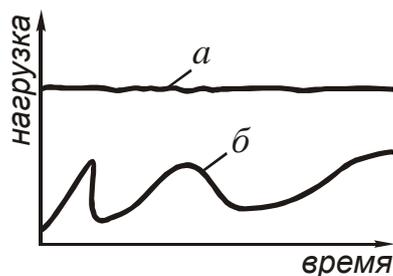


Рис. 12. Графики, показывающие изменение нагрузок во времени: а - статическая; б - динамическая

### 5. Внутренние силы, метод сечений.

Под действием внешних сил упругое тело деформируется, расстояния между его частицами изменяются и, как следствие этого, внутри тела возникают так называемые *внутренние силы* (*внутренние усилия*). Внутренние силы – это силы взаимодействия между частицами тела, препятствующие его деформации.

Для определения внутренних усилий в сопротивлении материалов применяется *метод сечений*.

Пусть нам необходимо определить внутренние усилия в сечении *AA* тела, к которому приложена система внешних сил  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$  (рис. 13).

Для решения этой задачи следует последовательно выполнить следующие четыре операции:

- рассечь мысленно тело на две части;
- отбросить одну из частей – любую – левую или правую;
- приложить в плоскости сечения оставшейся части распределенные по сечению внутренние силы (рис. 14);

- для вычисления внутренних сил составить необходимые уравнения равновесия оставшейся части бруса, находящейся под действием внешних и внутренних сил.

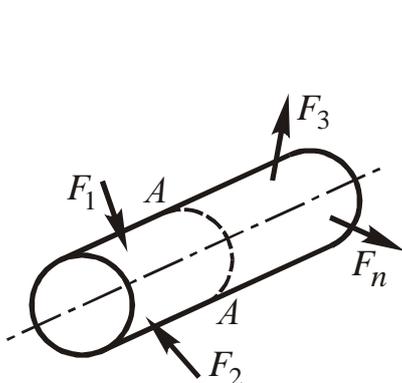


Рис. 13. Тело под действием уравновешенной системы внешних сил

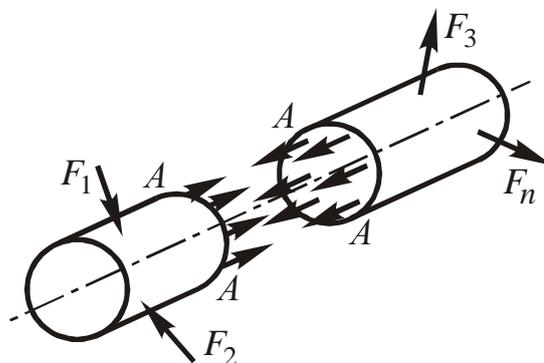


Рис. 14. Внешние и внутренние силы

*Примечание:* в общем случае можно составить шесть уравнений равновесия – три равенства нулю сумм проекций сил на координатные оси и три равенства нулю сумм моментов

сил относительно координатных осей. При рассмотрении частных случаев число уравнений равновесия может быть равно единице, двум, трем и т.д.

Внутренние силы, распределенные по сечению в общем случае неравномерно, можно перенести в его центр тяжести и привести к *главному вектору*  $R$  и *главному моменту*  $M$  (рис. 15).

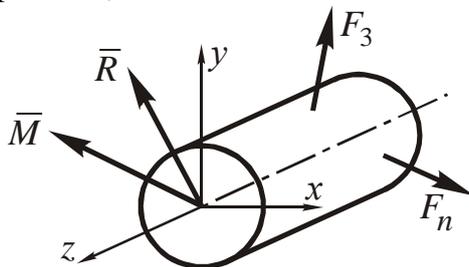


Рис. 15. Главный вектор и главный момент в поперечном сечении бруса

### Рассмотрим пример определения внутренних усилий в поперечных сечениях бруса.

**Пример 3.** Определить, пользуясь методом сечений, внутренние усилия, действующие в поперечных сечениях 1, 2, 3 бруса, показанного на рис. 16, а.

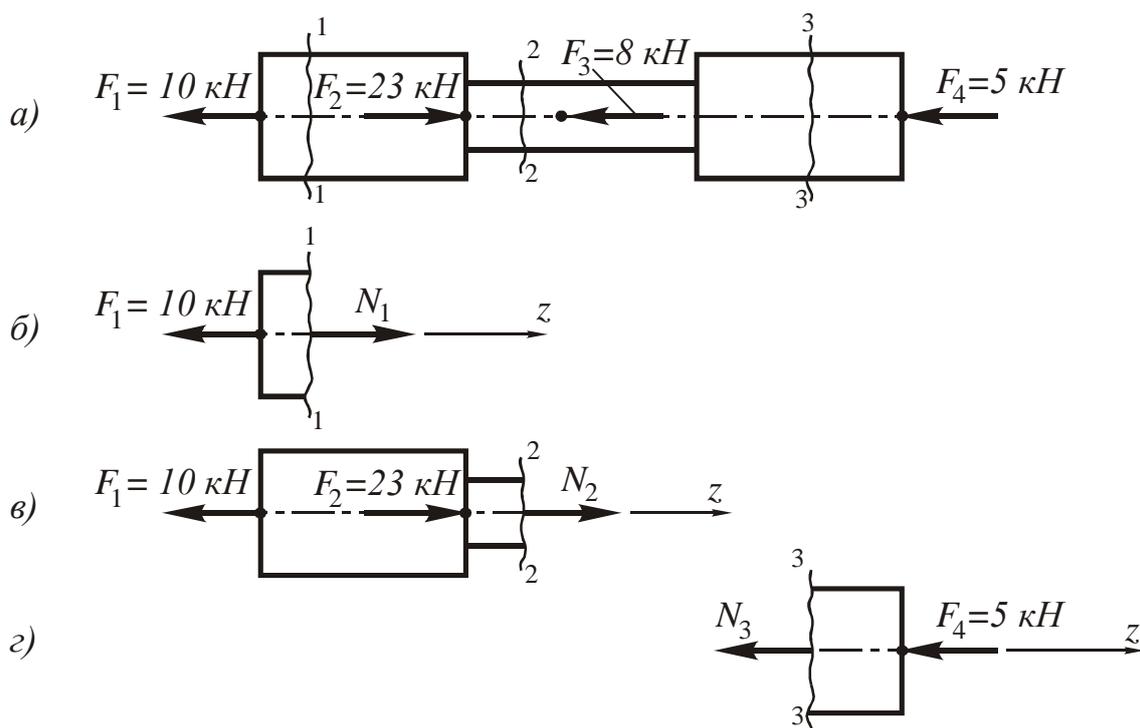


Рис. 16. Определение внутренних усилий в поперечных сечениях бруса:

а - брус под действием системы внешних сил;

б, в, г - схемы для определения усилий в сечениях 1, 2 и 3

Мысленно рассечем брус сечением 1-1 на две части и отбросим правую часть. К оставшейся левой части в месте разреза приложим внутреннее растягивающее усилие  $N_1$ , направленное вдоль оси бруса. Приравняв нулю алгебраическую сумму проекций внешних и внутренних сил на продольную ось  $z$ , по-

лучим уравнение равновесия, из которого найдем величину внутреннего усилия  $N_1$ :

$$\sum Z = 0: -10 + N_1 = 0, N_1 = 10 \text{ е́т} .$$

Повторив аналогичные операции для сечения 2-2 (рис. 16, в), имеем:

$$\sum Z = 0; -10 + 23 + N_2 = 0, N_2 = -13 \text{ е́т} .$$

*Примечание:* отрицательное значение внутреннего усилия означает, что сила  $N_2$  не *растягивает* брус, как это показано на рис. 16, в, а *сжимает* его.

Отбросим часть бруса, расположенную слева от сечения 3-3, а для оставшейся правой части (рис. 16, г), проделав операции, описанные выше, получим

$$\sum Z = 0; -5 - N_3 = 0, N_3 = -5 \text{ е́т} .$$

В сечении 3 стержень *сжат*.

## 6. Напряжения.

*Интенсивность внутренних сил, т.е. величина внутренней силы, приходящейся на единицу площади, выделенной вокруг данной точки, называется напряжением.* Выделим вокруг рассматриваемой точки  $B$  малую площадь  $\Delta A$  (рис. 17), обозначим через  $\Delta R$  равнодействующую внутренних сил, распределенных по площади  $\Delta A$ .

Отношение  $\frac{\Delta R}{\Delta A} = p_{\text{ср}}$  называется *средним напряжением на площадке*  $\Delta A$ . Если площадку  $\Delta A$  уменьшать, стягивая ее к точке  $B$ , то в пределе получим *напряжение в точке  $B$* , обозначаемое  $p$ :

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A} .$$

Напряжение – это векторная величина, характеризующаяся направлением и численной мерой (модулем). В системе единиц СИ напряжение выражается в паскалях ( $\text{Па}$ ) или мегапаскалях ( $\text{МПа}$ ),  $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$ .

Пусть в некоторой точке сечения действует напряжение, которое на рис. 18 обозначено  $p$ .

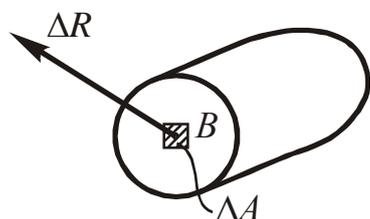


Рис. 17. К определению среднего напряжения на площадке  $\Delta A$

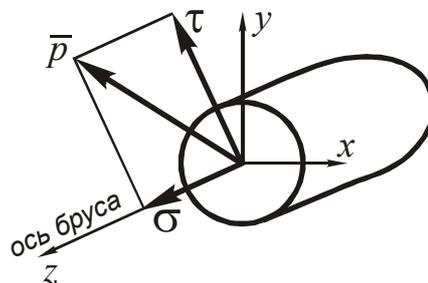


Рис. 18. Полное, нормальное и касательное напряжения в поперечном сечении бруса

Разложим вектор  $\vec{p}$  на две составляющие – нормальную и касательную к сечению, обозначенные на рис. 18 соответственно через  $\sigma$  и  $\tau$ .

Напряжение  $\sigma$  называется *нормальным напряжением*, оно направлено перпендикулярно сечению, напряжение  $\tau$ , действующее в плоскости сечения, называется *касательным напряжением*.

## 7. Перемещения и деформации.

Возьмем две точки  $A$  и  $B$  тела, расстояние между которыми равно  $l$  и приложим к телу систему внешних сил.

Вследствие деформации точки  $A$  и  $B$  сместятся (рис. 19) и займут положение  $A_1$  и  $B_1$ , расстояние между точками изменится на величину  $\Delta l$ .

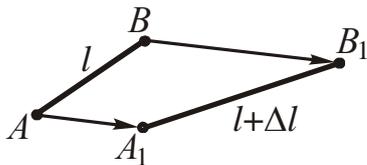


Рис. 19. Перемещения:  $AA_1$  - перемещение точки  $A$ ;  $BB_1$  - перемещение точки  $B$

Вектор  $\vec{AA_1}$  называется *перемещением* точки  $A$ , вектор  $\vec{BB_1}$  - *перемещением* точки  $B$ .

*Абсолютным удлинением* отрезка  $AB$  называется разность  $\Delta l = A_1B_1 - AB$ .

Отношение  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$  называется

*относительной линейной деформацией*.

Вернемся вновь к упругому телу и построим прямой угол  $AOC$ . После деформации тела системой внешних сил точки  $A, O, C$  сместятся и займут положения  $A_1, O_1, C_1$ , а прямой угол  $AOC$  изменяется на величину  $\gamma_{A_1O_1C_1}$  (рис. 20).

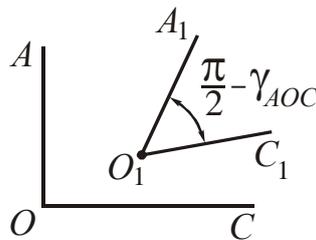


Рис. 20. Определение относительной угловой деформации в точке

Изменение прямого угла  $\gamma_{A_1O_1C_1}$  называется *угловой деформацией* в точке  $O$ .

## 8. Внутренние силовые факторы в поперечном сечении бруса.

Как указывалось в п. 5, внутренние силы, распределенные по площади поперечного сечения бруса, могут быть приведены к точке  $O$  - центру тяжести сечения. Разложив главный вектор  $R$  и главный момент  $M$  по трем координатным осям  $x, y, z$  (ось  $z$  направлена вдоль оси бруса, оси  $x, y$  лежат в плоскости

поперечного сечения), получим шесть составляющих векторов: три силы и три момента (рис. 21).

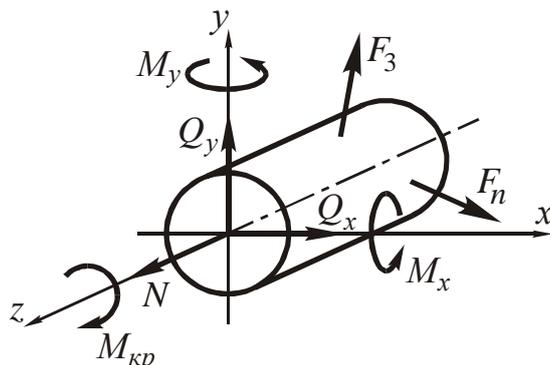


Рис. 21. Внутренние усилия в поперечном сечении бруса

Эти составляющие называются *внутренними силовыми факторами в поперечном сечении бруса*.

Сила  $N$  называется *нормальной* или *продольной силой*,  $Q_x$  и  $Q_y$  называются *поперечными силами*.

Момент  $M_{\text{кр}}$ , поворачивающий сечение вокруг оси бруса (оси  $z$ ), называется *крутящим моментом*, моменты  $\dot{I}_x$  и  $\dot{I}_y$  - *изгибающими моментами* соответственно относительно осей  $x$  и  $y$ .

Таким образом, можно рассматривать следующие *основные виды деформации бруса*: осевое растяжение (сжатие), чистый сдвиг, кручение, чистый изгиб.

При *осевом растяжении* бруса в его поперечном сечении действует только продольная сила  $N$ , остальные пять внутренних усилий равны нулю, при *кручении* отличным от нуля является только крутящий момент  $M_{\text{кр}}$ . Наличие в поперечном сечении только изгибающего момента  $\dot{I}_x$  или  $\dot{I}_y$  соответствует деформации, называемой *чистым изгибом*. При *сдвиге* в поперечном сечении не равны нулю поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$ , остальные силовые факторы равны нулю.

Перечисленные виды деформаций относятся к *простейшим*. В более сложных случаях деформации бруса в его поперечных сечениях могут действовать одновременно несколько внутренних усилий, например, растягивающее усилие и крутящий момент, изгибающий и крутящий моменты. В этом случае говорят, что брус находится в условиях *сложного сопротивления*.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие виды инженерных расчетов рассматриваются в курсе «Сопротивление материалов»?
2. Что такое прочность конструкции или ее элементов?
3. Что понимается под жесткостью всей конструкции или ее отдельных частей?
4. В чем заключается свойство устойчивости конструкции или ее элементов?
5. Какое состояние элемента конструкции считается устойчивым?
6. С какими дисциплинами связано сопротивление материалов?
7. Что такое расчетная схема конструкции?
8. Почему для одной и той же конструкции можно предложить несколько вариантов расчетных схем?
9. В чем состоит идеализация свойств реальных материалов при выборе расчетной схемы? Что такое сплошность, однородность и изотропия материала?
10. Что означает «упругость материала»?
11. Какой материал называется идеально упругим? Линейно-упругим?
12. Что такое пластичность материала? Какие материалы называются пластичными?
13. Какие деформации называются вязкими?
14. Что такое ползучесть материала?
15. Какие формы тел рассматриваются в сопротивлении материалов?
16. Какое тело называется брусом? Чем отличается брус от стержня?
17. Что такое «поперечное сечение стержня»?
18. Чем отличается оболочка от пластинки?
19. В чем состоит гипотеза плоских сечений Бернулли?
20. Перечислите основные принципы механики, применяемые при решении задач курса сопротивления материалов.
21. В чем заключается принцип неизменности начальных размеров? В каких случаях он применяется?
22. В чем заключается принцип независимости действия сил?
23. В чем заключается принцип Сен-Венана? Приведите примеры, иллюстрирующие этот принцип.
24. Какие силы называются внешними?
25. Можно ли считать давление газа в трубопроводе на стенки газопровода внешней силой?
26. Как различаются внешние силы по способу приложения к телу?
27. Что такое интенсивность распределенной нагрузки? В каких единицах измерения она выражается?
28. Во сколько раз один мегапаскаль больше одного паскаля?
29. Приведите примеры нагрузки, распределенной по длине.
30. В каких единицах измерения выражается интенсивность нагрузки, распределенной по длине?
31. Что такое эпюра нагрузки, распределенной по длине?
32. Всегда ли эта эпюра ограничена прямой линией?
33. Чему равна равнодействующая равномерно распределенной нагрузки? Нагрузки изменяющейся по длине линейно?

34. В каких единицах измерения выражается равнодействующая нагрузки, распределенной по длине?
35. Распределённую по длине бруса нагрузку (имеется соответствующая эпюра) требуется заменить равнодействующей ей силой. Где должна быть приложена эта сила? Как определить эту силу?
36. Чему равна проекция равнодействующей распределенной нагрузки на произвольно выбранную координатную ось?
37. Может ли проекция равнодействующей распределенной нагрузки на ось равняться нулю?
38. В каком частном случае проекция равнодействующей распределенной нагрузки на ось численно равна ее величине?
39. В каких единицах измерения выражается проекция равнодействующей нагрузки, распределенной по длине, на произвольно выбранную ось?
40. Как вычисляется момент равнодействующей распределенной нагрузки относительно какой-либо точки?
41. В каких единицах измерения он выражается?
42. Относительно какой точки момент равнодействующей распределенной нагрузки равен нулю?
43. В каком случае распределенная по поверхности нагрузка может быть заменена сосредоточенной силой?
44. В каких единицах измерения выражается модуль пары сил?
45. Как вычислить момент пары сил относительно какой-либо точки плоскости?
46. Всегда ли внешние нагрузки, приложенные к телу, не изменяются во времени (остаются постоянными)?
47. Какие нагрузки называются статическими?
48. Какие нагрузки называются динамическими?
49. Может ли статическая нагрузка изменяться во времени?
50. Что называется внутренними силами?
51. В каких единицах измерения выражаются внутренние силы?
52. С какой целью применяется метод сечений?
53. Из каких операций (этапов) он состоит?
54. В результате каких операций с внутренними силами возникают главный вектор и главный момент?
55. Сколько уравнений равновесия в общем случае можно составить для твердого тела?
56. При вычислении внутренней силы, действующей в поперечном сечении бруса, получен ответ:  $N = -7 \text{ кН}$ . Что означает отрицательный результат?
57. Что такое напряжение?
58. Как определяется напряжение?
59. Как направлено нормальное напряжение по отношению к поперечному сечению? Касательное?
60. В какой плоскости действует касательное напряжение?
61. В каких единицах измерения выражается напряжение?
62. Что понимается под перемещением точки упругого тела при его деформации?

63. Что такое абсолютная деформация? В каких единицах она выражается?
64. Что такое относительная деформация? В каких единицах она выражается?
65. Что такое линейная деформация?
66. Что называется угловой деформацией в точке?
67. Что такое внутренние силовые факторы в поперечном сечении бруса? Сколько их существует в общем случае деформации бруса?
68. Какие силовые факторы действуют в поперечном сечении растянутого бруса?
69. Какой вид деформации испытывает брус, если в его поперечном сечении действует только пара сил, стремящаяся повернуть сечение вокруг продольной оси бруса?
70. Какой вид деформации называется чистым изгибом?
71. Какие виды деформаций бруса называются простыми?
72. Что понимается под сложным сопротивлением бруса?

## КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Вычислить проекцию силы  $F$  на ось  $x$  (рис. 22).

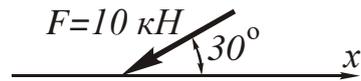


Рис. 22. К задаче 1.

2. Вычислить проекции нагрузки, распределенной по линейному закону, на оси  $x$ ,  $y$  (рис. 23).

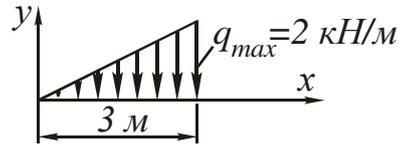


Рис. 23. К задаче 2

3. Вычислить алгебраическую сумму проекций сил, приложенных к брусу, на ось  $y$  (рис. 24).

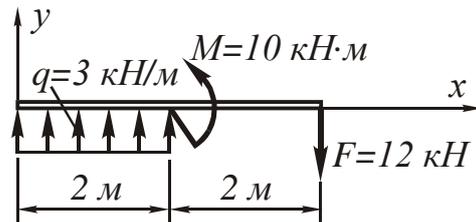


Рис. 24. К задаче 3

4. Вычислить алгебраическую сумму моментов сил, приложенных к брусу, относительно точки  $A$  (рис. 25).

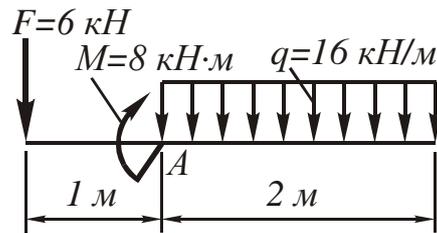


Рис. 25. К задаче 4

5. Вычислить момент нагрузки, распределенной по линейному закону, относительно точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (рис. 26).

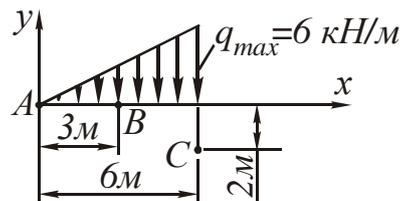


Рис. 26. К задаче 5

6. Сколько независимых уравнений статики можно составить для бруса, показанного на рис. 27?

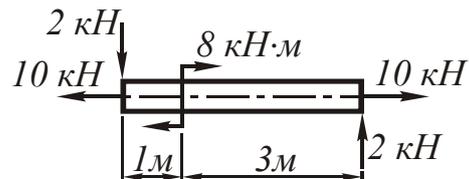


Рис. 27. К задаче 6

## ВЫВОДЫ

1. Сопротивление материалов - это наука о прочности, жёсткости и устойчивости частей конструкции.

2. В сопротивлении материалов при расчетах на прочность, жесткость и устойчивость реальный элемент конструкции заменяется его упрощенной, освобожденной от второстепенных, несущественных особенностей, схемой, называемой расчетной. Для одного и того же элемента можно предложить несколько расчётных схем.

3. При рассмотрении поведения тела под действием внешних нагрузок в сопротивлении материалов вводится ряд предположений о характере его деформаций, подобные предположения называются *гипотезами*.

4. Под действием внешних сил упругое тело деформируется, расстояния между его частицами изменяются и, как следствие этого, внутри тела возникают так называемые *внутренние силы (внутренние усилия)*. Для определения внутренних усилий в сопротивлении материалов применяется *метод сечений*.

5. Интенсивность внутренних сил, т.е. величина внутренней силы, приходящейся на единицу площади, выделенной вокруг данной точки, называется напряжением. Напряжение это векторная величина, характеризующаяся направлением и численной мерой (модулем). В системе единиц СИ напряжение выражается в паскалях ( $Па$ ) или мегапаскалях ( $МПа$ ),  $1 Па = 10^6 Па$ .

6. Нормальное напряжение  $\sigma$  направлено перпендикулярно сечению, касательное напряжение  $\tau$  действует в плоскости сечения.

# РАЗДЕЛ 1

## РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ) ПРЯМОЛИНЕЙНОГО БРУСА

### 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

#### 1. Определение понятия «растяжение (сжатие) бруса».

Центральным (осевым) растяжением или сжатием называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор - продольная сила, обозначаемая  $N_z$  или  $N$ , а все остальные внутренние усилия (поперечные силы, изгибающие моменты и крутящий момент) равны нулю.

Для того чтобы брус работал на растяжение (сжатие), равнодействующая внешних сил, приложенных **по одну сторону** от любого поперечного сечения бруса, должна быть направлена вдоль его оси. Только при этом условии все внутренние силовые факторы, кроме продольной силы, будут равны нулю.

Прямые брусья, работающие на растяжение или сжатие, часто называют *стержнями*.

Простейшие случаи растяжения и сжатия представлены на рис. 1.1, *a* и рис. 1.2, *a*: в центрах тяжести торцовых поперечных сечений бруса приложены две равные и противоположно направленные силы, линии, действия которых совпадают с осью бруса.

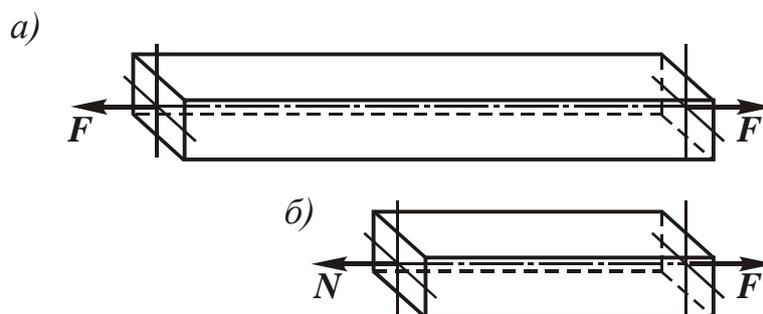


Рис. 1.1. Растяжение бруса: *a* - растянутый брус, *б* - усилие в поперечном сечении

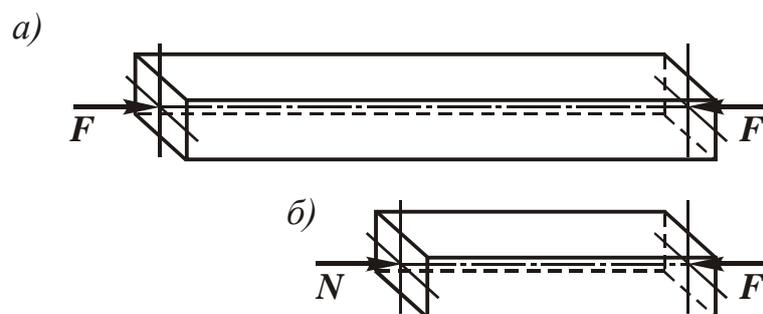


Рис. 1.2. Сжатие бруса: *a* - сжатый брус, *б* - усилие в поперечном сечении

## 2. Определение продольных сил. Построение эпюр продольных сил.

Продольной силой в поперечном сечении бруса называется равнодействующая внутренних нормальных сил, возникающих в этом сечении.

Продольную силу  $N$  условимся считать положительной, если она вызывает растяжение, т. е. направлена от сечения (рис. 1.1, б), и отрицательной, если она вызывает сжатие, т. е. направлена к сечению (рис. 1.2, б).

Для определения значения и направления внутренней продольной силы используют *метод сечений*: продольная сила в поперечных сечениях стержня численно равна алгебраической сумме проекций на его продольную ось  $z$  всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения:

$$N = \sum F_{iz}.$$

В Международной системе единиц (СИ) сила выражается в ньютонах, в расчетах чаще применяется величина в тысячу раз большая – килоньютон ( $\kappa H$ ),  $1 \kappa H = 10^3 H$ .

Внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях стержня, меняются вдоль его продольной оси.

Графики изменения внутренних усилий вдоль продольной оси стержня называются эпюрами.

При построении эпюр сначала определяются границы участков, в пределах которых внутренние усилия изменяются по одной закономерности. Такими границами являются сечения, где приложены внешние сосредоточенные усилия или начинается и заканчивается распределенная нагрузка.

Далее, применяя метод сечений и учитывая правило знаков, получают аналитические зависимости изменения внутренних усилий в пределах каждого участка. Эпюру внутренних усилий строят на оси (базе или базисной линии) эпюры, проведенной параллельно оси стержня.

При построении эпюры продольных сил положительные значения  $N$  в выбранном масштабе будем откладывать вверх от горизонтальной или вправо от вертикальной базисной линии; отрицательные значения  $N$  соответственно будем откладывать в противоположном направлении, т. е. вниз или влево.

Эпюру продольных сил строят в первую очередь для того, чтобы использовать ее при расчете бруса на прочность; она дает возможность найти наибольшие значения продольных сил и положение сечений, в которых они возникают.

**Пример 1.1.** Построить эпюру продольных сил  $N$  для бруса, показанного на рис. 1.3.

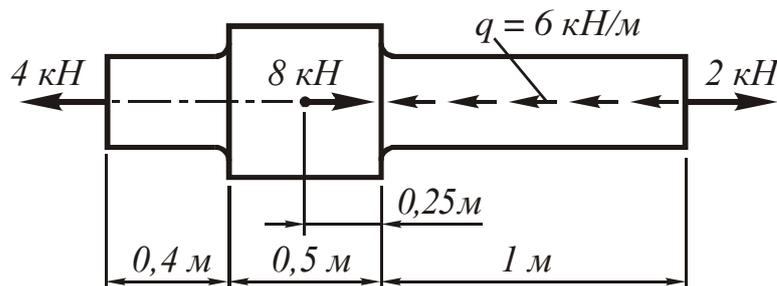


Рис. 1.3. Схема бруса

**Заданный брус разбиваем на три участка:  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  (рис. 1.5, а).**

Записываем выражения для определения продольных сил, действующих в пределах каждого из участков, мысленно рассекая брус (рис. 1.5, б, в, г) произвольными сечениями с абсциссами  $z_1, z_2, z_3$  ( $z_1$  и  $z_2$  отсчитываются от левого торцевого сечения,  $z_3$  - от правого, что упрощает вычисления).

$$\text{Участок } AB: \sum Z = 0, \quad -4 + N_1 = 0, \quad N_1 = 4 \text{ êÍ .}$$

$$\text{Участок } BC: \sum Z = 0, \quad -4 + 8 + N_2 = 0, \quad N_2 = -4 \text{ êÍ .}$$

$$\text{Участок } CD: \sum Z = 0, \quad 2 - q \cdot z - N_3 = 0, \quad N_3 = 2 - q \cdot z.$$

Из выражений, приведенных выше, следует, что на участках  $AB$  и  $BC$  эпюра ограничена прямыми, параллельными оси эпюры  $N$ , а на участке  $CD$  продольная сила изменяется по линейному закону, и эпюра  $N$  ограничена наклонной прямой.

Вычисляем значения продольных сил на границах участков - в сечениях  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

$$N_A = N_1 = 4 \text{ êÍ ; } \quad N_B = N_C = N_2 = -4 \text{ êÍ .}$$

Для вычисления продольной силы в сечении  $D$  подставим в уравнение

$$N_3 = 2 - q \cdot z \text{ значение } z = 0: \quad N_D = 2 - 6 \cdot 0 = 2 \text{ êÍ .}$$

Если подставить  $z = 1$  м, получим значение силы, действующей в сечении  $C$ :  $N_C = 2 - 6 \cdot 1 = -4 \text{ êÍ}$ , что соответствует ранее полученному результату. Эпюра продольных сил, построенная по методическим рекомендациям, приведенным выше, представлена на рис. 1.4, д.

Следует отметить, что для определения продольных сил нет необходимости изображать каждый раз отдельно отсеченную часть бруса, можно просто найти алгебраическую сумму проекций на ось бруса внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

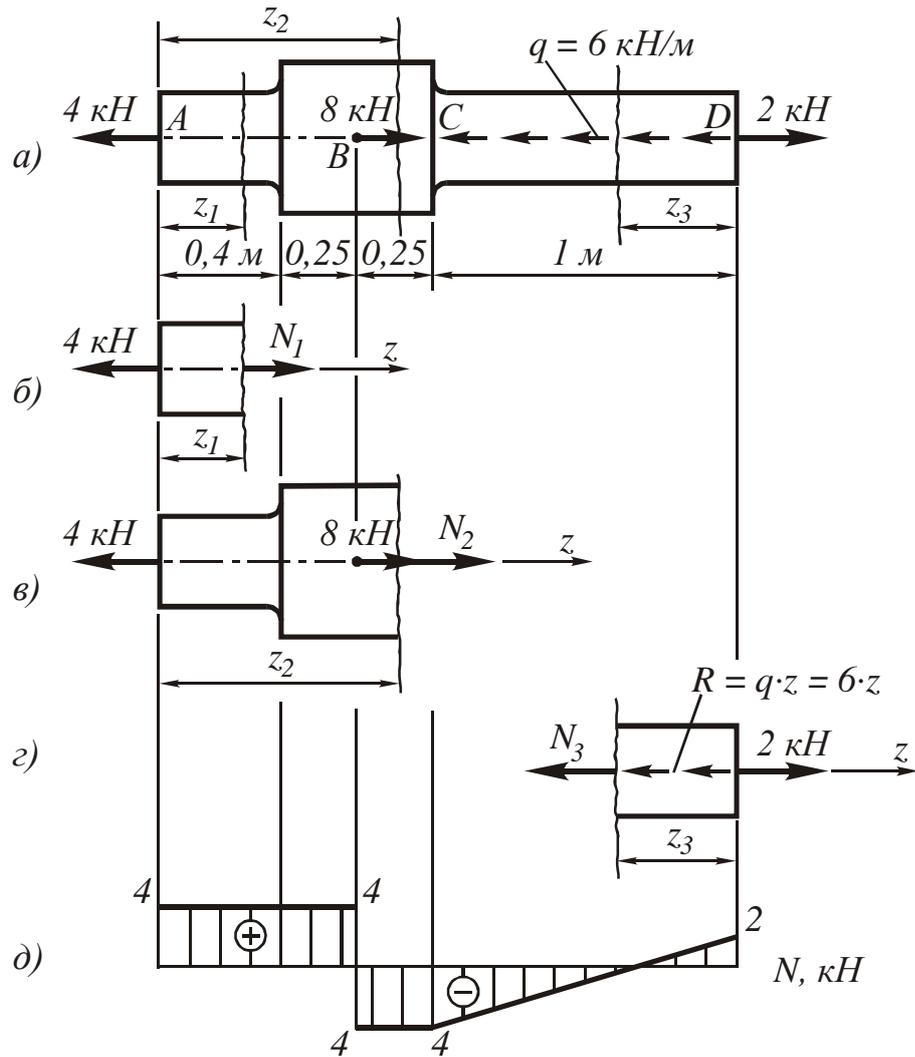


Рис. 1.4. К определению продольных сил в поперечных сечениях бруса и построению эпюры продольных сил: а - расчетная схема бруса; б-г - определение продольных сил; д - эпюра продольных сил  $N$

### 3. Напряжения в поперечных сечениях бруса. Эпюра нормальных напряжений.

При растяжении (сжатии) бруса в его поперечных сечениях возникают только нормальные напряжения. Равнодействующая соответствующих элементарных сил  $\sigma_z dA$  – продольная сила  $N$  – может быть найдена с помощью метода сечений. Для того, чтобы иметь возможность определить нормальные напряжения при известном значении продольной силы, необходимо установить закон их распределения по поперечному сечению бруса.

Эта задача решается на основе гипотезы плоских сечений (*гипотезы Я. Бернулли*), которая гласит: «Сечения бруса, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и при деформации».

При растяжении бруса на поверхности которого нанесена система продольных и поперечных рисок (рис. 1.5, а), можно убедиться, что риски остаются прямолинейными и взаимно перпендикулярными, изменяются лишь расстояния: между поперечными рисками несколько увеличиваются, а между продольными – уменьшаются (рис. 1.5, б).

Описанный опыт можно рассматривать как подтверждение гипотезы плоских сечений; при этом предполагают, что внутри бруса деформации имеют тот же характер, что и на его поверхности.

Представим себе, что брус состоит из бесконечно большого числа продольных элементов, имеющих бесконечно малые ("точечные") поперечные сечения. Эти элементы здесь и в дальнейшем будем условно называть *волокнами*.

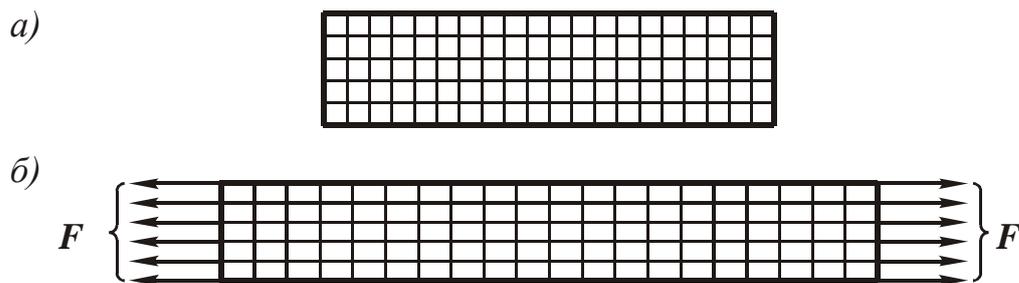


Рис. 1.5. Расстояния между поперечными и продольными рисками:  
 а – до деформации, б - при осевом растяжении

Из гипотезы Бернулли следует, что все волокна в рассматриваемом случае деформируются одинаково. При однородном материале равным деформациям соответствуют одинаковые напряжения. Таким образом, приходим к заключению, что *при растяжении (сжатии) бруса нормальные напряжения распределены по его поперечному сечению равномерно*. Распределение напряжений не зависит от формы поперечного сечения.

Для определения нормальных напряжений используем выражение  $N = \int_A \sigma_z dA$ .

Вынося  $\sigma_z$  (постоянная величина!) за знак интеграла, получаем

$$N = \sigma_z \int_A dA = \sigma_z A,$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения бруса.

Опуская индекс  $z$ , окончательно получаем

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (1.1)$$

Для нормальных напряжений принимают то же правило знаков, что и для продольных сил, т.е. *при растяжении считают напряжения положительными*.

Фактически распределение напряжений в сечениях бруса, примыкающих к месту приложения внешних сил, зависит от способа приложения нагрузки и может быть неравномерным. Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что это нарушение равномерности распределения напряжений носит *местный характер*. В сечениях бруса, отстоящих от места нагружения на расстоянии, примерно равном наибольшему из поперечных размеров бруса, распределение напряжений можно считать практически равномерным (рис. 1.6).

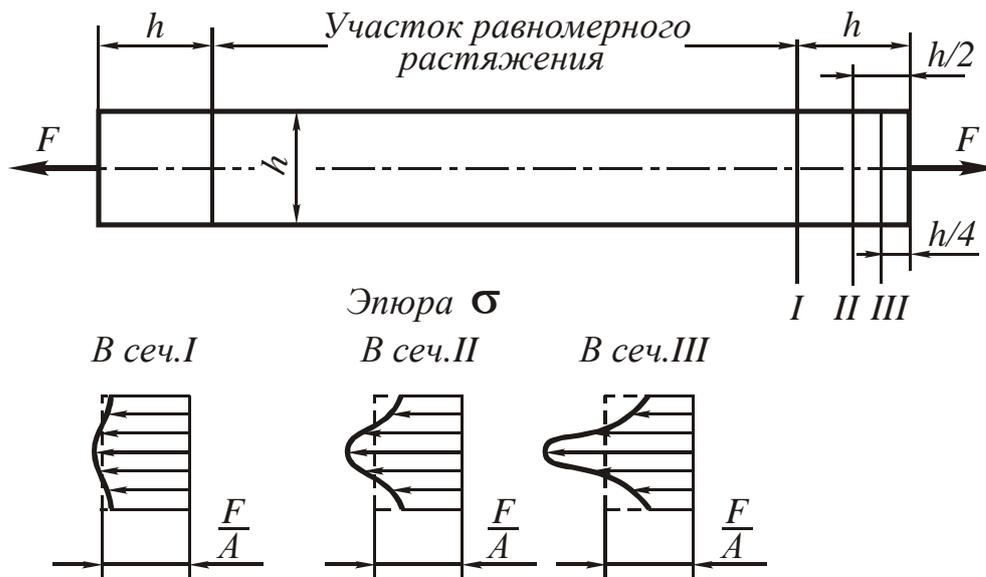


Рис. 1.6. Распределение напряжений в сечениях бруса в зависимости от расстояния до места нагружения

Рассмотренное положение является частным случаем *принципа Сен-Венана*, который можно сформулировать следующим образом:

*Распределение напряжений существенно зависит от способа приложения внешних сил лишь вблизи места нагружения. В частях, достаточно удаленных от места приложения сил, распределение напряжений практически зависит только от статического эквивалента этих сил, а не от способа их приложения.*

Таким образом, применяя *принцип Сен-Венана* и отвлекаясь от вопроса о местных напряжениях, имеем возможность (в этой, так и в последующих главах курса) не интересоваться конкретными способами приложения внешних сил.

В тех случаях, когда нормальные напряжения в различных поперечных сечениях бруса неодинаковы, целесообразно показывать закон их изменения по длине бруса в виде графика – *эпюры нормальных напряжений*.

**Пример 1.2.** Построить эпюру продольных сил  $N$  и эпюру нормальных напряжений  $\sigma$  для бруса, показанного на рис. 1.7, а.

Применяя метод сечений, вычислим, как это было сделано в примере 1.1, продольные силы, действующие в поперечных сечениях бруса участков  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DE$ :

$$N_{AB} = 10 \text{ кН} , N_{BC} = 15 \text{ кН} , N_{CD} = 15 \text{ кН} , N_{DE} = 30 \text{ кН} .$$

По найденным значениям продольных сил строим эпюру  $N$  (рис. 1.7, б).

Вычисляем нормальные напряжения, действующие в поперечных сечениях бруса участков  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DE$ :

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{AB}} = \frac{10 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 20 \cdot 10^6 \text{ Па} = 20 \text{ МПа} ,$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}} = \frac{15 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 30 \cdot 10^6 \text{ Па} = 30 \text{ МПа} ,$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{A_{CD}} = \frac{15 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 15 \cdot 10^6 \text{ Па} = 15 \text{ МПа} ,$$

$$\sigma_{DE} = \frac{N_{DE}}{A_{DE}} = \frac{45 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 45 \cdot 10^6 \text{ Па} = 45 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений представлена на рис. 1.7, в.

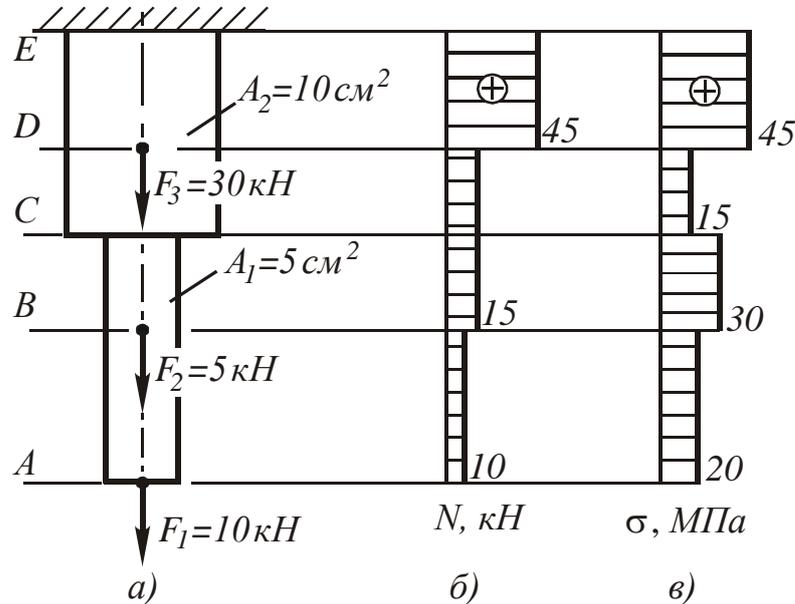


Рис. 1.7. К построению эпюр продольных сил и нормальных напряжений в поперечных сечениях бруса: а - схема бруса; б – эпюра продольных сил; в - эпюра нормальных напряжений

На рис. 1.7, б, в можно видеть, что эпюра продольных сил имеет два скачка - в сечениях B и D, где приложены внешние силы, а эпюра нормальных напряжений – три: в сечениях B и D, где приложены внешние силы и в месте изменения площади поперечного сечения (сечение C).

#### 4. Деформации и перемещения.

Рассмотренный в предыдущем параграфе вопрос об определении нормальных напряжений теснейшим образом связан с расчетами бруса и шарнирно-стержневых систем (например, ферм) на прочность. Умение вычислять деформации и перемещения необходимо для расчетов на жесткость, а также для определения сил в статически неопределимых системах.

Выделим из бруса, изображенного на рис. 1.8, а, бесконечно малый элемент длиной  $dz$ . Этот элемент отдельно изображен (в двух проекциях) на рис. 1.8, б; штриховыми линиями он показан в деформированном состоянии (при растяжении) – длина элемента увеличилась, а размеры поперечного сечения уменьшились (при сжатии наблюдается обратная картина). Приращение длины элемента обозначим  $\Delta(dz)$  - абсолютное удлинение. Отношение приращения (изменения) длины элемента к его первоначальной длине называется относительным удлинением или продольной деформацией:

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dz)}{dz}. \quad (1.2)$$

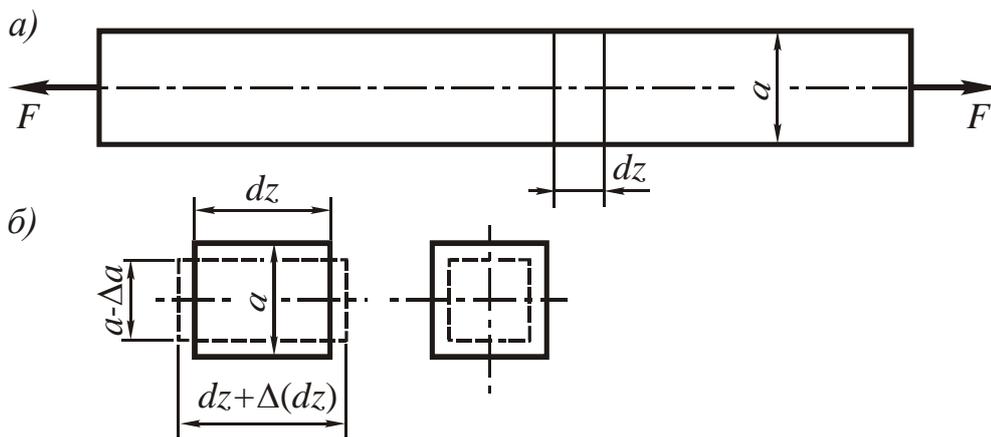


Рис. 1.8. Деформации при растяжении бруса: а – схема бруса; б – проекции малого элемента бруса

Очевидно, что относительное удлинение – безразмерная величина. В некоторых случаях ее выражают в процентах. При растяжении продольную деформацию считают положительной, а при сжатии – отрицательной.

Отношение изменения  $\Delta a$  размера поперечного сечения к его первоначальному значению называют *относительным поперечным сужением (расширением) или поперечной деформацией*:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}. \quad (1.3)$$

При растяжении поперечные размеры бруса уменьшаются и  $\varepsilon'$  по принятому правилу знаков – величина отрицательная.

Продольную и поперечную деформации называют также *линейными деформациями (общее наименование)*.

Для подавляющего большинства конструкционных материалов с достаточной для практики точностью можно считать, что *в известных пределах нагружения между продольной деформацией и соответствующим (действующим в ее направлении) нормальным напряжением существует прямо пропорциональная (линейная) зависимость*.

Это положение носит название *закона Гука* и записывается в виде

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (1.4)$$

Коэффициент пропорциональности  $E$  называют модулем продольной упругости (другие названия: модуль нормальной упругости; модуль упругости; модуль упругости 1-го рода; *модуль Юнга*). Очевидно,  $E$  имеет ту же размерность, что и напряжение, т.е. выражается в Па или МПа.

Модуль продольной упругости – физическая постоянная данного материала, характеризующая его *жесткость*. Чем жестче материал, тем меньше он деформируется при данном напряжении.

Для каждого материала модуль продольной упругости колеблется в узких пределах.

Например, для стали  $E = (1,9..2,15) \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ . При этом весьма важно иметь в виду, что значение  $E$  для стали практически не зависит от ее химического состава и термической обработки.

Опытным путем установлено, что при простом растяжении или сжатии отношение поперечной деформации к продольной – величина постоянная для данного материала. Это отношение, взятое по абсолютному значению, называется *коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона*:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (1.5)$$

Значения коэффициента Пуассона для различных материалов находятся в пределах от 0 до 0,5.

Минимальное значение коэффициент Пуассона имеет для пробки ( $\mu = 0$ ); максимальное – для каучука ( $\mu \approx 0,5$ ). Для большинства металлов и сплавов значение коэффициента Пуассона колеблется в сравнительно узких пределах: от 0,23 до 0,35 (в среднем примерно 0,3).

Перейдем к вопросу об определении изменения длины (удлинения или укорочения) бруса. Из выражения (1.2) имеем  $\Delta(dz) = \varepsilon dz$  – изменение длины бесконечно малого элемента, а из выражения (1.4) – закон Гука

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

и

$$\Delta(dz) = \varepsilon dz = \left( \frac{\sigma}{E} \right) dz.$$

Нормальное напряжение, возникающее в поперечном сечении бруса, выразим через продольную силу и площадь сечения:

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Подставляя значение  $\sigma$  в выражение для  $\Delta(dz)$  получаем

$$\Delta(dz) = \frac{N dz}{EA}. \quad (1.6)$$

Для определения изменения длины  $\Delta l$  всего бруса (или участка бруса) следует просуммировать значения  $\Delta(dz)$  по всей длине, т.е. взять интеграл

$$\Delta l = \int_l \frac{N dz}{EA}. \quad (1.7)$$

В наиболее общем случае, когда законы изменения  $N$  и  $A$  (или одной из этих величин) различны для отдельных участков бруса, при определении  $\Delta l$  интегрирование ведут в пределах каждого из участков, а затем результаты алгебраически суммируют:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^k \int_{l_i} \frac{N dz}{EA}. \quad (1.8)$$

В частном случае (см. рис. 1.9, а), когда поперечное сечение бруса или отдельного его участка постоянно и продольная сила во всех сечениях одинакова, из (1.7) получаем

$$\Delta l = \frac{N l}{EA}. \quad (1.9)$$

Выражение (1.9) часто называют *формулой Гука*, а произведение  $EA$  условно называют *жесткостью сечения бруса* при растяжении (сжатии).

Изменение длины бруса (удлинение или укорочение) равно алгебраической сумме удлинений (укорочений) отдельных участков:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^k \Delta l_i = \sum_{i=1}^k \frac{N_i l_i}{E_i A_i}. \quad (1.10)$$

В случаях, когда поперечное сечение бруса или продольная сила или обе эти величины изменяются по его длине непрерывно, удлинение (укорочение) бруса следует вычислять по формуле (1.7).

При растяжении (сжатии) бруса его поперечные сечения перемещаются в направлении оси. Перемещения являются следствием деформаций, но эти понятия необходимо строго разграничивать. Например, в случае, представленном на рис. 1.10, деформируется лишь левая часть бруса (участок  $AB$ ), а участок  $BC$  перемещается как абсолютно твердое тело. Перемещения всех сечений этого участка одинаковы и равны удлинению части  $AB$  бруса:

$$\Delta_B = \Delta_C = \Delta l_{AB} = \frac{Fa}{EA}.$$

Перемещение произвольного сечения бруса равно изменению длины участка, заключенного между этим сечением и заделкой.

Например, для сечения, отстоящего на расстоянии  $z$  от заделки (рис. 1.9),

$$\Delta_z = \Delta l_z = \frac{Fz}{EA},$$

где  $z \leq a$ .

График  $\Delta_z = f(z)$  показывающий перемещения поперечных сечений в функции их расстояния  $z$  от неподвижного конца бруса (или сечения, условно принятого за неподвижное), называется эпюрой перемещений (рис. 1.9); стрелкой на эпюре показано направление перемещений.

Остановимся на определении перемещений узлов (шарниров) стержневых систем.

Эти перемещения определяют по известным удлинением и укорочениям стержней, сходящихся в рассматриваемом узле.

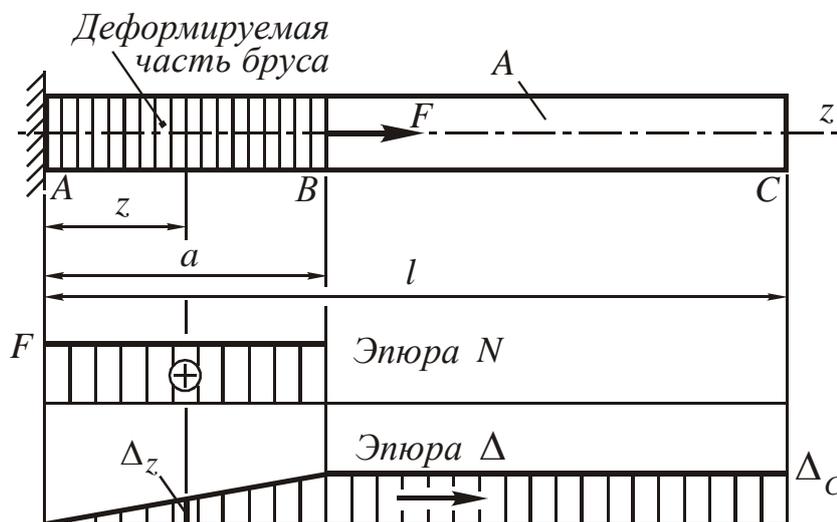


Рис. 1.9. Перемещения при растяжении бруса

Пусть, например, требуется найти перемещение шарнира  $A$  кронштейна, изображенного на рис. 1.10,  $a$ .

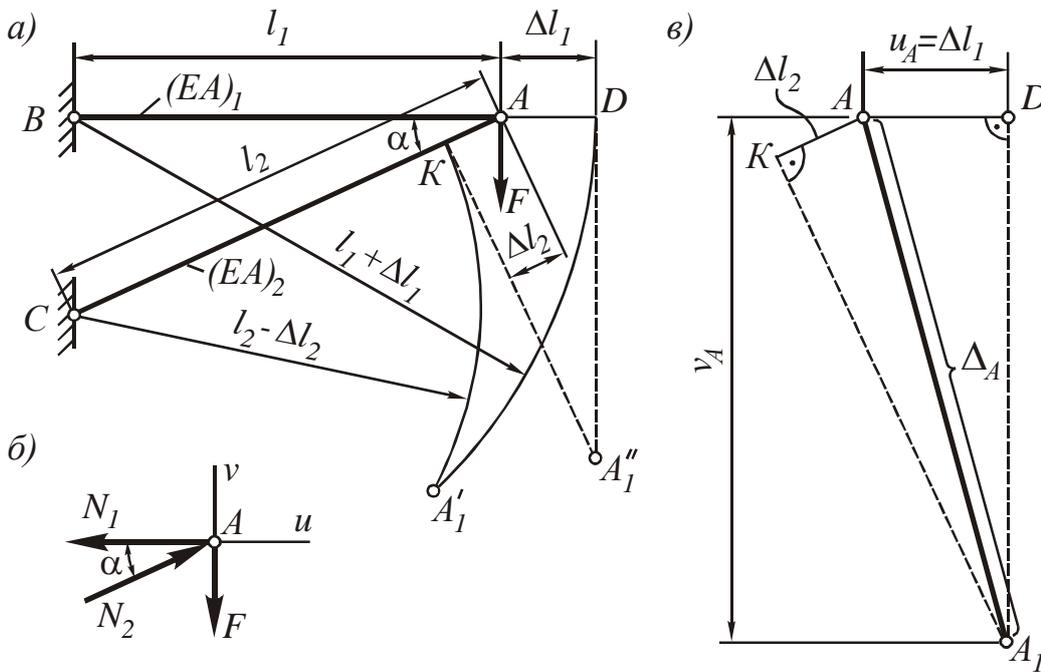


Рис. 1.10. К определению перемещений шарнира  $A$ :  $a$  - расчетная схема кронштейна;  $b$  - схема определения усилий;  $c$  - диаграмма перемещений узла  $A$

Вырезая узел  $A$  и составляя для него два уравнения равновесия ( $\sum U = 0$  и  $\sum V = 0$ ), находим силы в стержнях (рис. 1.10, б). Очевидно, сила  $N_1$  – растягивающая,  $N_2$  – сжимающая. По формуле Гука находим изменения длин стержней.

Для нахождения положения шарнира  $A$  после деформации следует мысленно разъединить стержни, отложить по их направлениям величины  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  (отрезки  $AD$  и  $AK$  на рис. 1.10, а) и, вращая стержни вокруг центров  $B$  и  $C$ , вновь свести их вместе.

Таким образом, положение шарнира  $A$  после деформации (точка  $A'_1$ ) находится на пересечении дуг, проведенных из центров  $B$  и  $C$  радиусами  $l_1 + \Delta l_1$  и  $l_2 - \Delta l_2$ .

Построение, показанное на рис. 1.10, а, выполнено со значительным нарушением масштабов: отрезки  $AD$  и  $AK$ , изображающие изменения длин  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  стержней

примерно равны соответственно  $\frac{1}{5}$  и  $\frac{1}{15}$  от величин  $l_1$  и  $l_2$ , в то время как фактически

упругие удлинения стальных стержней не превышают  $\frac{1}{1000}$  от их длины.

В силу малости удлинений (укорочений) можно заменить дуговые засечки перпендикулярами, проведенными из точек  $D$  и  $K$  к направлениям стержней, и считать новым положением шарнира точку  $A''_1$ . Если бы удалось выполнить рассмотренные построения без искажения масштабов (для этого потребовался бы лист бумаги весьма больших размеров – порядка  $2 \times 1 \text{ м}$ ), можно было бы убедиться, что дуговые засечки и перпендикуляры практически сливаются.

Достоинством указанного построения, называемого диаграммой перемещений, является его простота и возможность выполнения в произвольном масштабе, не связанном с масштабом чертежа самой стержневой системы.

Диаграмма перемещений может быть построена отдельно, как показано на рис. 1.10, в; при этом, если построение выполнено в достаточно крупном масштабе, можно

не устанавливать аналитической зависимости между  $\Delta l_1$ ,  $\Delta l_2$  и перемещением узла  $A$ , а замерив отрезок диаграммы  $AA_1$  и умножив его на масштаб, получить искомое перемещение. На этом же чертеже показаны горизонтальная  $u_A$  и вертикальная  $v_A$  составляющие полного перемещения.

Пример 1.3. Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений по длине бруса, изображенного на рис. 1.11, *а*.

Разбиваем брус на участки, начиная от свободного конца. Границы участков проходят через точки приложения внешних сил и места изменения размеров поперечного сечения. Строим эпюры продольных сил (рис. 1.11, *б*) и нормальных напряжений (рис. 1.11, *в*), как изложено выше в примерах 1.1 и 1.2.

Для построения эпюры перемещений достаточно определить перемещения сечений, совпадающих с границами участков, так как между указанными сечениями эпюра линейна.

Сечение  $A$  неподвижно, т.е.  $\Delta_A = 0$  (построение эпюры перемещений следует всегда начинать от неподвижного или условно принятого неподвижным сечения).

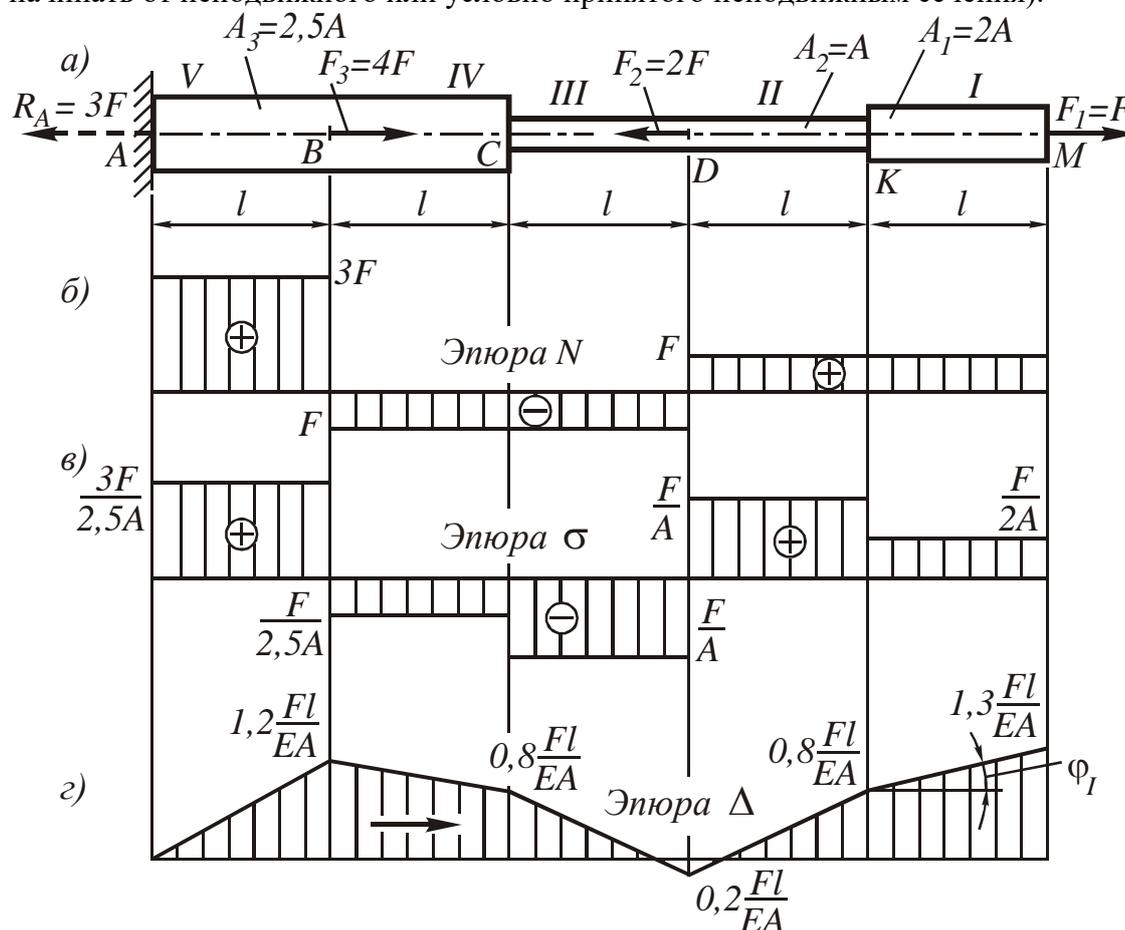


Рис. 1.11. К построению эпюр продольных сил, нормальных напряжений и эпюры перемещений поперечных сечений бруса: *а* - расчетная схема бруса; *б* - эпюра продольных сил; *в* - эпюра нормальных напряжений; *г* - эпюра перемещений

Перемещение сечения  $B$  равно изменению длины (в данном случае удлинению) участка  $AB$  (участка  $V$ ) бруса:

$$\Delta_B = \Delta l_V = \frac{N_V l}{E \cdot 2.5A} = \frac{3Fl}{E \cdot 2.5A} = 1.2 \frac{Fl}{EA}.$$

Сечение  $B$  перемещается вправо; соответствующую ординату условно будем считать положительной и отложим (в выбранном масштабе) вверх по оси эпюры (рис. 1.11,  $\varepsilon$ ).

Перемещение сечения  $C$  равно алгебраической сумме изменений длин участков  $V$  и  $IV$  бруса:

$$\Delta_C = \Delta l_V + \Delta l_{IV} = \frac{N_V l}{E \cdot 2,5A} + \frac{N_{IV} l}{E \cdot 2,5A} = \frac{3Fl}{E \cdot 2,5A} - \frac{Fl}{E \cdot 2,5A} = 0,8 \frac{Fl}{EA}.$$

То же самое можно записать несколько компактнее:

$$\Delta_C = \Delta_B + \Delta l_{IV} = 1,2 \frac{Fl}{EA} - \frac{Fl}{E \cdot 2,5A} = 0,8 \frac{Fl}{EA}.$$

Сечение  $C$  также перемещается вправо.

Аналогично,

$$\Delta_D = \Delta_C + \Delta l_{III} = \Delta_C + \frac{N_{III} l}{EA} = 0,8 \frac{Fl}{EA} - \frac{Fl}{EA} = -0,2 \frac{Fl}{EA}.$$

Знак минус указывает, что сечение  $D$  перемещается влево (так как ранее было принято считать перемещения вправо положительными).

Значения  $\Delta_K$  и  $\Delta_M$  указаны на эпюре (рис. 1.11,  $\varepsilon$ ).

Пример 1.4. Определить удлинение бруса постоянного поперечного сечения, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$  (рис. 1.12).

Эпюра  $N$  Эпюра  $\Delta$

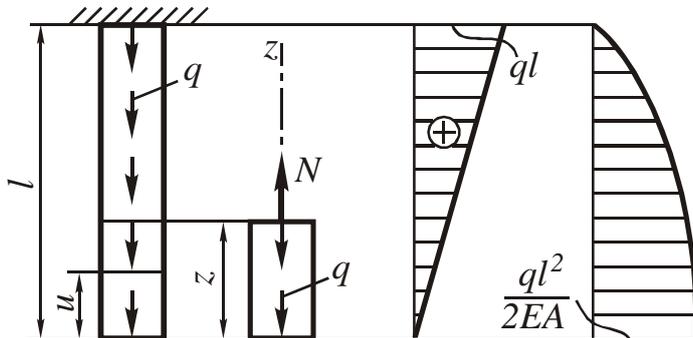


Рис. 1.12. Брус постоянного сечения, нагруженный равномерной нагрузкой  $q$

Определим продольную силу, возникающую в произвольном поперечном сечении бруса. Применяя метод сечений и рассматривая условие равновесия нижней оставленной части длиной  $z$  (рис. 1.12), получим

$$N = qz,$$

где  $qz$  – равнодействующая распределенной нагрузки, действующей на оставленную часть.

Так как продольная сила переменна – изменяется по длине бруса по линейному закону (см. эпюру  $N$  на рис. 1.14), то удлинение определяем по формуле (1.7):

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N dz}{EA} = \int_0^l \frac{qz}{EA} dz = \frac{ql^2}{2EA}.$$

Учитывая, что  $ql = G$  – равнодействующая всей нагрузки, действующей на брус, выражение для  $\Delta l$  можно записать так:

$$\Delta l = \frac{Gl}{2EA}.$$

Итак, удлинение бруса постоянного сечения от действия равномерно распределенной по его длине нагрузки вдвое меньше, чем удлинение от сосредоточенной силы, равной равнодействующей этой нагрузки и приложенной к свободному концу бруса.

Примером равномерно распределенной осевой нагрузки может служить собственная сила тяжести бруса, при этом  $q = \gamma A$  и  $G = \gamma Al$  – сила тяжести (вес) всего бруса.

Перемещение произвольного поперечного сечения бруса, отстоявшего на расстоянии  $u$  от свободного конца, равно удлинению части бруса, заключенного между заделкой и этим сечением:

$$\Delta = \int_u^l \frac{qz}{EA} dz = \frac{qz^2}{2EA} \Big|_u^l = \frac{q}{2EA} (l^2 - u^2);$$

т.е. перемещения изменяются по квадратичному закону; эпюра  $\Delta$  – парабола (рис. 1.12).

Пример 1.5. Определить перемещение шарнира  $A$  симметричной стержневой системы, состоящей из двух трубчатых стержней  $AC$  и  $AD$ , изображенной на рис. 1.13, *a*. Материал стержней – дюраль;  $E = 7,0 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ .

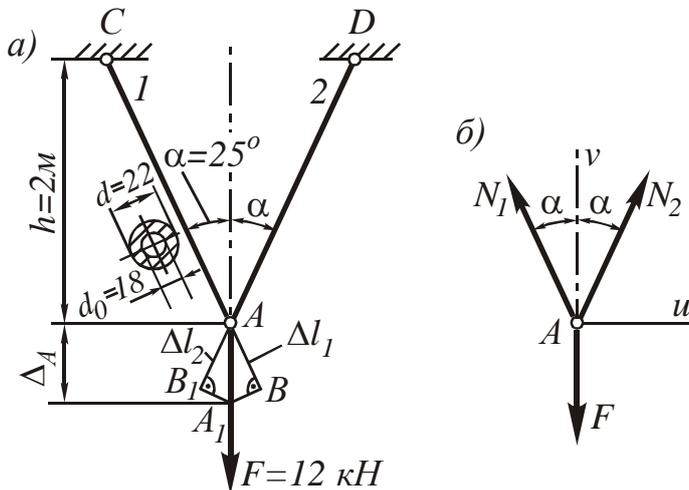


Рис. 1.13. К определению перемещения шарнира  $A$ : *a* – расчетная схема симметричной стержневой системы, *б* – узел  $A$  этой системы

Вырезая узел  $A$ , определяем силы в стержнях (рис. 1.15, *б*):

$$\sum U = 0; -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0; \quad N_1 = N_2;$$

$$\sum V = 0; N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - F = 0; \quad N_1 = N_2 = \frac{F}{2 \cos \alpha}.$$

Находим удлинения стержней:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{N_1 l}{EA} = \frac{F}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{h}{EA \cos \alpha} = \frac{Fh}{2EA \cos^2 \alpha}.$$

Строим диаграмму перемещений (рис. 1.13, *a*): на продолжении стержней  $AC$  и  $AD$  откладываем в произвольном масштабе отрезки, изображающие  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$ ; из полученных точек  $B$  и  $B_1$  проводим перпендикуляры к направлениям стержней. Очевидно, что эти перпендикуляры пересекаются на оси симметрии системы. Перемещение ( $\Delta_A$ ) шарнира  $A$  изображается отрезком  $AA_1$ , который определяется из прямоугольного треугольника  $ABA_1$  (или  $AB_1A_1$ ):

$$\Delta_A = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha}$$

Подставляя значение  $\Delta l_1$ , получаем

$$\Delta_A = \frac{Fh}{2EA(\cos^3 \alpha)}$$

Подстановка числовых значений дает

$$\Delta_A = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 7,0 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot \frac{3,14}{4} (0,022^2 - 0,018^2) \cos^3 25^\circ} = 0,00183 \text{ м.}$$

5. Проверка прочности и определение необходимых размеров бруса при растяжении (сжатии).

В предыдущих параграфах рассматривалась задача о распределении напряжений и деформаций в бруске при действии продольных сил. Однако вопрос в том, как назначить размеры стержня, чтобы он мог надежно и долговечно сопротивляться заданной нагрузке, не решался. Этот вопрос является одним из главных вопросов сопротивления материалов.

В тех случаях, когда размеры стержня заданы, возникает задача об определении грузоподъемности стержня, т.е. определении силы, которую стержень может выдержать, не претерпевая каких-либо изменений, опасных для его долговечной работы.

Для решения указанных вопросов необходимо проводить специальные расчеты. Существуют три метода решения этих задач:

- 1) расчет по допускаемым напряжениям;
- 2) расчет по разрушающим нагрузкам;
- 3) расчет по предельным состояниям.

Все три метода преследуют одну цель: обеспечить конструкции прочность и долговечность.

Первый метод предусматривает определение минимальной нагрузки, которая разрушает сооружение, с тем, чтобы сравнить эту нагрузку с предполагаемой для строящегося сооружения. Второй метод до недавнего времени широко применялся в строительном деле и частично применяется теперь, особенно в машиностроении. По этому методу размеры элемента сооружения должны назначаться так, чтобы во всех сечениях напряжения, вызываемые нагрузкой, не превышали некоторой допускаемой величины. Третий метод, самый молодой, вошел в жизнь совсем недавно. В настоящее время он является основным методом, применяемым при проектировании сооружений. Смысл его разъяснен ниже. Рассмотрим кратко все три метода.

### 5.1. Метод допускаемых напряжений.

По методу допускаемых напряжений требуется, чтобы наибольшее напряжение в стержне не превосходило так называемого допускаемого напряжения, которое обозначается  $[\sigma]$ .

Условия прочности материала бруса при *растяжении* и *сжатии* записываются в виде двух выражений соответственно:

$$\sigma_{\delta \max} \leq [\sigma]_{\delta}, \quad |\sigma_{\tilde{n}}|_{\max} \leq [\sigma]_{\tilde{n}},$$

где  $\sigma_{\delta \max}$ ,  $|\sigma_{\tilde{n}}|_{\max}$  - соответственно максимальные растягивающие и сжимающие (по абсолютной величине) напряжения;

$[\sigma]_{\delta}$  и  $[\sigma]_{\tilde{n}}$  - допускаемые напряжения материала соответственно при растяжении и сжатии.

Максимальные по абсолютной величине напряжения действуют в сечении или сечениях, которые называются *опасными*.

Так, например, при растяжении условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (1.11)$$

Предполагая, что действующее напряжение равно допускаемому, получим

$$\frac{N}{A} = [\sigma].$$

Из этого уравнения можно определить требуемую площадь при заданной силе или, наоборот, допускаемую силу при заданных размерах сечения.

Допускаемые напряжения равны опасным напряжениям  $\sigma_{\text{н}}$ , делённым на коэффициент запаса прочности  $n$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{н}}}{n}. \quad (1.12)$$

Для хрупких материалов за опасные напряжения принимается предел прочности  $\sigma_{\text{н}} = \sigma_{\hat{a}}$ , поэтому

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\hat{a}}}{n_1}.$$

Для пластических материалов – предел текучести  $\sigma_{\text{н}} = \sigma_{\delta}$  следовательно,

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\delta}}{n_2}.$$

Очевидно, что коэффициент запаса  $n_1$  должен быть больше  $n_2$ , так как после появления пластических деформаций стержень еще не разрушается.

Необходимость введения коэффициентов запаса прочности объясняется следующими обстоятельствами:

- 1) разбросом в определяемых из опыта величинах  $\sigma_{\delta}$  или  $\sigma_{\hat{a}}$  для данного материала;
- 2) невозможностью точно установить действующие нагрузки;
- 3) неточностью принятых методов расчета (например, неучётом местных напряжений);
- 4) неточностью изготовления деталей.

Допускаемые напряжения устанавливаются руководящими организациями и публикуются в технических условиях и нормах проектирования, которые имеют силу закона и обязательны для всех инженерно-технических работников.

При назначении коэффициентов запаса, а значит, и допускаемых напряжений, кроме перечисленных выше соображений, необходимо также учитывать много других факторов:

1. Качество и степень однородности материала. Например, для стали коэффициент запаса принимается примерно 1,5, для бетона – около трёх. Для естественного камня, материала весьма неоднородного, коэффициент запаса принимается около десяти.

2. Долговечность и значимость сооружения или машины. Если, например, из одинаковой стали изготавливается постоянный мост со сроком службы 50–70 лет и временный мост со сроком службы 3–5 лет, то, естественно, в последнем случае коэффициент запаса должен быть меньше.

3. Уровень развития техники. С развитием техники повышается качество изготовления материала, точность обработки деталей, точность расчета. Поэтому со временем коэффициенты запаса уменьшаются, а допускаемые напряжения увеличиваются. Например, допускаемые напряжения для малоуглеродистой стали в нашей стране непрерывно повышаются.

Поскольку пластичные материалы имеют одинаковые механические характеристики при растяжении и при сжатии, для них записывается одно условие прочности

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma].$$

Для хрупких материалов, имеющих различные прочностные характеристики при растяжении и при сжатии, записываются два условия прочности:

$$\sigma_{\delta \max} \leq [\sigma]_{\delta}, \quad |\sigma_{\tilde{n}}|_{\max} \leq [\sigma]_{\tilde{n}}.$$

В сопротивлении материалов условие прочности применяется при трех видах расчетов: проектировочный расчет, определение допускаемой нагрузки и проверочный расчет.

### Проектировочный расчет

После того, как расчетная схема конструкции выбрана, определены ее размеры и известна система внешних сил, можно, используя условие прочности, найти требуемые площади поперечных сечений ее элементов, а затем установить их геометрические параметры (форму, размеры, номера прокатных профилей).

Элемент конструкции будет прочным при соблюдении условия

$$A_i \geq \frac{N_i}{[\sigma]}.$$

Пример 1.6. Требуется подобрать круглое поперечное сечение бруса, растянутого вдоль его оси силами  $F = 20 \text{ кН}$ .

Допускаемое напряжение  $[\sigma]$  принять равным  $160 \text{ МПа}$ .

Требуемая площадь поперечного сечения

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{20 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,25 \tilde{n} \text{ м}^2.$$

Приравняв полученный результат к выражению для вычисления площади круга, имеем

$$\frac{\pi \cdot d^2}{4} \geq 1,25, \quad d \geq \sqrt{\frac{1,25 \cdot 4}{\pi}} = 1,26 \tilde{n} \text{ м}.$$

### Определение допускаемой нагрузки

Для обеспечения прочности конструкции необходимо, чтобы внутренние усилия, действующие в ее элементах, удовлетворяли следующему требованию

$$N_i \leq A_i \cdot [\sigma].$$

Поскольку внутренние усилия выражаются через внешние нагрузки, определить величину последних, как правило, несложно.

Пример 1.7. Чему равно численное значение силы  $F$ , если поперечное сечение растянутого бруса (рис. 1.14)  $A = 10 \text{ см}^2$ , а допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$ .



Рис. 1.14. К примеру 1.7

Используя метод сечений, можно показать, что максимальное значение продольной силы  $N=2F$ . Брус будет прочным, если

$$N \leq A \cdot [\sigma] \text{ или же } 2F \leq 10 \cdot 10^{-4} \cdot 200 \cdot 10^6, \quad F \leq 10^5 \text{ Н} = 100 \text{ кН}.$$

### Проверочный расчет

Если размеры конструкции и система внешних сил известны заранее, её расчет сводится к проверке выполнения условий прочности, для чего вычисляют фактический запас прочности  $n$  и сравнивают его с заданным  $[n]$

$$n = \frac{\sigma_{\text{факт}}}{\sigma_{\text{мах}}} \geq [n].$$

### 5.2. Метод разрушающих нагрузок.

В качестве условия прочности при этом методе расчета выставляется требование, чтобы наибольшая нагрузка на сооружение не превосходила некоторой допускаемой нагрузки  $[F]$ , которая равняется разрушающей (опасной) нагрузке, деленной на коэффициент запаса прочности

$$F_{\text{мах}} \leq [F] = \frac{F_{\text{разруш}}}{n}. \quad (1.13)$$

Коэффициент запаса  $n$  принимается на основе целого ряда соображений, аналогичных тем, которые подробно рассмотрены в методе расчета по допускаемым напряжениям.

Для определения разрушающей нагрузки в конструкциях из материалов, обладающих большой пластичностью и сравнительно небольшим упрочнением, принимается упрощенная диаграмма растяжения (сжатия), показанная на рис. 1.15, на которой площадка текучести распространяется безгранично.

В этом случае при центральном растяжении или сжатии разрушающая сила будет определяться равенством

$$F_{\text{разруш}} = \int_A \sigma dA = \sigma_0 A. \quad (1.14)$$

Для хрупких материалов вместо предела текучести надо взять предел прочности

$$F_{\text{разруш}} = \sigma_{\text{предел}} A. \quad (1.15)$$

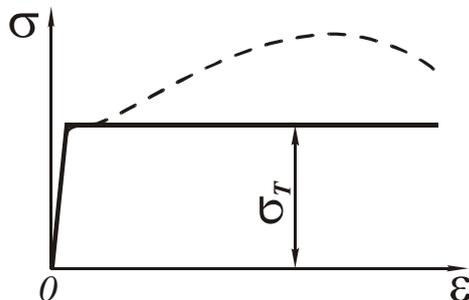


Рис. 1.15. Упрощенная диаграмма растяжения

В статически неопределимых системах из пластичных материалов появление текучести только в одном наиболее нагруженном элементе еще не приводит систему к разрушению.

Так, например, стержень, показанный на рис. 1.16, а, при появлении текучести на участке не разрушается. Для полного его разрушения необходимо, чтобы текучесть

распространилась на обе части стержня. В этом случае разрушающая нагрузка, равная сумме внутренних продольных сил, в двух частях стержня (рис. 1.16, б) будет определяться равенством

$$F_{\text{разруш}} = 2A\sigma_{\text{д}}.$$

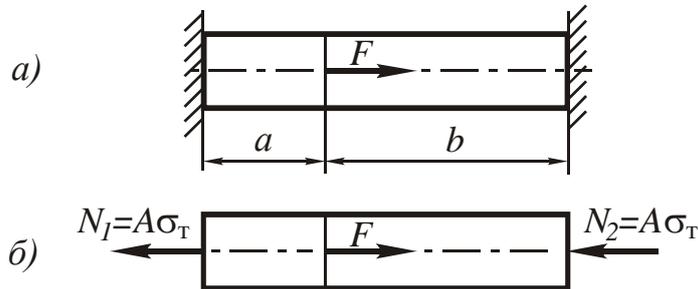


Рис. 1.16. Расчетная схема стержня к определению разрушающей нагрузки

Еще более сложно определить разрушающую нагрузку в задаче, показанной на рис. 1.17 в которой бесконечно жесткий брус удерживается тремя стержнями. Здесь сила  $F_{\text{разруш}}$  будет определяться из условия текучести по крайней мере двух стержней. Так, например, если стержень  $AB$  менее напряжен, а в двух других стержнях  $CD$  и  $EK$  появилась текучесть, то  $F_{\text{разруш}}$  найдется из условия равенства нулю суммы моментов относительно точки  $A$

$$\sum \dot{M}_A = F_{\text{разруш}} \frac{l}{2} - A_2\sigma_{\text{д}}l_1 - A_3\sigma_{\text{д}}l = 0.$$

Аналогично можно составить еще два уравнения, если предположить, что текучесть появится в двух стержнях  $AB$  и  $EK$  или стержнях  $AB$  и  $CD$ .

Из трех найденных значений сил в расчет вводится наименьшая сила, которая и считается разрушающей.

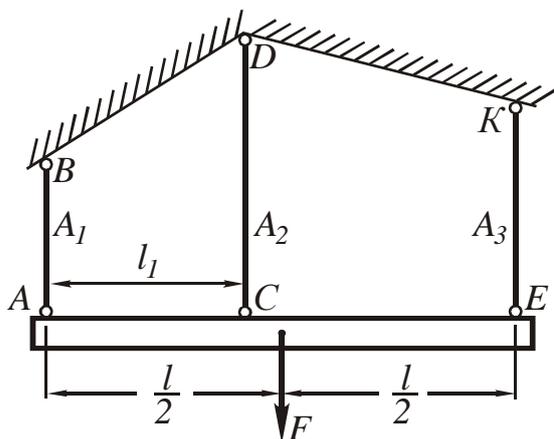


Рис. 1.17. Расчетная схема бруса на трех стержнях

### 5.3. Метод предельных состояний.

Одним коэффициентом запаса трудно учесть многочисленные факторы, которые для различных сооружений могут проявляться в разных сочетаниях.

Для целей более гибкого учета действия различных факторов был предложен новый метод расчета по предельным состояниям.

Предельным состоянием называется такое состояние конструкции, при котором она перестает удовлетворять эксплуатационным требованиям.

Нормы различают три вида предельных состояний.

За первое предельное состояние принимается такое, при котором наступает исчерпание несущей способности конструкции. На это предельное состояние рассчитываются все конструкции.

Вторым предельным состоянием считается такое состояние, при котором возникают затруднения в эксплуатации конструкции вследствие больших общих деформаций.

Третье предельное состояние считается в том случае, когда возникают чрезмерные местные деформации (например, образование трещин в железобетонных конструкциях).

Рассмотрим подробнее расчет по первому предельному состоянию. Проверка прочности производится по формуле

$$N \leq S, \quad (1.16)$$

где  $N$  – расчетное усилие, возникающее в элементе конструкции от нагрузки;

$S$  – предельное усилие, при котором элемент конструкции еще удовлетворяет эксплуатационным требованиям.

Расчетное усилие определяется равенством

$$N = N_1 n_1 + N_2 n_2 + N_3 n_3 + \dots, \quad (1.17)$$

где  $N_1, N_2, N_3$  – усилия от различных видов нагрузки;

$n_1, n_2, n_3$  – коэффициенты перегрузки, учитывающие: случайные отклонения от нормативных нагрузок (например, увеличение фактического веса сооружения против принятого по нормам), перспективное увеличение нагрузок со временем (например, увеличение веса подвижного состава в течение срока службы сооружения).

Величина предельного усилия определяется равенством

$$S = RA. \quad (1.18)$$

Здесь  $A$  – геометрическая характеристика сечения (при растяжении и сжатии – площадь сечения);

$R$  – расчетное сопротивление материала.

$$R = R_f km, \quad (1.19)$$

где  $R_f$  – нормативное сопротивление материала (предел текучести  $\sigma_{\delta}$  или предел прочности  $\sigma_{\hat{a}}$ );

$k < 1$  – коэффициент однородности материала, учитывающий возможные случайные отклонения от нормативного сопротивления, например, для стали  $k = 0,8 \div 0,85$ , для бетона  $k = 0,6$ , для дерева  $k = 0,3 \div 0,9$  и т.д.;

$m < 1$  – коэффициент условия работы, учитывающий возможные отклонения от проектных размеров (в пределах допусков), отличие расчетной схемы от действительного сооружения, степень опасности появления  $\sigma_{\delta}$  или  $\sigma_{\hat{a}}$  в какой-либо точке конструкции и другие факторы. (Этот коэффициент принимается  $0,9 \div 0,95$ ).

Метод предельных состояний подробно излагается в курсах конструкций и мостов.

В стальных конструкциях за предельное состояние стержня по несущей способности принимается, как правило, такое, когда появление текучести обнаруживается в наиболее напряженных волокнах сечения, причем местная концентрация напряжений не учитывается. Заметим, что если принять все коэффициенты перегрузки одинаковыми, то условие (1.16) примет вид

$$n \sum N_i \leq mk R_f A \quad \text{или} \quad \sum N_i \leq \frac{R_f}{\overline{mk}} A = [\sigma] A,$$

так как величина  $\frac{n}{mk}$  представляет собой в данном случае общий коэффициент запаса, и частное от деления на него нормативного сопротивления есть не что иное, как допустимое напряжение. Таким образом, если применим принцип независимости действия сил, то при одинаковых коэффициентах перегрузки расчеты по предельному состоянию и по допустимому напряжению совпадают.

## 6. Расчет бруса на жесткость при растяжении-сжатии.

Элементы конструкций, испытывающие растяжение или сжатие должны удовлетворять не только условиям прочности, но и условию жесткости. Условие жесткости, которое можно записать в двух равноценных вариантах, имеет вид

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\Delta l_{\max}}{l} \leq [\varepsilon] \quad \text{или} \quad \Delta l_{\max} \leq [\Delta l].$$

В сопротивлении материалов условие жесткости применяется, как и рассмотренное выше условие прочности, при проведении трех видов расчетов: проекторочном расчете, при определении допустимой условием жесткости нагрузки и при проверочном расчете. Чаще других проводится проверочный расчет.

Проверочный расчет на *жесткость* состоит в определении наибольших деформаций и сравнения их с допустимыми величинами.

**Пример 1.8.** Стальной брус квадратного поперечного сечения, площадь которого равна  $5 \text{ см}^2$ , растянут вдоль продольной оси силой  $F = 40 \text{ кН}$ . Проверить выполнение условия жесткости бруса.

Исходные данные для расчета:  $l = 1 \text{ м}$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $[\Delta l] = 1 \text{ мм}$ .

Абсолютное удлинение бруса подсчитывается по формуле (1.9) и сравнивается с допустимым

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,4 \text{ мм} < 1 \text{ мм};$$

$$\Delta l < [l],$$

следовательно, условие жесткости выполняется.

## 2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какое деформированное состояние бруса называется осевым растяжением-сжатием?
2. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях при осевом растяжении-сжатии?
3. Какое правило знаков принято для продольной силы?
4. Чему численно равна продольная сила в поперечном сечении бруса?
5. В каких единицах в системе СИ выражается внутренняя сила?
6. Что называется эпюрой внутреннего усилия?

7. Какие сечения являются границами участков, в пределах которых продольная сила изменяется по одной закономерности.
8. В каком случае на эпюре продольных сил появляются скачки?
9. В каком случае эпюра продольных сил ограничена наклонной прямой?
10. Влияет ли изменение размеров поперечного сечения на значение продольной силы?
11. Остается ли ось бруса прямой после его растяжения?
12. Какие напряжения возникают в поперечном сечении бруса при его растяжении (сжатии)?
13. Как распределяются напряжения по поперечному сечению?
14. Зависит ли величина напряжений, действующих в поперечном сечении бруса, от свойств материала, из которого брус изготовлен?
15. В каких единицах в системе СИ выражается напряжение?
16. Какое правило знаков принято для нормальных напряжений?
17. В чем сущность принципа Сен-Венана?
18. Как изменяются поперечные размеры бруса при его растяжении? Как изменяются при сжатии?
19. Что называется абсолютным удлинением при растяжении?
20. Что называется относительной деформацией?
21. Как записывается закон Гука?
22. Как определяется модуль упругости? Какие свойства материала характеризует модуль Юнга? Какую размерность имеет эта величина?
23. Какие свойства материала характеризует коэффициент Пуассона?
24. Что называется жесткостью бруса при растяжении?
25. Как вычисляется абсолютное удлинение, когда поперечное сечение бруса или отдельного его участка постоянно?
26. Как вычисляется абсолютное удлинение растянутого бруса переменного поперечного сечения?
27. Как строится эпюра перемещений поперечных сечений бруса?
28. Какое условие должно соблюдаться, чтобы прочность бруса была обеспечена?
29. Запишите условия прочности при растяжении и сжатии.
30. Какое сечение растянутого бруса считается опасным?
31. Какое нормальное напряжение принимают в качестве опасного для пластичного материала?
32. Какое нормальное напряжение принимают в качестве опасного для хрупкого материала?
33. Сколько условий прочности записывают для хрупких материалов?
34. В каких видах расчетов применяется условие прочности?
35. Как записывается условие прочности по методу разрушающих нагрузок?
36. Как записывается условие прочности по методу предельных состояний?
37. Какие конструкции называются статически неопределимыми?
38. Как вычислить степень статической неопределимости?
39. Что происходит с телами при нагревании?
40. Как вычисляется деформация стержня при изменении температуры?

41. Могут ли возникать напряжения от изменения температуры в статически определимой системе?
42. В чем состоит проверочный расчет бруса на жесткость при растяжении?

### 3. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Выберите правильно построенную эпюру продольных сил в поперечных сечениях бруса (рис. 1.18).

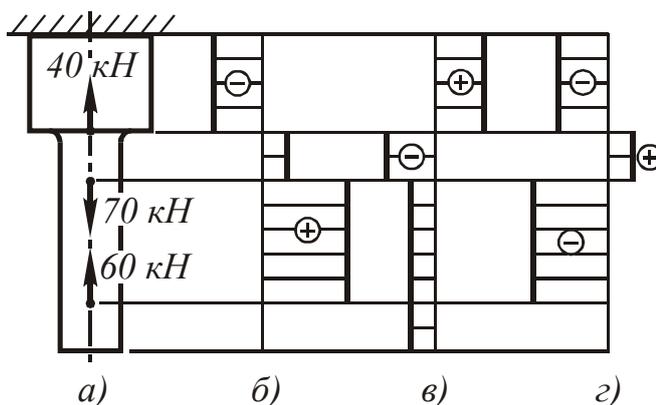


Рис. 1.18. К задаче 1

2. К стержню переменного поперечного сечения, показанному на рис. 1.19, приложены несколько внешних сил. Укажите участок бруса, в поперечном сечении которого будут действовать наибольшие по модулю нормальные напряжения.

3. Жесткий брус  $BC$  подвешен на трех стержнях рис. 1.32. Площадь поперечного сечения стержня  $CD$  равна  $A$ , модуль упругости материала равен  $E$ . Определите удлинение стержня  $CD$ .

4. Стальной стержень длиной 4 м растягивается силой 250 кН, форма поперечного сечения стержня – двутавр №10, модуль упругости стали  $\hat{A} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Ёа}$ . Вычислить абсолютное удлинение бруса.

5. Вычислить абсолютное удлинение стального бруса, показанного на рис. 1.20. Модуль упругости стали  $\hat{A} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Ёа}$ .

6. Два стержня (рис. 1.21), изготовленные из чугуна с пределом прочности при растяжении  $\sigma_{\hat{a}.\hat{d}}$ , поддерживают груз  $F$ . Чему равны коэффициенты запаса прочности стержней?

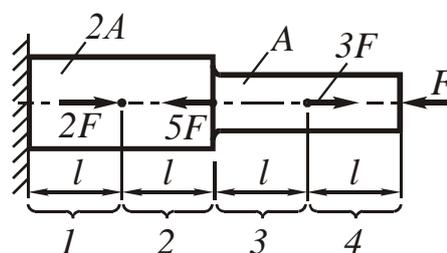


Рис. 1.31. К задаче 2

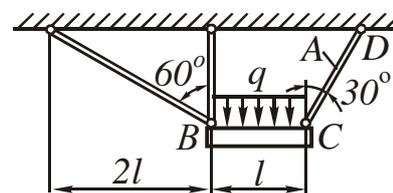


Рис. 1.19. К задаче 3

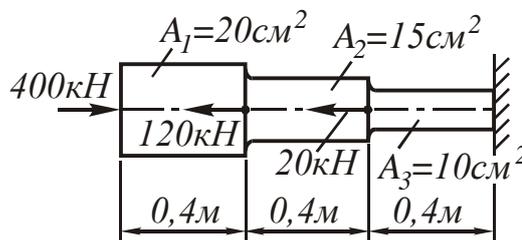


Рис. 1.20. К задаче 5

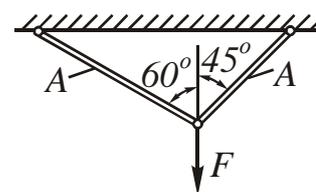


Рис. 1.21. К задаче 6

## ВЫВОДЫ

1. Центральным (осевым) растяжением или сжатием называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор - продольная сила.

2. Продольная сила  $N$  условно считается положительной при растяжении и отрицательной при сжатии. Её величина может быть найдена при помощи метода сечений: продольная сила в поперечных сечениях стержня численно равна алгебраической сумме проекций на его продольную ось  $z$  всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

3. При осевом растяжении (сжатии) бруса в его поперечных сечениях возникают только нормальные напряжения, характеризующие интенсивность равномерно распределенных по сечению внутренних усилий.

Нормальные напряжения, обозначаемые греческой буквой  $\sigma$  (сигма), одинаковы во всех точках поперечного сечения и могут быть определены по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

В Международной системе единиц (СИ) нормальное напряжение выражается в Паскалях [ $Па$ ].

4. При растяжении длина бруса увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются, при сжатии наблюдается обратная картина.

5. Между нормальным напряжением, действующим в поперечном сечении бруса, и его относительным удлинением существует прямо пропорциональная (линейная) зависимость, называемая законом Гука:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

6. Если  $N$ ,  $E$ ,  $A$  на участке бруса длиной  $l$  постоянны, то абсолютное удлинение бруса можно найти по формуле

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}.$$

7. Прочность бруса будет обеспечена, если величина максимального нормального напряжения  $\sigma_{\max}$ , действующего в его поперечном сечении, не превышает некоторой допустимой величины  $[\sigma]$ , называемой допускаемым напряжением.

8. Элементы конструкций, испытывающие растяжение или сжатие, должны удовлетворять не только условию прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma],$$

но и условию жесткости.

## РАЗДЕЛ 2

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ФИГУР

### 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

#### 1. Основные определения.

В теории растяжения-сжатия размеры и форма поперечного сечения бруса отражены в виде простейшей геометрической характеристики – площади сечения. В теорию изгиба и кручения, излагаемую в последующих разделах, входят более сложные геометрические характеристики сечения, называемые моментами инерции, к рассмотрению которых мы и переходим.

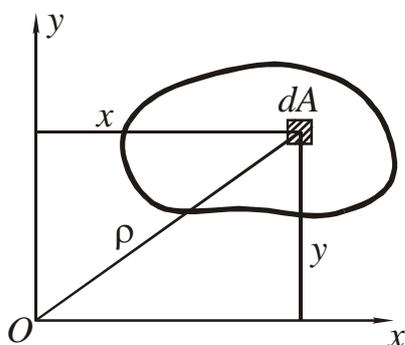


Рис. 2.1. Плоская фигура в координатных осях  $xOy$

Возьмем произвольную фигуру (сечение), отнесенную к координатным осям  $x$  и  $y$  (рис. 2.1).

Выражения

$$S_x = \int_A y dA \quad (2.1)$$

$$S_y = \int_A x dA$$

называются *статическими моментами площади фигуры* относительно осей  $x$  и  $y$  или моментами первой степени. Индекс  $A$  внизу знака интеграла указывает, что интегрирование распространяется на

всю площадь фигуры. На основании теоремы о моменте равнодействующей можно написать следующие равенства:

$$\int_A y dA = Ay_c, \quad \int_A x dA = Ax_c, \quad (2.2)$$

где  $A$  – площадь фигуры,  $x_c$ ,  $y_c$  – координаты центров тяжести.

Отсюда для определения координат центра тяжести получим такие формулы:

$$x_c = \frac{S_y}{A}, \quad y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (2.3)$$

Если ось проходит через центр тяжести фигуры, то соответствующий статический момент, как легко видеть из формул (2.3), равен нулю.

Повышая под интегралом в выражениях (2.1) степень координат  $x$ ,  $y$  площадки  $dA$ , получим моменты площади второй, третьей и высших степеней относительно осей  $x$ ,  $y$ .

### Моменты площади второй степени

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad (2.4)$$

называются *осевыми (или экваториальными) моментами инерции* относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$ .

Интеграл произведений элементарных площадок на обе координаты

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (2.5)$$

носит название *центробежного момента инерции площади фигуры*.

Если каждая элементарная площадка  $dA$  умножается на квадрат ее радиуса-вектора  $\rho$ , проведенного из какой-либо определенной точки, например из начала координат, то интеграл называется *полярным моментом инерции* фигуры относительно выбранной точки (полюса)

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA. \quad (2.6)$$

Полярный момент инерции всегда равен сумме осевых  $I_x$  и  $I_y$  для любой пары взаимно перпендикулярных осей  $x$  и  $y$ , проходящих через полюс  $\hat{I}$  (рис. 2.1). Для доказательства подставим значение  $\rho^2 = x^2 + y^2$  в формулу (2.6):

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x. \quad (2.7)$$

Из выражений (2.4), (2.5) и (2.6) видно, что осевые и полярный моменты инерции – величины существенно положительные; центробежный момент инерции может быть и положительным и отрицательным и, в частности, равняться нулю, так как элементарные произведения  $xy$  для различных площадок  $dA$  могут иметь разные знаки. Моменты инерции площадей – величины чисто геометрического характера, имеющие размерность (ед. длины)<sup>4</sup>; обычно их выражают в  $\tilde{m}\tilde{l}^4$ . Оси  $x$  и  $y$ , проходящие через центр тяжести фигуры, называются *центрными осями инерции* фигуры.

### 2. Моменты инерции относительно параллельных осей.

Пусть фигура произвольной формы отнесена к центральным осям  $x$ ,  $y$  (рис. 2.2). Перейдем к параллельным осям  $x_1$ ,  $y_1$ , проходящим на расстояниях  $a$  и  $b$  от предыдущих осей. Зависимость между координатами любой элементарной площадки фигуры  $dA$  относительно новых и прежних осей выразится так:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + b, \\ y_1 &= y + a. \end{aligned} \quad (2.8)$$

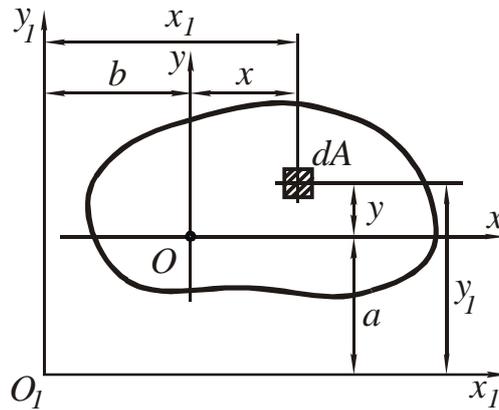


Рис. 2.2. Схема к определению зависимости между моментами инерции для параллельных осей

Подставим эти значения  $x_1$ ,  $y_1$  в общие выражения (2.4) и (2.5) моментов инерции относительно новых осей:

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA,$$

$$I_{y_1} = \int_A x_1^2 dA = \int_A (x + b)^2 dA = \int_A x^2 dA + 2b \int_A x dA + b^2 \int_A dA, \quad (2.9)$$

$$I_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (x + b)(y + a) dA = \int_A xy dA + b \int_A y dA + a \int_A x dA + ab \int_A dA.$$

Замечая, что  $\int_A x dA = \int_A y dA = 0$ , как статические моменты относительно

центральных осей,  $\int_A dA = A$  - площади всей фигуры,  $\int_A y^2 dA = I_x$ ,  $\int_A x^2 dA = I_y$ ,

$\int_A xy dA = I_{xy}$ , перепишем предыдущие равенства в следующем виде:

$$I_{x_1} = I_x + a^2 A, \quad I_{y_1} = I_y + b^2 A, \quad (2.10)$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + abA. \quad (2.11)$$

Формулы (2.10) показывают, что при переходе от центральной оси к другой, ей параллельной, осевой момент инерции фигуры возрастает на величину, равную произведению площади фигуры на квадрат расстояния между осями. Отсюда следует, что из всех параллельных между собой осей наименьшим моментом инерции обладает центральная ось, так как величины  $a^2 A$  и  $b^2 A$  всегда положительны. Из формулы (2.11) видно, что при параллельном переносе обеих центральных осей центробежный момент инерции получает приращение (положительное или отрицательное), равное произведению площади сечения на координаты его центра тяжести в новой системе осей. Очевидно, что при переносе одной из центральных осей, т.е. когда  $a = 0$  или  $b = 0$ , центробежный момент инерции не изменится.

### 3. Понятие о главных осях инерции.

Докажем, что для всякой плоской фигуры существует, по крайней мере, одна пара взаимно перпендикулярных осей с началом в данной точке, для которых центробежный момент инерции равен нулю. Такие оси называются *главными осями инерции* фигуры.

Выберем случайные взаимно перпендикулярные оси  $x$  и  $y$ , проходящие через произвольную точку  $\hat{I}$  (рис. 2.1). Согласно определению центробежный момент инерции относительно этих осей  $I_{xy} = \int_A xy dA$ . Если теперь повернуть

оси вокруг начала координат на  $90^\circ$  против часовой стрелки, и обозначить их новые направления через  $x'$  и  $y'$ , то новые координаты центра тяжести любой элементарной площадки  $dA$  можно выразить через прежние координаты следующим образом:

$$x' = y, \quad y' = -x. \quad (2.12)$$

Тогда центробежный момент инерции относительно повернутых осей будет:

$$I_{x'y'} = \int_A x'y' dA = \int_A y(-x) dA = -I_{xy}. \quad (2.13)$$

Следовательно, при повороте осей на  $90^\circ$  центробежный момент инерции меняет знак на противоположный.

При постепенном повороте осей координаты элементарных площадок, а значит, и центробежный момент инерции изменяются непрерывно. Поэтому при некотором угле поворота, меньшем  $90^\circ$ , центробежный момент перейдет через нулевое значение, причем соответствующие по направлению оси и будут главными осями фигуры. В сопротивлении материалов почти всегда приходится иметь дело с центральными осями, почему главные центральные оси сечения обычно называют просто главными осями, подразумевая начало координат в центре тяжести сечения. Две плоскости, проходящие через продольную ось бруса и главные оси его поперечных сечений, называются *главными плоскостями инерции* бруса.

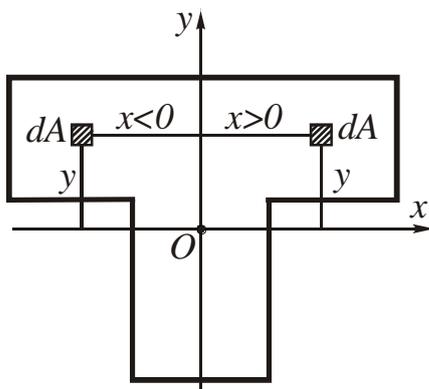


Рис. 2.3. Схема к определению центробежного момента инерции симметричной фигуры

Любая ось симметрии фигуры является одной из главных центральных осей инерции. Пусть, например, сечение, показанное на рис. 2.3, симметрично относительно оси  $y$ . Тогда всякой элементарной площадке  $dA$  справа от оси  $y$  соответствует такая же площадка слева с такими же по величине координатами, из которых одна -  $x$  имеет противоположный знак.

Все элементарные произведения  $xy dA$  оказываются попарно равными и противоположными по знаку, отчего их интеграл, т.е. центробежный момент инерции, обращается в нуль. Другая глав-

ная ось сечения будет, конечно, перпендикулярна к оси симметрии. Таким образом, отыскание главных центральных осей для фигур (сечений), имеющих хотя бы одну ось симметрии, не представляет никаких затруднений.

#### 4. Моменты инерции простейших сечений.

**Пример 2.1.** Определить момент инерции треугольника относительно оси  $x_1$ , проходящей через вершину параллельно основанию (рис. 2.4).

Разобьем площадь треугольника на бесконечно тонкие полоски линиями, параллельными основанию. Площадь одной полоски вычислим как площадь прямоугольника с основанием  $a$  и высотой  $dy$ . Для полоски, находящейся на расстоянии  $y$  от оси,  $a = \frac{by}{h}$ .

Площадь полоски

$$dA = \frac{b}{h} y dy.$$

Отсюда момент инерции

$$I_{x_1} = \int_0^h y^2 \frac{b}{h} y dy = \frac{bh^3}{4}.$$

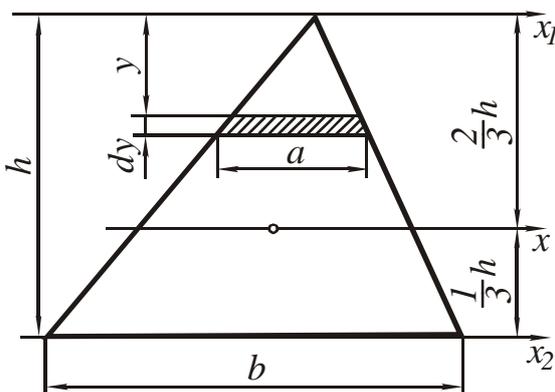


Рис. 2.4. К примеру 2.1

Для определения момента инерции относительно оси  $x_2$ , совпадающей с основанием, мы должны сначала перейти к центральной оси  $x$ , а от нее – к оси  $x_2$ , применяя дважды формулу (2.10):

$$I_x = I_{x_1} - \left(\frac{2h}{3}\right)^2 A = \frac{bh^3}{4} - \left(\frac{2h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36},$$

$$I_{x_2} = I_x + \left(\frac{h}{3}\right)^2 A = \frac{bh^3}{36} + \frac{h^2}{9} \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{12}.$$

**Пример 2.2.** Вычислить полярный момент инерции круга относительно его центра, а также момент инерции относительно центральной оси.

При вычислении полярного момента инерции выделим элементарную полоску в виде тонкого кольца толщиной  $dr$  (рис. 2.5).

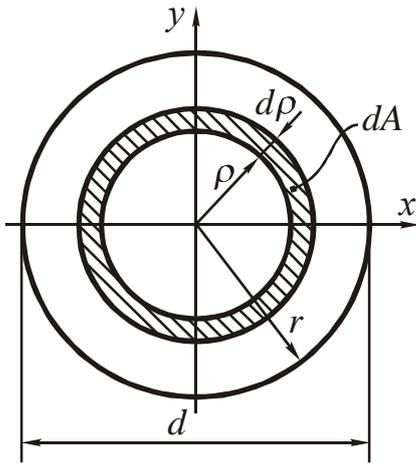


Рис. 2.5. К примеру 2.2

Площадь такого элемента равна

$$dA = \pi(\rho + d\rho)^2 - \pi\rho^2 = \\ = \pi\rho^2 + 2\pi\rho d\rho + \pi d\rho^2 - \pi\rho^2 = 2\pi\rho d\rho$$

Ввиду малости слагаемым  $\pi d\rho^2$  пренебрегаем.

Полярный момент инерции

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \\ = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^r = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}.$$

## 5. Моменты инерции составных сечений.

Если сложное сечение может быть разделено на отдельные части, имеющие форму прямоугольников, треугольников и т.п. (см. рис. 2.6), то момент инерции сечения можно найти как сумму моментов инерции отдельных его частей:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} - I_x^{(4)} = \sum_{i=1}^4 (I_{x_i} + a_i^2 A_i); \quad (2.14)$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} - I_y^{(4)} = \sum_{i=1}^4 (I_{y_i} + b_i^2 A_i);$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} + I_{xy}^{(3)} - I_{xy}^{(4)} = \sum_{i=1}^4 (I_{x_i y_i} + a_i b_i A_i) \quad (2.15)$$

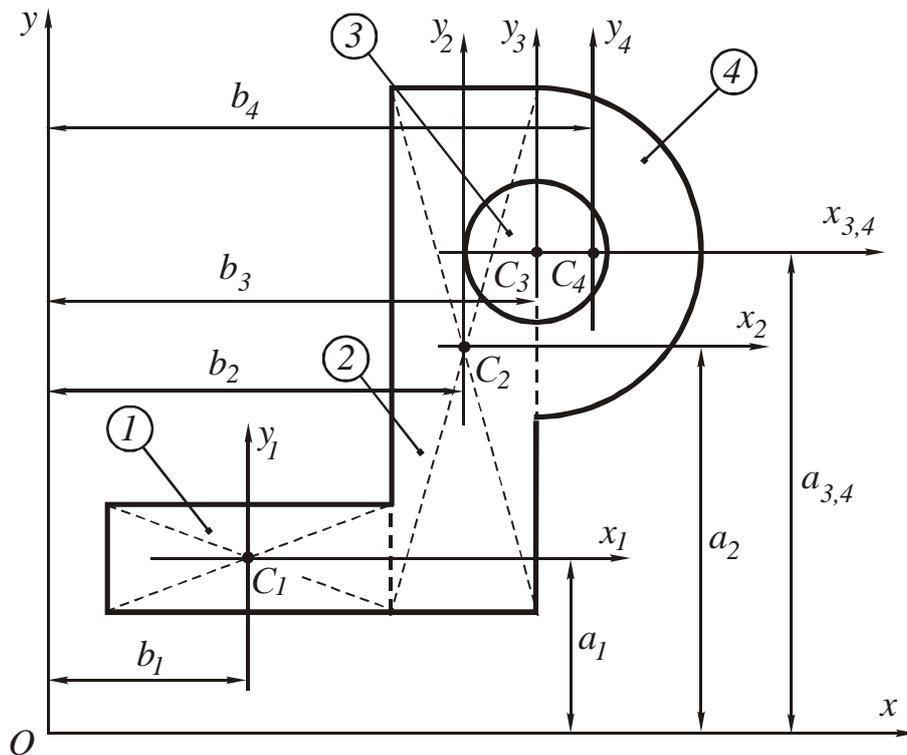


Рис. 2.6. Разбиение составных сечений на элементы

Предварительно определяется центр тяжести сложного сечения по следующим формулам:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{y_i}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}, \quad (2.16)$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{x_i}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + \dots + y_n A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}, \quad (2.17)$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  - площади составляющих фигур;

$x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$  - координаты их центров тяжести.

*Примечание:* При наличии двух осей прямой или косо́й симметрии центр тяжести сечения лежит на их пересечении.

**Пример 2.3.** Определить положение центра тяжести сечения, форма и размеры которого представлены на рис. 2.7.

Разбиваем сечение на простые фигуры и определяем их площади:

- для прямоугольника:

$$A_1 = b_1 h_1 = 4a \cdot 8a = 32a^2;$$

- для равнобедренного треугольника:

$$A_2 = \frac{1}{2} b_2 h_2 = \frac{2a \cdot 3a}{2} = 3a^2.$$

Площадь всего сечения:

$$A = A_1 - A_2 = 32a^2 - 3a^2 = 29a^2.$$

*Примечание:* поскольку треугольник представляет собой отверстие, то перед значением его площади ставится знак «минус».

Вводим в сечении вспомогательную систему координат  $x_0, y_0$ , проводим центральные оси фигур и определяем координаты их центров тяжести относительно осей  $x_0, y_0$ .

Координаты центров тяжести простых фигур, составляющих сечение, находим по размерам, указанным на рисунке.  $\tilde{N}_1(\tilde{o}_1, \tilde{o}'_1)$ ,  $\tilde{N}_2(\tilde{o}_2, \tilde{o}'_2)$ .

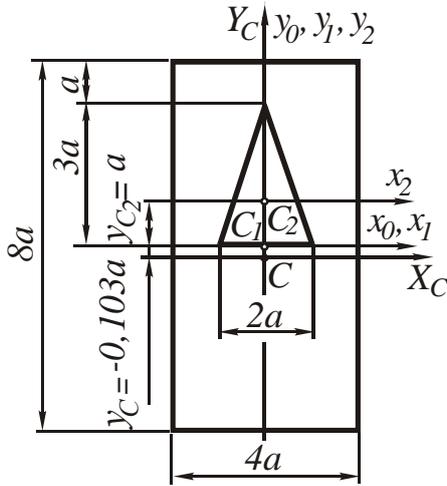


Рис. 2.7. К примеру 2.3.

$x_1 = 0, \tilde{o}'_1 = 0$  - так как оси  $x_0, y_0$  совпадают с центральными осями прямоугольника;

$$x_2 = 0, y_2 = \frac{1}{3} h_2 = \frac{3a}{3} = a.$$

Координаты центра тяжести всего сечения определяем по формулам (2.16 - 2.17). Заданное сечение симметрично относительно вертикальной оси, поэтому  $x_C = 0$ . Ордината центра тяжести сечения равна:

$$y_C = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A} = \frac{0 \cdot 32a^2 - a \cdot 3a^2}{29a^2} = -0,103a.$$

Откладывая вниз по оси  $y_0$  отрезок  $0,103a$ , обозначаем центр тяжести  $C$  и проводим центральные оси сечения  $X_C, Y_C$ . Эти оси являются также главными, поскольку ось  $Y_C$  совпадает с осью симметрии сечения.

Определяя моменты инерции составной фигуры, включающей прокатные профили: равнобокие (рис. 2.8, а) и неравнобокие уголки (рис. 2.8, б), двутавры (рис. 2.8, в), швеллеры (рис. 2.8, г), используют геометрические характеристики, приведённые в таблицах сортамента прокатной стали.

В таблицах сортамента имеются размеры профилей, координаты их центров тяжести и числовые значения моментов инерции относительно характерных координатных осей. Пользуясь сортаментом (см. приложение), следует обращать внимание на направление координатных осей, которые могут не совпадать для профиля в составе рассматриваемой фигуры и приведенного в сортаменте (в последнем случае данные берутся с учетом изменения направления осей).

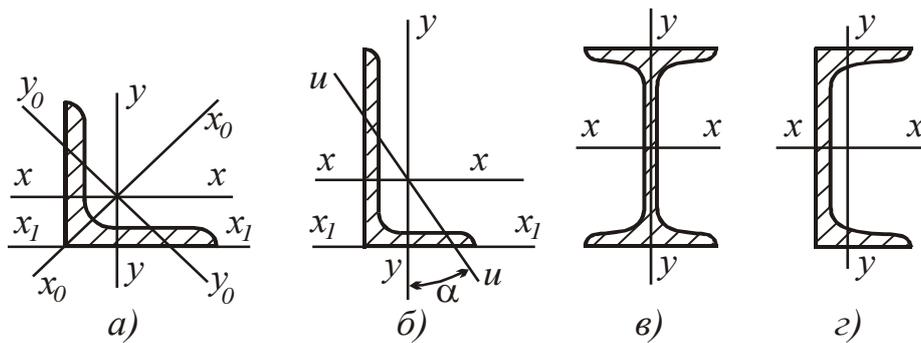


Рис. 2.8. Стандартные прокатные профили

Для уголкового профиля центральные оси, параллельные полкам, не являются главными центральными осями, и при вычислении главных центральных моментов инерции составной фигуры приходится вычислять центробежные моменты инерции относительно этих осей.

### 6. Изменение моментов инерции при повороте координатных осей. Главные оси и главные моменты инерции.

Во всех случаях расчета брусьев на изгиб необходимо знать направление главных центральных осей инерции сечения и величину соответствующих (главных) моментов инерции. Поэтому в дополнение к изложенному необходимо ознакомиться с приемами отыскания главных осей несимметричного сечения.

Возьмем сечение произвольной формы (рис. 2.9), отнесенное к произвольным осям  $x, y$ , и рассмотрим изменение моментов инерции при повороте осей.

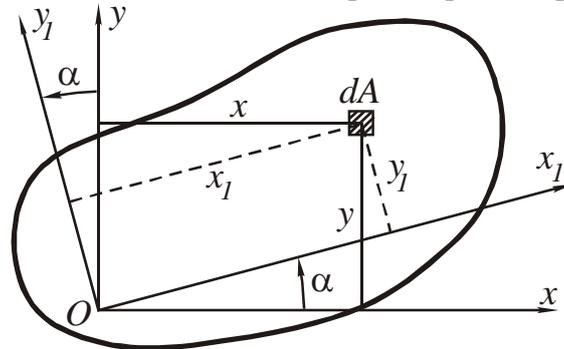


Рис. 2.9. Поворот координатных осей

Пусть нам известны осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно выбранных осей  $x, y$ :

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA; \quad I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (2.18)$$

Повернем обе оси на некоторый угол  $\alpha$  против часовой стрелки, условившись считать это направление поворота положительным, и определим моменты инерции

$I_{x_1}, I_{y_1}, I_{x_1 y_1}$ , для новых осей  $x_1, y_1$ :

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA, \quad I_{y_1} = \int_A x_1^2 dA, \quad I_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 dA. \quad (2.19)$$

В повернутой системе осей координаты  $x_1, y_1$  произвольной элементарной площадки сечения  $dA$  выразятся через прежние ее координаты следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y_1 &= y \cos \alpha - x \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Подставим эти значения координат в первое и последнее из равенств (2.19):

$$\left. \begin{aligned} I_{x_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA, \\ I_{x_1 y_1} &= \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Раскрыв скобки под интегралами, получим после приведения:

$$\left. \begin{aligned} I_{x_1} &= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A xy dA, \\ I_{x_1 y_1} &= \sin \alpha \cos \alpha \left[ \int_A y^2 dA - \int_A x^2 dA \right] + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_A xy dA. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Замечая, что интегралы правых частей равенств (1.19) являются моментами инерции относительно начальных осей  $x, y$ , перепишем эти равенства в следующем виде:

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (2.23)$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} 2 \sin \alpha \cos \alpha + I_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (2.24)$$

Момент инерции  $I_{y_1}$  найдем из (2.23), заменяя в нем  $\alpha$  на  $\alpha + \frac{\pi}{2}$ :

$$I_{y_1} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} 2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (2.25)$$

Полученные формулы определяют все три момента инерции относительно повернутых осей. Складывая почленно (2.23) и (2.25), получим:

$$I_x + I_y = I_{x_1} + I_{y_1} = I_\rho = \text{const}, \quad (2.26)$$

т. е. сумма моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных осей не изменяется при их повороте.

Далее удобно формулы (2.23)-(2.25) выразить через функции угла  $2\alpha$ , в результате чего будем иметь после приведения:

$$\left. \begin{aligned} I_{x_1} &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_{y_1} &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_{x_1 y_1} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

*Примечание:* Положительное направление отсчета угла  $\alpha$  - против хода часовой стрелки.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают экстремальные значения, называются *главными*.

Две взаимно перпендикулярные оси, из которых хотя бы одна совпадает с осью симметрии сечения, являются его главными осями. Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются *главными центральными осями*.

Поворачивая центральные оси, можно отыскать такое их положение, при котором центробежный момент инерции относительно этих осей будет равен нулю. Такие оси называются *главными центральными*. Угол  $\alpha_0$ , на который надо повернуть центральные оси  $\tilde{O}_{\tilde{N}}$ ,  $Y_{\tilde{N}}$ , чтобы они стали главными центральными, определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot I_{X_{\tilde{N}} Y_{\tilde{N}}}}{I_{Y_{\tilde{N}}} - I_{X_{\tilde{N}}}}. \quad (2.28)$$

Осевые моменты инерции относительно этих осей называются *главными центральными* моментами инерции. Один из них имеет максимальную величину, другой - минимальную. Присвоим главным центральным осям индексы  $U$ ,  $V$ , тогда главные центральные моменты инерции относительно осей  $U$ ,  $V$  могут быть вычислены по формулам:

$$\begin{aligned} I_U &= I_{X_C} \cos^2 \alpha_0 + I_{Y_C} \sin^2 \alpha_0 - I_{X_C Y_C} \sin 2\alpha_0; \\ I_V &= I_{X_C} \sin^2 \alpha_0 + I_{Y_C} \cos^2 \alpha_0 + I_{X_C Y_C} \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Эти же формулы могут быть записаны иначе, если использовать функции двойного угла:

$$\begin{aligned} I_U &= \frac{I_{X_{\tilde{N}}} + I_{Y_C}}{2} + \frac{I_{X_{\tilde{N}}} - I_{Y_C}}{2} \cos 2\alpha_0 - I_{X_{\tilde{N}} Y_C} \sin 2\alpha_0; \\ I_V &= \frac{I_{X_{\tilde{N}}} + I_{Y_C}}{2} - \frac{I_{X_{\tilde{N}}} - I_{Y_C}}{2} \cos 2\alpha_0 + I_{X_{\tilde{N}} Y_C} \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Для вычисления главных центральных моментов инерции, исключая тригонометрические функции угла  $\alpha_0$ , можно получить следующую формулу:

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_{X_{\tilde{N}}} + I_{Y_{\tilde{N}}}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{X_{\tilde{N}}} - I_{Y_{\tilde{N}}})^2 + 4I_{X_{\tilde{N}}Y_{\tilde{N}}}^2}. \quad (2.31)$$

Если главные центральные оси принять за исходные, то формулы перехода к произвольно выбранным центральным осям при повороте исходных осей принимают более простой вид

$$\begin{aligned} I_{X_{\tilde{N}}} &= I_U \cos^2 \alpha_0 + I_V \sin^2 \alpha_0 = \frac{I_U + I_V}{2} + \frac{I_U - I_V}{2} \cos 2\alpha_0; \\ I_{Y_{\tilde{N}}} &= I_U \sin^2 \alpha_0 + I_V \cos^2 \alpha_0 = \frac{I_U + I_V}{2} - \frac{I_U - I_V}{2} \cos 2\alpha_0; \\ I_{X_{\tilde{N}}Y_{\tilde{N}}} &= \frac{I_U - I_V}{2} \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

**Пример 2.4.** Определить моменты инерции сечения, представленного на рис. 2.10, относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $x_1$ ,  $x_2$ .

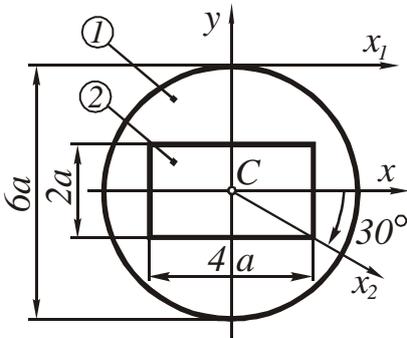


Рис. 2.10. К примеру 2.4

Разбиваем сечение на фигуры: 1 - круг радиуса  $R = 3a$ , 2 - прямоугольник (отверстие)  $b = 4a$ ,  $h = 2a$ . Вычисляем площадь сечения:

$$\begin{aligned} A &= A_1 - A_2 = \pi R^2 - b \cdot h = \\ &= 3,14 \cdot (3a)^2 - 4a \cdot 2a = 20,26a^2. \end{aligned}$$

Оси  $x$ ,  $y$  являются главными центральными, т. к. совпадают с осями симметрии сечения. Центробежный момент  $I_{xy} = 0$ .

Определяем моменты инерции относительно осей  $x$ ,  $y$ :

$$I_x = I_x^{(1)} - I_x^{(2)} = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{bh^3}{12} = \frac{3,14 \cdot (3a)^4}{4} - \frac{4a \cdot (2a)^3}{12} = 60,92a^4,$$

$$I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)} = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{hb^3}{12} = \frac{3,14 \cdot (3a)^4}{4} - \frac{2a \cdot (4a)^3}{12} = 52,92a^4.$$

Воспользовавшись формулами (2.10), вычисляем момент инерции относительно оси  $x_1$  (расстояние между осями  $x$  и  $x_1$  определяем по чертежу  $a = 3a$ )

$$I_{x_1} = I_x + a^2 A = 60,92a^4 + (3a)^2 \cdot 20,26a^2 = 243,26a^4.$$

Момент инерции относительно оси  $x_2$ , повернутой на угол  $\alpha = -30^\circ$  относительно оси  $x$ , вычисляем по формуле (2.23), учитывая, что  $I_{xy} = 0$ :

$$I_{x_2} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha = 60,92a^4 \cdot \cos^2(-30) + 52,92a^4 \cdot \sin^2(-30) = 58,92a^4.$$

**Пример 2.5.** Вычислить центробежный момент инерции неравнобокого уголка  $100 \times 63 \times 8$  мм относительно центральных осей  $x$ ,  $y$  (рис. 2.11, а).

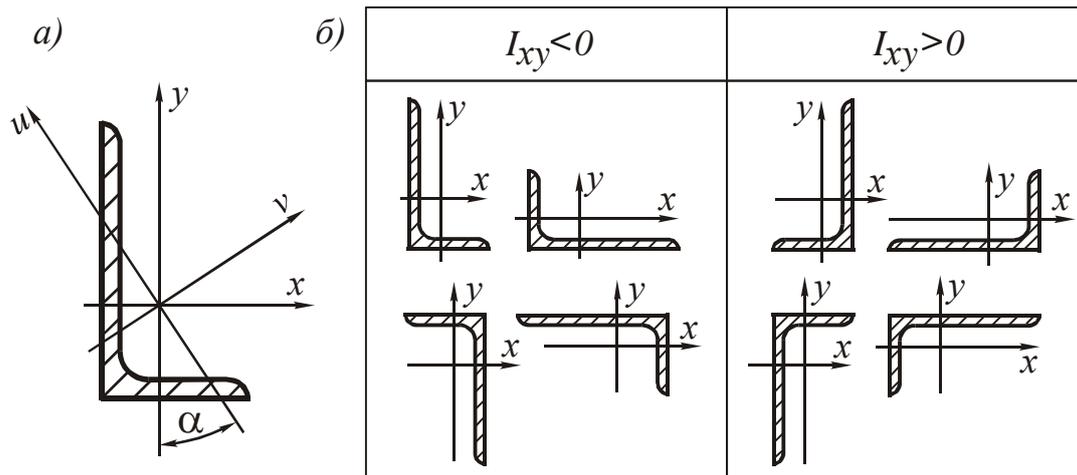


Рис. 2.11. Неравнобокие уголки: *a* – уголок  $100 \times 63 \times 8$  мм; *б* – к определению знака центробежного момента инерции

Для заданного уголка из таблицы сортамента выписываем его характеристики, необходимые для расчета:

$$I_x = 127 \text{ см}^4; I_y = 39,2 \text{ см}^4; I_u = 23,4 \text{ см}^4; \text{tg } \alpha = 0,391.$$

Центробежный момент инерции неравнобокого уголка  $100 \times 63 \times 8$  и относительно центральных осей  $x, y$  определяется по формуле

$$I_{xy} = \mp(I_x + I_y - 2I_u) \cdot \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg}^2 \alpha + 1} = -(127 + 39,2 - 2 \cdot 23,4) \cdot \frac{0,391}{0,391^2 + 1} = -40,5 \text{ см}^4.$$

*Примечание:* Поскольку большая часть площади уголка, расположенного так как показано на рис. 2.11, *a*, находится во II и IV координатных четвертях, то при определении значения  $I_{xy}$ , перед формулой ставится знак «-». Именно в этих четвертях координаты  $a$  и  $b$ , определяющие положение центра тяжести данной части сечения, имеют разные знаки при рассматриваемом положении осей  $\bar{o}$  и  $\acute{o}$ . Поэтому произведение  $a \cdot b \cdot A$  для таких частей будет отрицательным, что в конечном случае и определяет знак центробежного момента инерции всей фигуры.

В практических расчетах для определения знака центробежного момента инерции для равнобоких и неравнобоких уголков можно воспользоваться рис. 2.11, *б*.

## 7. Радиусы инерции.

Выражение момента инерции сечения относительно любой оси  $x$  на основании формулы среднего значения интеграла всегда можно представить в следующем виде:

$$I_x = \int_A y^2 dA = i_x^2 \int_A dA = i_x^2 A, \quad (2.33)$$

где  $A$  – площадь сечения,  $i_x$  - ордината некоторой средней точки сечения.

Эта средняя ордината носит название *радиуса инерции сечения* относительно оси  $x$  и вычисляется по формуле

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}. \quad (2.34)$$

Аналогично, радиус инерции относительно оси  $y$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \quad (2.35)$$

Главным центральным осям  $X_C$  и  $Y_C$  соответствуют главные центральные радиусы инерции

$$i_{X_C} = \sqrt{\frac{I_{X_C}}{A}}, \quad i_{Y_C} = \sqrt{\frac{I_{Y_C}}{A}}. \quad (2.36)$$

Как следует из формул (2.34 – 2.36), размерность радиусов инерции – единицы длины в первой степени [м], [см].

## 2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Для чего нужно знать геометрические характеристики сечений?
2. Всегда ли статический момент сечения положительный?
3. Какая ось называется центральной? Каким свойством она обладает?
4. В каких единицах измерения в системе СИ выражаются статические моменты?
5. Как определяется положение центра тяжести простой фигуры по заданным ее статическим моментам и площади?
6. Всегда ли ось симметрии проходит через центр тяжести сечения?
7. Где расположен центр тяжести сечения, имеющего одну ось симметрии? Две оси симметрии?
8. Какая зависимость существует между осевыми моментами инерции и полярным моментом инерции сечения?
9. В каких единицах измерения в системе СИ выражаются осевые моменты инерции сечения?
10. Почему осевые моменты инерции не могут быть отрицательными?
11. Может ли полярный момент инерции равняться нулю?
12. Всегда ли центробежный момент инерции положителен?
13. При переходе от центральной оси к оси ей параллельной, осевой момент инерции сечения увеличивается или уменьшается?
14. Изменяется ли полярный момент инерции сечения при повороте координатных осей?
15. Сколько главных осей инерции можно провести для плоской фигуры?
16. Сколько главных центральных осей инерции можно провести для плоской фигуры?
17. В чем заключается основное свойство главных осей инерции?
18. Какие оси называются главными центральными осями инерции?
19. Какое направление отсчета угла поворота главных центральных осей фигуры считается отрицательным?
20. Как определяется положение центра тяжести составного сечения по заданным площадям и координатам центров его элементов?
21. Как вычисляются главные центральные моменты инерции составных фигур?
22. Как учитывается наличие отверстий в плоской составной фигуре при вычислении её главных центральных моментов инерции?
23. Какие геометрические характеристики составного сечения необходимо знать для вычисления его радиусов инерции?
24. В каких единицах измерения в системе СИ выражаются радиусы инерции сечения?

### 3. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Определите ординату  $y_c$  центра тяжести швеллера (рис. 2.12).

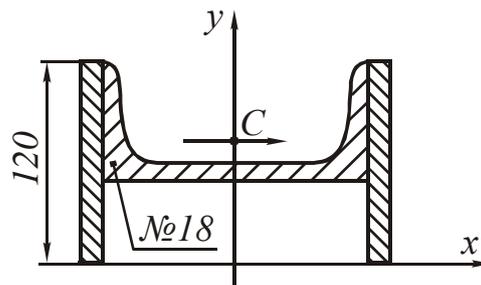


Рис. 2.12. К задаче 1

2. Определить координаты центра тяжести сечения (рис. 2.13).

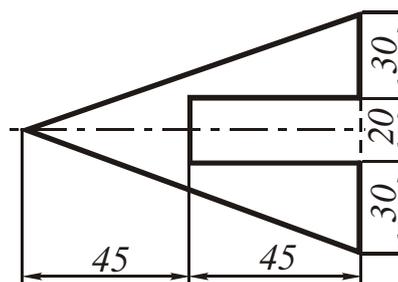


Рис. 2.13. К задаче 2

3. Вычислите момент инерции сечения относительно оси симметрии  $y$  (рис. 2.14).

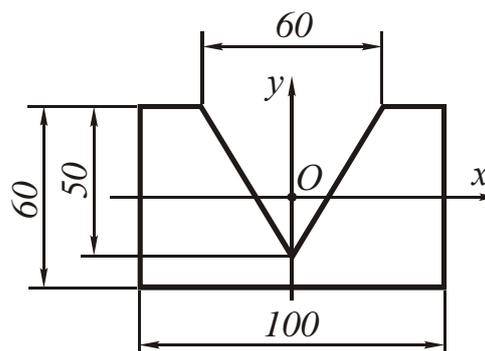


Рис. 2.14. К задаче 3

4. Определите осевые моменты инерции кольца, если его полярный момент инерции  $I_p = 14 \text{ см}^4$ .

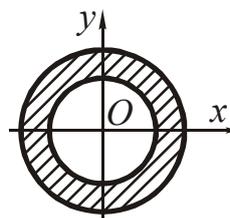


Рис. 2.15. К задаче 4

5. Вычислите момент инерции двутавра (рис. 2.16) относительно осей  $\tilde{o}_1$  и  $y_1$ .

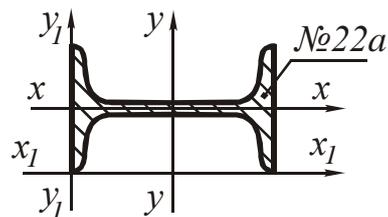


Рис. 2.16. К задаче 5

6. Определите координату  $x_*$  точки  $\hat{I}_1$ , лежащей на центральной оси  $\tilde{o}_1$  треугольника (рис. 2.17), если  $I_{x_1} = I_{y_1}$  и ось  $\tilde{o}_1$  параллельна оси симметрии сечения.

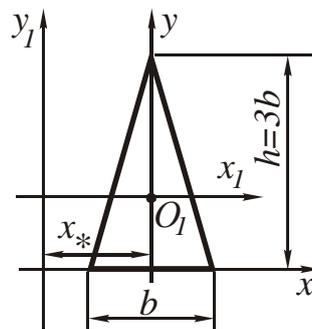


Рис. 2.17. К задаче 6

7. Вычислите момент инерции сечения относительно оси симметрии  $x$  (рис. 2.18).

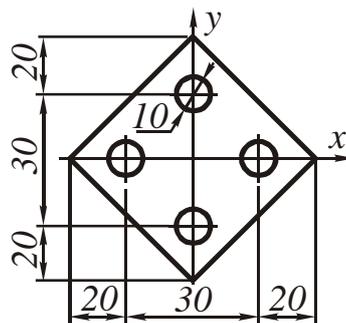


Рис. 2.18. К задаче 7

## ВЫВОДЫ

1. При расчетах на изгиб, кручение и другие виды деформаций влияние размеров и формы поперечного сечения бруса на его прочность, жесткость и устойчивость учитывается при помощи особых геометрических характеристик плоских фигур - статических моментов и моментов инерции.

2. Размерность статических моментов –  $[\tilde{n}i^3]$  или в системе СИ –  $[i^3]$ , размерность моментов инерции –  $[\tilde{n}i^4]$ , в системе СИ –  $[i^4]$ .

3. Значения статических моментов и моментов инерции зависят от формы фигуры, ее размеров, расположения относительно координатных осей. Геометрические характеристики изменяются при параллельном сдвиге координатных осей и их повороте относительно начала координат.

4. Оси, проходящие через центр тяжести плоской фигуры, называются центральными осями.

5. Центральные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают экстремальные значения, называются главными центральными осями.

6. Геометрические характеристики поперечных сечений прокатной стали приводятся в таблицах сортамента (см. «Приложения»). Значения моментов инерции простых геометрических фигур можно вычислить по соответствующим формулам, а сложных (составных) фигур, применяя методику расчета, изложенную в п. 5 подраздела 1 данного раздела и в примерах решения задач.

7. Кроме моментов инерции плоских фигур в расчетах встречаются и другие геометрические характеристики, называемые радиусами инерции. Эти характеристики вычисляются по определенным правилам, либо приведены в таблицах сортамента прокатной стали.

### РАЗДЕЛ 3

## КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО БРУСА

### 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

#### 1. Основные понятия.

Кручением называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях из шести возможных силовых факторов действует только один – крутящий момент. Деформацию кручения испытывают валы двигателей и станков, оси локомотивов, элементы сложных пространственных конструкций.

Брус (стержень), работающий на кручение, называется валом. В технике чаще всего встречаются валы круглого поперечного сечения.

Крутящий момент, действующий в сечении вала, возникает из-за приложенных к валу сосредоточенных или распределенных крутящих моментов. Для изображения нагрузок, прикладываемых к валу, на расчетных схемах могут использоваться различные обозначения (рис. 3.1, а, б).

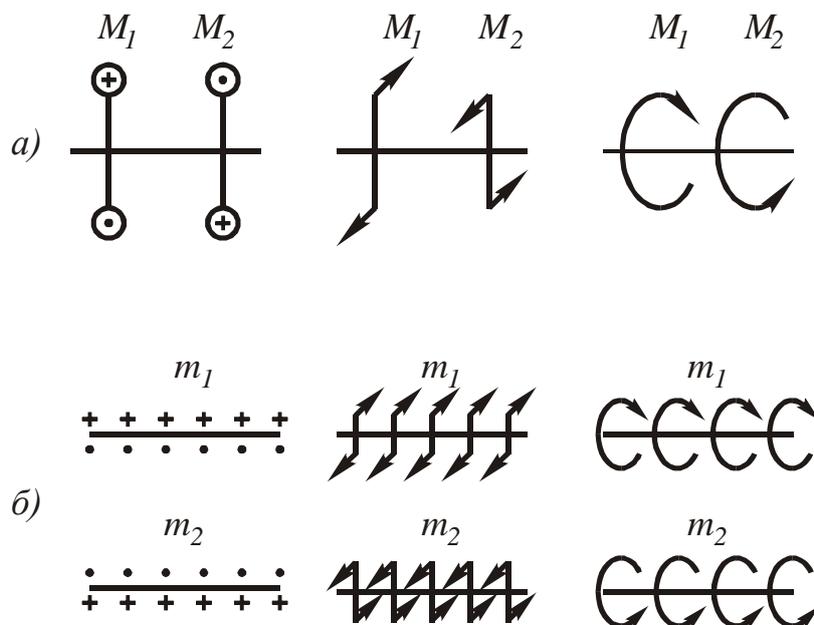


Рис. 3.1. Различные способы изображения сосредоточенных (а) и распределенных (б) крутящих моментов на расчетных схемах

В международной системе единиц измерения СИ крутящий момент измеряется в  $H \cdot м$  (ньютон на метр), а интенсивность крутящего момента, распределенного по длине вала – в  $\frac{H \cdot м}{м}$  (ньютон на метр на метр).

2. Определение крутящих моментов. Построение эпюры крутящих моментов.

Крутящий момент, действующий в каком-либо сечении вала, можно определить с помощью метода сечений. Правило для определения крутящего момента можно сформулировать следующим образом: «Крутящий момент, действующий в сечении вала, равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, действующих по одну сторону от сечения».

Знак крутящего момента определяется по его направлению относительно внешней нормали к рассматриваемому сечению. Общепринятого правила знаков для крутящих моментов нет.

**Пример 3.1.** Построить эпюру крутящих моментов, действующих в поперечных сечениях вала, изображенного на рис. 3.2.

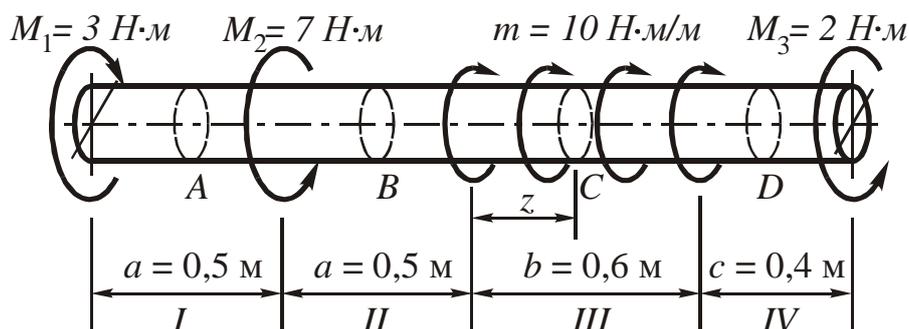


Рис. 3.2. Вал, нагруженный системой скручивающих моментов

Рассмотрим вал, изображенный на рис. 3.2. Вал нагружен одним распределенным и тремя сосредоточенными моментами. Рассматриваемый вал находится в равновесии, в чем можно убедиться, сложив приложенные к нему моменты:

$$-M_1 + M_2 - m \cdot b + M_3 = -3 + 7 - 10 \cdot 0,6 + 2 = -9 + 9 = 0.$$

Здесь положительными считались внешние моменты, закручивающие вал по часовой стрелке (при обходе вала слева направо). Момент, создаваемый распределенной нагрузкой, определялся как произведение интенсивности  $m$  на длину участка  $b$ , на котором он действует.

Моменты, приложенные к валу, делят его на четыре участка. Определим, как меняются крутящие моменты по длине вала. Мысленно рассечем вал между точками приложения моментов  $M_1$  и  $M_2$ . Части вала, расположенные слева и справа от сечения находятся в равновесии. Рассмотрим часть вала, расположенную слева от сечения  $A$  (рис. 3.3.).

Скручивающий внешний момент  $M_1$ , приложенный к отсеченной части слева от сечения  $A$ , уравнивается внутренним силовым фактором – крутящим моментом  $M_A$ , действующем в самом этом сечении.

При изображении крутящего момента в сечении можно принять следующее правило знаков: «Если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали момент изображается вращающим по часовой стрелке, то будем считать его положительным». Изобразим его в сечении в соответствии с этим правилом.

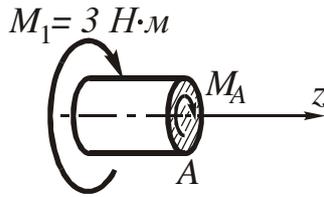


Рис. 3.3. Определение момента в сечении  $A$

Из уравнения статического равновесия  $\sum \dot{I}_z = 0$  найдём:

$$\dot{I}_A = -\dot{I}_1 = -3\dot{I} \cdot i.$$

Крутящий момент  $\dot{I}_A$ , действующий в сечении  $B$  (рис. 3.4.), уравнивает крутящие моменты  $M_1$  и  $M_2$ , направленные в противоположные стороны. Отсюда следует, что

$$M_B = M_2 - M_1 = 7 - 3 = 4\dot{I} \cdot i.$$

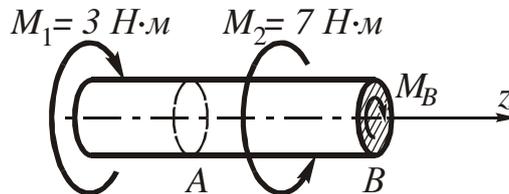


Рис. 3.4. Определение крутящего момента в сечении  $B$

Крутящий момент в сечении  $C$  (рис. 3.5.) уравнивает сосредоточенные моменты  $M_1$ ,  $M_2$  и моментную нагрузку интенсивностью  $m$ , распределенную по участку вала длиной  $z$ .

$$M_{\tilde{N}} = M_2 - M_1 - m \cdot z = 4 - 10 \cdot z.$$

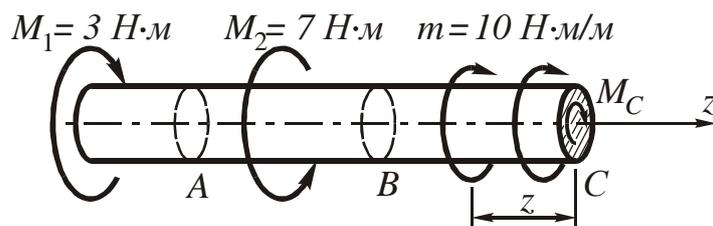


Рис. 3.5. Определение крутящего момента в сечении  $C$

Крутящий момент  $M_D$  в сечении  $D$  (рис. 3.6.) уравнивает действие сосредоточенных моментов  $M_1$ ,  $M_2$  и моментную нагрузку интенсивностью  $m$ , распределенную по участку вала длиной  $0,6$  м, т.е.

$$M_D = M_2 - M_1 - m \cdot 0,6 = -2\dot{I} \cdot i.$$

Определить крутящие моменты, действующие в сечениях вала, можно рассматривая часть вала, находящуюся справа от сечения. Так, например, на четвертом участке момент  $M_D$  уравнивает скручивающий момент  $M_3$ ,

приложенный справа от сечения:  $M_D = -M_3 = -2I \cdot i$ . Распределение крутящих моментов по длине вала обычно изображают в виде графика (эпюры крутящих моментов).

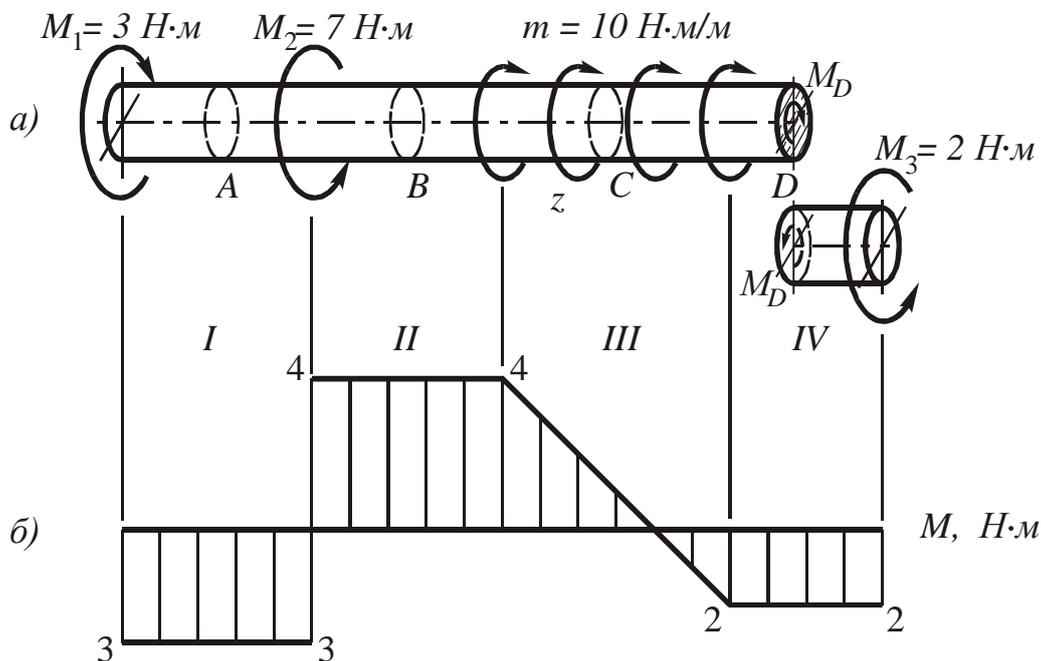


Рис. 3.6. Определение крутящего момента в сечении  $D$  вала (а) и эпюра крутящих моментов (б)

На участках  $I$ ,  $II$ , и  $IV$  крутящие моменты остаются постоянными по длине участка. Крутящий момент, действующий на участке  $III$ , линейно зависит от координаты сечения  $z$ . Таким образом, эпюра крутящих моментов на участках  $I$ ,  $II$ , и  $IV$  представляет собой горизонтальную прямую линию, а на участке  $III$  – наклонную прямую.

3. Касательные напряжения в поперечных сечениях вала. Эпюра касательных напряжений.

При кручении в поперечных сечениях вала действуют только касательные напряжения. Если сечение вала представляет собой круг, касательные напряжения направлены по нормали к радиусам круга (рис. 3.7.).

Величина касательного напряжения  $\tau$  в произвольной точке  $A$  поперечного сечения круглого (рис. 3.7) или трубчатого вала определяется по формуле

$$\tau = \frac{M_{кр}}{I_\rho} \cdot \rho, \quad (3.1)$$

где  $M_{кр}$  – крутящий момент, действующий в данном сечении вала,

$\rho$  – расстояние от центра тяжести сечения до рассматриваемой точки,

$I_\rho$  – полярный момент инерции сечения, величина которого вычисляется по следующим формулам:

- для круглого сечения диаметром  $D$

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}, \quad (3.2)$$

- для кольцевого сечения наружным диаметром  $D$  и внутренним  $d$

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]. \quad (3.3)$$

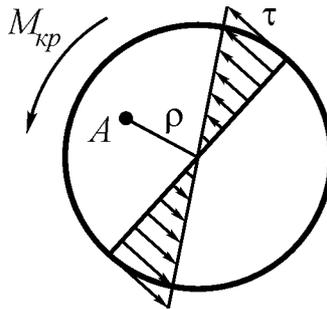


Рис. 3.7. Распределение касательных напряжений по сечению круглого вала

Полярный момент инерции измеряется в единицах длины в четвертой степени ( $\text{м}^4$  или  $\text{мм}^4$ ).

Из формулы (3.1) видно, что максимальные касательные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от центра тяжести сечения вала, т.е. на его поверхности ( $\rho = R$ ).

От величины максимальных касательных напряжений зависит, произойдет разрушение вала или нет, поэтому их величина представляет практический интерес. Для их определения существует формула

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_\rho}, \quad (3.4)$$

где величина  $W_\rho = \frac{I_\rho}{D/2}$  называется полярным моментом сопротивления. Для круглого и кольцевого сечения эту величину можно определить по следующим формулам:

- для круглого сечения

$$W_\rho = \frac{\pi D^3}{16}, \quad (3.5)$$

- для кольцевого сечения

$$W_\rho = \frac{\pi D^3}{16} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]. \quad (3.6)$$

Полярный момент сопротивления измеряется в единицах длины в третьей степени ( $i^3$  или  $\tilde{n}i^3$ ).

Нетрудно заметить, что формула (3.4) получена из формулы (3.1) подстановкой  $\rho = D/2$ .

Для определения опасного сечения вала, состоящего из участков разного размера или формы поперечного сечения, строится эпюра максимальных касательных напряжений. Ниже показан пример построения эпюры максимальных касательных напряжений.

**Пример 3.2.** Построить эпюру максимальных касательных напряжений  $\tau_{\max}$  для бруса, показанного на рис. 3.8.

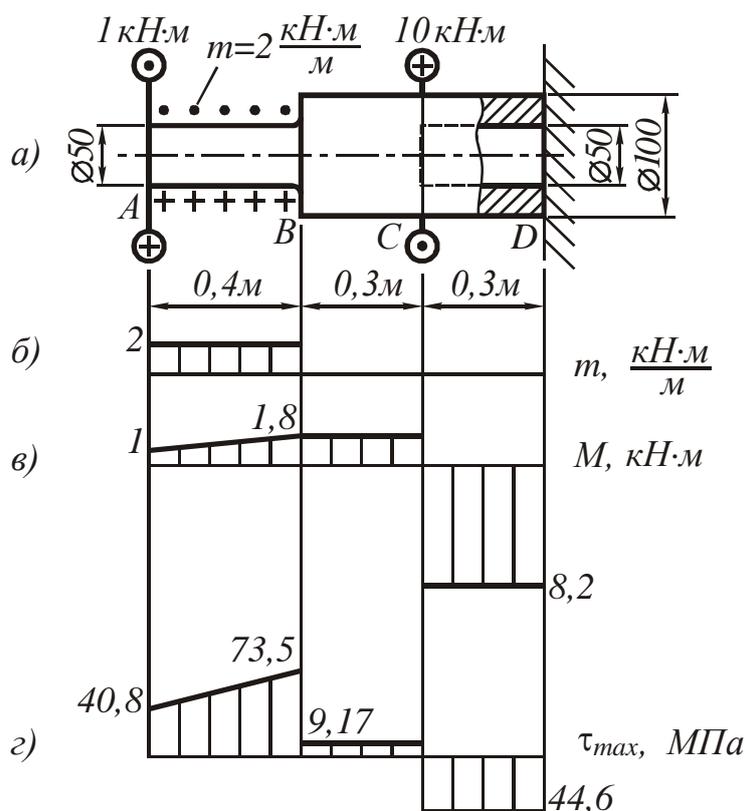


Рис. 3.8. Определение максимальных касательных напряжений: расчетная схема вала (а); эпюра интенсивности распределенной по длине скручиваемой моментной нагрузки (б); эпюра крутящих моментов (в); эпюра максимальных касательных напряжений (г)

Для того, чтобы построить эпюру максимальных касательных напряжений  $\tau_{\max}$ , требуется сначала построить эпюру крутящих моментов, а затем разделить ординаты этой эпюры на соответствующие моменты сопротивления поперечного сечения при кручении. В случае круглого поперечного сечения – делят на полярные моменты сопротивления.

Из рисунка видно, что вал состоит из трех участков – двух сплошных, диаметром 50 и 100 мм, и трубчатого, с внешним диаметром 100 мм и

внутренним 50 мм. Каждый из этих участков будет иметь свой полярный момент сопротивления.

На первом участке ( $AB$ ) кроме скручивающего момента приложена ещё и равномерно распределенная моментная нагрузка с интенсивностью  $m$ . Закон её изменения показан на эпюре  $m$ . Таким образом, крутящий момент на участке  $AB$  будет зависеть от координаты сечения  $z$ .

$$M = 1 + m \cdot z = 1 + 2 \cdot z.$$

На границах участка крутящий момент примет значения

$$M_A = M(z=0) = 1 \hat{e}I \cdot \dot{\iota},$$

$$M_B = M(z=0,4) = 1 + 2 \cdot 0,4 = 1,8 \hat{e}I \cdot \dot{\iota}.$$

На втором участке ( $BC$ ) действует постоянный крутящий момент

$$M_{BC} = M_B = 1,8 \hat{e}I \cdot \dot{\iota}.$$

Крутящий момент на третьем участке ( $CD$ ) равен

$$M_{CD} = 1 + 2 \cdot 0,4 - 10 = -8,2 \hat{e}I \cdot \dot{\iota}.$$

Определим моменты сопротивления  $W_\rho$  для каждого участка бруса:

– участок  $AB$ :

$$W_\rho^{AA} = \frac{\pi D_{AA}^3}{16} = \frac{\pi \cdot 5^3}{16} = 24,5 \tilde{n}\dot{\iota}^3;$$

– участок  $BC$ :

$$W_\rho^{BC} = \frac{\pi D_{BC}^3}{16} = \frac{\pi \cdot 10^3}{16} = 196,3 \tilde{n}\dot{\iota}^3;$$

– участок  $CD$ :

$$W_\rho^{CD} = \frac{\pi D_{CD}^3}{16} \left[ 1 - \left( \frac{d_{CD}}{D_{CD}} \right)^4 \right] = \frac{\pi \cdot 10^3}{16} \left[ 1 - \left( \frac{5}{10} \right)^4 \right] = 184 \tilde{n}\dot{\iota}^3.$$

Касательные напряжения в сечениях  $A$  и  $B$  участка  $AB$

$$\tau_{\max}^A = \frac{M_{\hat{e}\partial}^A}{W_\rho^{AB}} = \frac{1 \cdot 10^3}{24,5 \cdot 10^{-6}} = 40,8 \cdot 10^6 \dot{\iota}\ddot{a} = 40,8 \ddot{\iota}\ddot{a} ;$$

$$\tau_{\max}^{\hat{A}} = \frac{M_{\hat{e}\partial}^{\hat{A}}}{W_\rho^{AB}} = \frac{1,8 \cdot 10^3}{24,5 \cdot 10^{-6}} = 73,5 \cdot 10^6 \dot{\iota}\ddot{a} = 73,5 \ddot{\iota}\ddot{a} .$$

Максимальные касательные напряжения на участке  $BC$ :

$$\tau_{\max}^{\hat{A}\tilde{N}} = \frac{M_{\hat{e}\partial}^{\hat{A}\tilde{N}}}{W_\rho^{B\tilde{N}}} = \frac{1,8 \cdot 10^3}{196,3 \cdot 10^{-6}} = 9,17 \cdot 10^6 \dot{\iota}\ddot{a} = 9,17 \ddot{\iota}\ddot{a} .$$

Максимальные касательные напряжения на участке  $CD$ :

$$\tau_{\max}^{\tilde{N}D} = \frac{M_{\hat{e}\partial}^{\tilde{N}D}}{W_\rho^{\tilde{N}D}} = \frac{8,2 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 44,6 \cdot 10^6 \dot{\iota}\ddot{a} = 44,6 \ddot{\iota}\ddot{a} .$$

При кручении вала прямоугольного поперечного сечения максимальные касательные напряжения возникают в серединах длинных сторон прямоугольника (рис. 3.7).

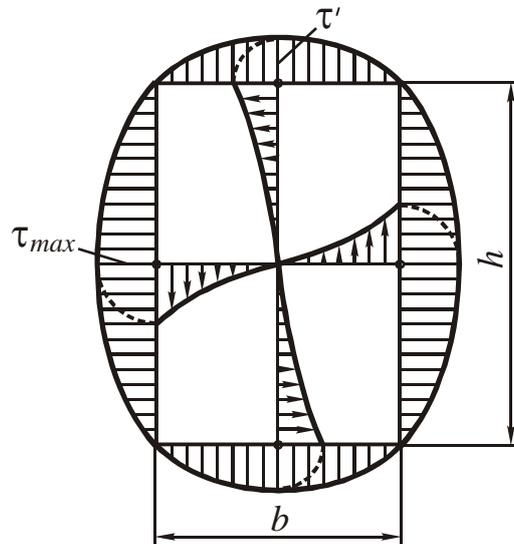


Рис. 3.9. Распределение касательных напряжений по поперечному сечению прямоугольного вала

Величина максимальных касательных напряжений определяется по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{I \hat{\epsilon} \delta}{W_{\hat{\epsilon}}}, \quad (3.7)$$

где в знаменателе стоит момент сопротивления при кручении  $W_{\hat{\epsilon}} = \alpha hb^2$ .

Коэффициент  $\alpha$  зависит от соотношения сторон прямоугольника  $h/b$  (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  для вала прямоугольного сечения

$h/b$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$h/b$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1	0,208	0,141	1,000	3	0,267	0,263	0,750
1,2	0,219	0,166	0,930	4	0,282	0,281	0,740
1,25	0,221	0,172	0,910	5	0,291	0,291	0,740
1,5	0,231	0,196	0,860	6	0,299	0,299	0,740
1,75	0,239	0,214	0,820	8	0,307	0,307	0,740
2	0,246	0,229	0,790	10	0,312	0,312	0,740
2,5	0,258	0,249	0,770	$\infty$	0,333	0,333	0,740

Коэффициент  $\beta$  служит для определения момента инерции сечения при кручении

$$I_{\varrho} = \beta hb^3. \quad (3.8)$$

Коэффициент  $\gamma$  позволяет определять касательные напряжения, возникающие в середине коротких сторон

$$\tau' = \gamma\tau. \quad (3.9)$$

Рассмотрим задачу определения касательных напряжений в сечении прямоугольного вала на следующем примере.

#### 4. Деформация бруса при кручении.

При кручении вала круглого или кольцевого сечения его ось остается прямолинейной, а поперечные сечения, оставаясь плоскими, поворачиваются на некоторый угол  $\varphi$  (угол закручивания). Радиусы, проведенные в сечении до деформации, остаются прямыми.

При кручении брусков некруглого сечения их поперечные сечения не остаются плоскими, а искривляются (депланируют). Различают свободное кручение, при котором деформация происходит свободно, и стесненное кручение.

Для круглого вала угол закручивания на участке длиной  $l$ , имеющем постоянное сечение, равен

$$\varphi = \int_0^l \frac{m(z) \cdot dz}{G \cdot I_{\rho}}. \quad (3.10)$$

В простейшем случае, когда на участке действует постоянный крутящий момент  $M_{\varrho\delta}$ , угол закручивания определяется формулой

$$\varphi = \frac{M_{\varrho\delta} \cdot l}{G \cdot I_{\rho}}. \quad (3.11)$$

Здесь  $G$  – модуль сдвига – механическая характеристика материала, из которого изготовлен вал, описывающая его деформационные свойства при кручении и сдвиге. Модуль сдвига связан с модулем упругости следующей формулой:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad (3.12)$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Для валов некруглого поперечного сечения вместо полярного момента инерции используется величина  $I_{\varrho}$  – момент инерции при кручении. Для валов прямоугольного сечения величина  $I_{\varrho}$  определяется по формуле (3.8).

Произведение  $G \cdot I_{\rho}$ , стоящее в знаменателе формулы (3.11), называется жесткостью бруса при кручении. При подстановке в формулу (3.11) величин в системе СИ полученный угол закручивания измеряется в радианах.

Рассмотрим деформацию ступенчатого бруса круглого сечения (рис. 3.11.).

**Пример 3.3.** Построить эпюру углов поворота сечений стального бруса, показанного на рис. 3.10, относительно заделки. Модуль сдвига стали  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа.

Разобьем рассматриваемый вал на три участка:  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ . На участке  $AB$  действует крутящий момент  $M_{AB} = 120 - 40 = 80 \text{ } \dot{\text{И}} \cdot \dot{\text{И}}$ , на участках  $BC$  и  $CD$  крутящий момент  $M_{BC} = M_{CD} = -40 \text{ } \dot{\text{И}} \cdot \dot{\text{И}}$ .

Чтобы найти углы закручивания на каждом участке, нужно определить для этих участков полярные моменты инерции.

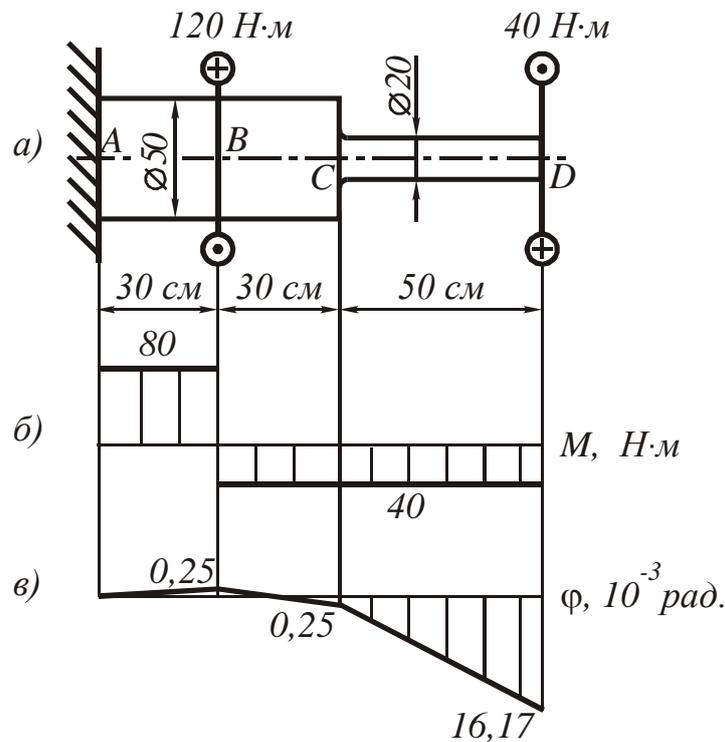


Рис. 3.10. Определение углов закручивания ступенчатого бруса:  
 а – расчетная схема вала; б – эпюра крутящих моментов;  
 в – эпюра углов закручивания

На участках  $AB$  и  $BC$

$$I_{\rho}^{\hat{A}\hat{A}} = I_{\rho}^{\hat{A}\hat{N}} = \frac{\pi D_{AC}^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{32} = 61,3 \text{ } \dot{\text{И}}^4,$$

на участке  $CD$

$$I_{\rho}^{\tilde{N}D} = \frac{\pi D_{CD}^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 2^4}{32} = 1,57 \tilde{n}^4.$$

Углы закручивания на участках определим по формуле (3.11).

$$\Delta\varphi_{AB} = \frac{80 \cdot 0,3}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 61,3 \cdot 10^{-8}} = 0,50 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{BC} = \frac{-40 \cdot 0,3}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 61,3 \cdot 10^{-8}} = -0,25 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{CD} = \frac{-40 \cdot 0,5}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 1,57 \cdot 10^{-8}} = -15,92 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Найдем углы поворота сечений  $B$ ,  $C$  и  $D$  относительно заделки и построим эпюру углов закручивания.

$$\varphi_A = 0 \text{ (т.к. сечение } A \text{ жёстко закреплено)}$$

$$\varphi_B = \Delta\varphi_{AB} = 0,50 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \Delta\varphi_{BC} = 0,50 \cdot 10^{-3} - 0,25 \cdot 10^{-3} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \Delta\varphi_{CD} = 0,25 \cdot 10^{-3} - 15,92 \cdot 10^{-3} = -15,67 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

#### 5. Расчет вала на прочность и жесткость.

К каждому брусу, работающему на кручение, предъявляются требования прочности и жесткости. Условие прочности выполняется, если максимальные касательные напряжения, возникающие в его сечении, не превышают допустимых:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\rho}} \leq [\tau]. \quad (3.13)$$

Обычно допустимое касательное напряжение  $[\tau] = 0,5 \dots 0,7 [\sigma]$ .

Чтобы проверить брус по условию жесткости, вводится понятие относительного, или погонного, угла закручивания  $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$ . Для участка вала постоянного поперечного сечения, нагруженного постоянным моментом  $M$

$$\theta = \frac{\Delta\varphi}{l} = \frac{M}{GI_{\rho}}. \quad (3.14)$$

Размерность относительного угла закручивания –  $\frac{\text{рад}}{\text{м}}$  (радиан на метр).

Условие жесткости выполняется, если максимальный относительный угол закручивания не превышает своего допустимого значения

$$\theta_{\max} = \frac{M}{GI_{\rho}} \leq [\theta]. \quad (3.15)$$

Примеры расчетов на прочность и жесткость приведены ниже.

**Пример 3.4.** Определить из условия прочности величину максимального крутящего момента, который можно приложить к валу квадратного сечения (рис. 3.11) со стороной 6 см, изготовленному из стали, для которой  $[\tau] = 140 \text{ МПа}$ .

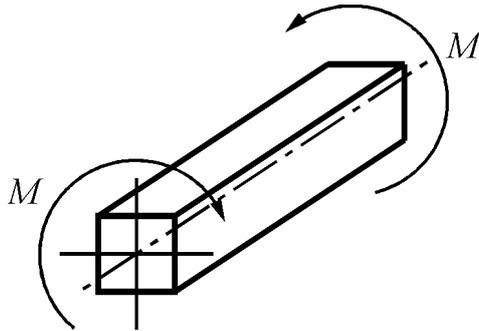


Рис. 3.11. К расчету вала квадратного сечения

Запишем условие прочности при кручении

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{ед}}}{W_{\text{e}}} \leq [\tau].$$

Из этого условия следует, что максимальный крутящий момент, который можно приложить к валу, не нарушив условие прочности, равен

$$M_{\text{ед}} = W_{\text{e}} [\tau].$$

Момент сопротивления прямоугольного сечения  $W_{\text{e}} = \alpha hb^2$ . Из табл. 3.1 для отношения  $h/b = 1$  имеем  $\alpha = 0,208$ . Тогда

$$W_{\text{e}} = \alpha bh^2 = 0,208 \cdot 6 \cdot 6^2 = 44,93 \text{ см}^3,$$

$$M_{\text{ед}} = 44,93 \cdot 10^{-6} \cdot 140 \cdot 10^6 = 6290 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

В некоторых случаях в качестве нагрузки на вал задается не величина крутящего момента, а мощность  $N$ , передаваемая валом при известной угловой скорости  $\omega$ . В этом случае момент, скручивающий вал, можно определить по формуле

$$M_{\text{ед}} = \frac{N}{\omega}. \quad (3.16)$$

При этом мощность может быть задана в лошадиных силах (*л.с.*), а угловая скорость – в оборотах в минуту (*об/мин*). При решении таких задач следует перевести единицы измерения в систему СИ, как это показано в следующем примере.

**Пример 3.5.** Стальной вал круглого сечения (рис. 3.12) скручивается моментом  $M = 600 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Определить минимальный диаметр вала, отвечающий требованиям прочности и жесткости. Модуль сдвига стали  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , допускаемый относительный угол закручивания  $[\theta] = 0,04 \text{ рад./м}$ , допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 80 \text{ МПа}$ .

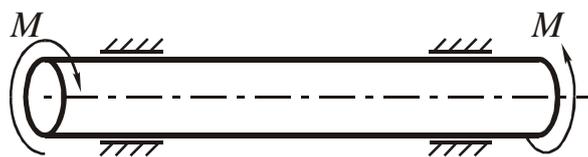


Рис. 3.12. К подбору диаметра вала

Из условия прочности (3.13) найдем минимально необходимый момент сопротивления

$$W_{\rho} = \frac{M \hat{\epsilon} \delta}{[\tau]} = \frac{600}{80 \cdot 10^6} = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 7,5 \tilde{\text{н}} \text{ м}^3.$$

Для круглого сечения момент сопротивления вычисляется по формуле

$$W_{\rho} = \frac{\pi D^3}{16}, \text{ откуда}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_{\rho}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 7,5}{3,14}} = 3,36 \text{ см} \approx 34 \text{ мм}.$$

Из правой части условия жесткости  $\theta_{\max} = \frac{M \hat{\epsilon} \delta}{GI_{\rho}} \leq [\theta]$  следует формула

для нахождения необходимого полярного момента инерции

$$I_{\rho} = \frac{M \hat{\epsilon} \delta}{G[\theta]} = \frac{600}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,04} = 18750 \cdot 10^{-11} \text{ м}^4 = 18,75 \tilde{\text{н}} \text{ м}^4.$$

Поскольку для круглого сечения полярный момент инерции находится по

формуле  $I_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32}$ , минимально необходимый диаметр определим следующим образом:

$$D = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot I_{\rho}}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 18,75}{3,14}} = 3,72 \text{ см} \approx 38 \text{ мм}.$$

Здесь диаметр вала округлен до ближайшего четного (в мм), учитывая стандартный ряд типоразмеров деталей.

Таким образом, чтобы рассматриваемый вал удовлетворял условию прочности, его диаметр должен быть не менее 34 мм, а чтобы выполнялось условие жесткости – не менее 38 мм. Очевидно, что оба условия – прочности и жесткости – будут выполняться при минимальном диаметре вала 38 мм.

## 2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какой вид нагружения стержня называется кручением?
2. Как называется брус, работающий на кручение?
3. Как можно определить крутящий момент в заданном поперечном сечении бруса?
4. Какие напряжения возникают при кручении?
5. Какими параметрами характеризуется деформация кручения?
6. Сформулируйте закон Гука при кручении.
7. Запишите условие прочности при кручении. Как называются величины, входящие в эту формулу?
8. Какие напряжения возникают при кручении круглого и прямоугольного бруса? Как они распределяются по сечению, и по каким формулам вычисляются?
9. В каких единицах измерения в системе СИ выражаются:
  - крутящий момент?
  - момент, распределенный по длине бруса?;
  - относительный угол закручивания?
10. Какие гипотезы приняты при кручении круглого бруса и почему они не применимы к прямоугольным брусам?
11. Как распределяются напряжения при кручении прямоугольного бруса?
12. Как вычислить максимальные напряжения?
13. Как вычисляется крутящий момент  $M_{\text{ед}}$ , приложенный к валу, если известна передаваемая валом мощность  $N$  и угловая скорость его вращения  $\omega$ ?
14. Как определить угловую скорость вращения вала, если известна частота вращения вала?
15. Что называется эпюрой крутящих моментов? Эпюрой максимальных касательных напряжений?
16. Как выглядит эпюра крутящих моментов в точке приложения сосредоточенного момента? На участке, где действует момент, равномерно распределенный по длине вала?
17. Какие напряжения действуют в поперечном сечении бруса при кручении?
18. Как распределяются напряжения по поперечному сечению круглого бруса при кручении? Трубочатого вала? Прямоугольного вала?
19. В каких точках сечения круглого вала касательные напряжения максимальны? Равны нулю?
20. В каких точках сечения прямоугольного вала касательные напряжения максимальны? Равны нулю?
21. В каких точках сечения трубчатого вала касательные напряжения минимальны?
22. Зависит ли характер распределения напряжений по площади поперечного сечения вала от формы его поперечного сечения?
23. Какой вид деформации испытывают продольные волокна вала?
24. Какой вид деформации испытывают поперечные сечения круглого вала?

25. Зависит ли величина напряжений, действующих в поперечном сечении бруса, от свойств материала, из которого брус изготовлен?
26. По какой формуле можно определить напряжения в точке поперечного сечения круглого вала, удаленной от центра круга на расстояние  $\rho$ ?
27. В каких точках вала трубчатого поперечного сечения касательные напряжения равны нулю?
28. Какое явление называется депланацией?
29. Какие свойства материала характеризует модуль сдвига  $G$ ?
30. Как, зная модуль упругости материала и коэффициент Пуассона, определить модуль сдвига?
31. Диаметр вала увеличили в два раза. Как изменятся максимальные касательные напряжения в сечениях вала?
32. Диаметр вала уменьшили в два раза. Как изменится угол закручивания вала?
33. Произведение каких двух величин называют жесткостью бруса при кручении?
34. Как вычисляется угол закручивания бруса переменного поперечного сечения?
35. По какой формуле можно определить момент сопротивления при кручении для вала прямоугольного сечения?
36. Запишите условие прочности при кручении.
37. Какое сечение вала является опасным?
38. Какое касательное напряжение принимают в качестве опасного для пластичного материала?
39. В чем состоит проверочный расчет бруса на жесткость при кручении?
40. Какие стержни называются тонкостенными?
41. Чем отличается свободное кручение от стесненного?
42. Какая величина обозначается греческой буквой  $\Omega$ ?
43. Какая величина называется потоком касательных сил?
44. Запишите формулу Бредта.

### 3. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Стальной брус круглого поперечного сечения диаметром  $d = 22 \text{ мм}$  при испытании на кручение разрушился при действии крутящего момента  $\dot{I}_{\vartheta} = 120 \dot{I} \cdot \dot{i}$ . Определить величину разрушающих касательных напряжений.

2. Как изменится максимальное касательное напряжение в сечении вала прямоугольного сечения, если стороны прямоугольника увеличить в два раза?

3. Определите максимальный крутящий момент для вала (рис. 3.22).

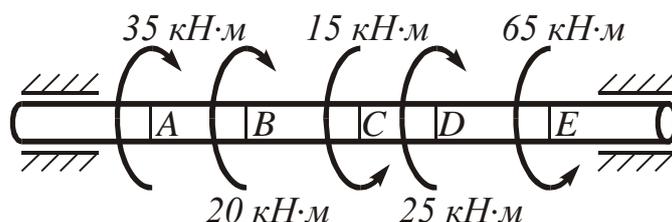


Рис. 3.22. Схема вала к задаче 3

4. Вал (рис. 3.23) длиной 60 см и диаметром 30 мм закручивается крутящим моментом  $\dot{I} = 200 \dot{I} \cdot \dot{i}$ . Чему равен угол закручивания вала, если модуль сдвига материала вала  $G = 8 \cdot 10^{10} \dot{\dot{I}}\dot{\dot{a}}$  ?

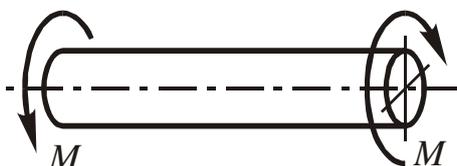


Рис. 3.23. Схема вала к задаче 4

5. В какой точке вала (рис. 3.24) касательные напряжения минимальны?

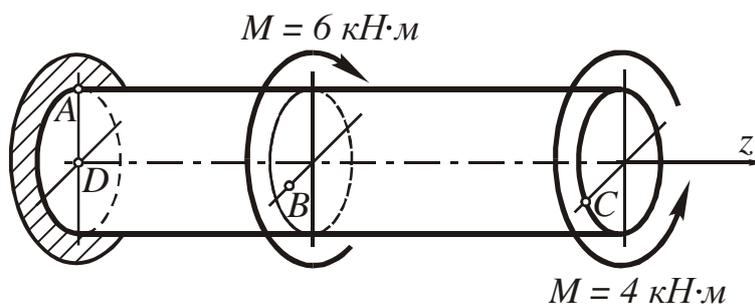


Рис. 3.24. Схема вала к задаче 5

6. Два вала круглого поперечного сечения и одинаковой длины нагружены скручивающими моментами. Первый – моментом  $\dot{I}_1$ , второй –  $\dot{I}_2$ . Определите соотношение углов закручивания валов, если  $D_1 = 2D_2$ ,  $\dot{I}_1 = 2\dot{I}_2$ .

7. Круглый стальной стержень (модуль сдвига стали  $G = 0,8 \cdot 10^{11} \text{ Ёа}$ ) диаметром  $d = 50 \text{ мм}$  и длиной  $l = 0,25 \text{ м}$  закручивается на угол  $\varphi = 0,1^\circ$ . Чему равны максимальные касательные напряжения  $\tau_{\text{max}}$  ?

8. Какую максимальную мощность  $N$  в кВт может передавать стальной вал диаметром  $d = 20 \text{ мм}$ , делающий 3200 об/мин, если допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 60 \text{ МПа}$ .

9. Определить коэффициент запаса прочности  $n$  полого вала (рис. 3.25), если касательное напряжение в точке  $A$  равно 40 МПа, а предел текучести материала  $\tau_\delta = 220 \text{ МПа}$ .

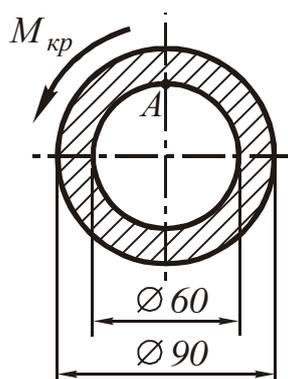


Рис. 3.25. Схема сечения вала к задаче 9

10. Прямоугольный вал, размерами сечения 45x30 мм, нагружен постоянным скручивающим моментом  $\dot{I} = 300 \text{ Ё} \cdot \dot{i}$ . Постройте эпюру распределения касательных напряжений по сторонам прямоугольника.

11. Сплошной круглый вал диаметром 60 мм заменили на трубчатый вал, у которого внутренний диаметр на 10% меньше наружного. Определите диаметр трубчатого вала при сохранении прежнего запаса прочности. Сравните массы валов.

12. Подобрать диаметр круглого вала, передающего мощность 65 л.с. при скорости вращения вала 970 об/мин, приняв допускаемое касательное напряжения равным 40 МПа.

13. Определить максимальное касательное напряжение в тонкостенном стержне замкнутого сечения (рис. 3.26), нагруженном постоянным скручивающим моментом  $\dot{I} = 600 \dot{I} \cdot i$ .

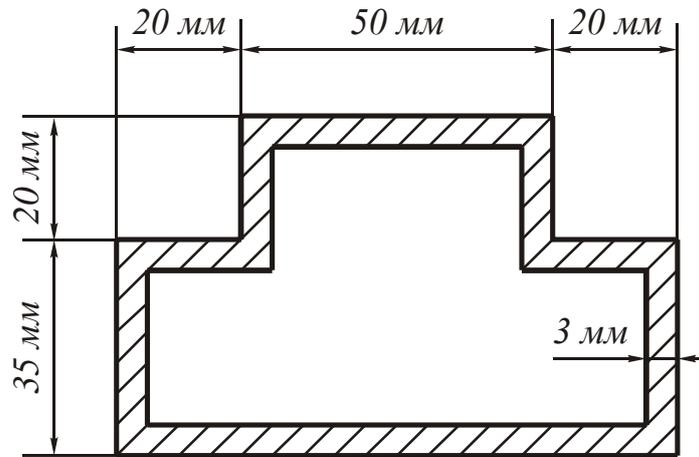


Рис. 3.26. Поперечное сечение тонкостенного стержня к задаче 13

14. Определить максимальное касательное напряжение в тонкостенном стержне незамкнутого сечения (рис. 3.27), нагруженном постоянным скручивающим моментом  $\dot{I} = 500 \dot{I} \cdot i$ .

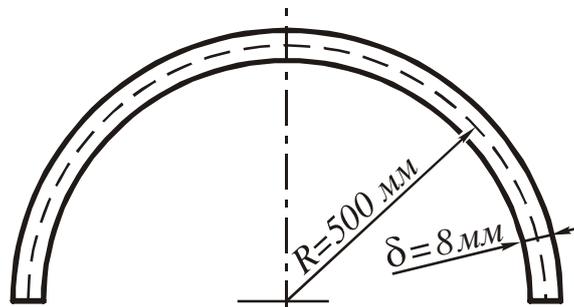


Рис. 3.27. Поперечное сечение тонкостенного стержня к задаче 14

## ВЫВОДЫ

1. Кручением называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечном сечении возникает только крутящий момент. Стержень, работающий на кручение, называется валом.

2. Крутящий момент, действующий в поперечном сечении бруса равен сумме внешних моментов, действующих по одну сторону от сечения. Не существует общепринятого правила относительно знака крутящего момента. В международной системе СИ крутящий момент измеряется в  $\overset{\cdot}{I} \cdot \overset{\cdot}{i}$ , а интенсивность крутящего момента, распределенного по длине вала – в  $\frac{\overset{\cdot}{I} \cdot \overset{\cdot}{i}}{i}$ .

3. Крутящий момент, действующий в поперечном сечении бруса, представляет собой интеграл от касательных напряжений по площади сечения. В случае бруса круглого или кольцевого сечения касательные напряжения в точке поперечного сечения бруса прямо пропорциональны расстоянию от центра круга до рассматриваемой точки.

4. При кручении круглого вала его ось остается прямой, а сечения, оставаясь плоскими, поворачиваются на некоторый угол относительно начального положения; при этом радиусы, проведенные из центра круга, остаются прямыми.

5. Вал отвечает требованию прочности, если максимальные касательные напряжения, возникающие в его поперечных сечениях, не превышают допустимого напряжения, установленного для материала вала.

6. Для обеспечения требуемой жесткости бруса при кручении необходимо, чтобы наибольший относительный угол закручивания не превышал допустимого, устанавливаемого либо нормативами и стандартами, либо назначаемого на основе опыта проектирования и эксплуатации аналогичных конструкций.

7. При кручении некругового вала его поперечные сечения искривляются (депланируют). Максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях некругового вала определяются с помощью таблиц, построенных на основе решений задач теории упругости.

8. Тонкостенные стержни замкнутого профиля обладают гораздо большей прочностью и жесткостью по сравнению с тонкостенными стержнями незамкнутого профиля.

## ИЗГИБ ПРЯМОГО БРУСА

## 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

## 1. Основные понятия.

Изгибом называется напряженно-деформированное состояние бруса, при котором в его поперечном сечении из шести внутренних силовых факторов два равны нулю - крутящий момент  $\dot{I}_{\partial\partial}$  и продольная сила  $N$ .

Изгиб вызывается нагрузками, перпендикулярными к оси бруса, или сосредоточенными моментами, действующими в плоскости, в которой лежит его ось. Если все нагрузки, приложенные к брусу, лежат в одной плоскости, изгиб называется *прямым*.

Если в поперечном сечении действуют только изгибающий момент  $M$ , а поперечная сила  $Q$  равна нулю, изгиб называется *чистым*, если же в поперечном сечении  $Q \neq 0$ , изгиб называется *поперечным*.

В данном разделе рассматривается нагружение бруса поперечными силами и парами сил, лежащими в одной, проходящей через ось бруса, плоскости, называемой *силовой*. Линия пересечения силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения бруса называется *силовой линией*. Если силовая линия совпадает с главной центральной осью поперечного сечения, изогнутая ось бруса (его *упругая линия*) располагается в силовой плоскости. Такой вид изгиба называется *плоским поперечным*.

## 2. Балка. Опорные устройства (опоры) и опорные реакции.

Прямой брус, испытывающий изгиб, называется *балкой*. На расчетной схеме балку принято заменять ее осью (рис. 4.1), при этом все нагрузки приводятся к этой оси. Часть балки ( $AB$ ), расположенная между опорами, называется ее *пролетом*, а свешивающаяся ее часть ( $BC$ ) - *консолью*.

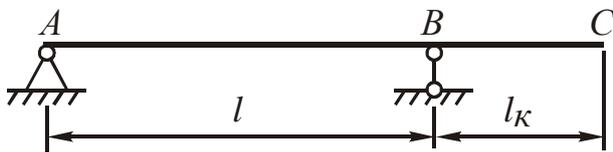


Рис. 4.1. Расчетная схема балки

В теории изгиба употребляют термин *волокно*, уподобляя сплошное вещество, из которого сделан брус, веществу волокнистой структуры, что, вообще говоря, неправильно. Мы будем называть *волокном материальную линию, бывшую до деформации прямой, параллель-*

*ной оси бруса*. Координаты  $x$  и  $y$  точки пересечения волокна с плоскостью поперечного сечения назовем *координатами волокна*. Еще раз подчеркнем, что понятие *волокно* для кристаллического материала условно.

Для того чтобы балка могла воспринимать нагрузки и передавать их на основание или другие части конструкции, она должна иметь опорные устройства (опоры). Конструктивные формы опор весьма разнообразны. Чаще всего встречаются следующие основные типы опорных устройств:

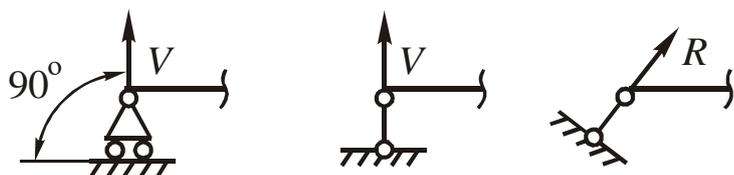


Рис. 4.2. Схематическое изображение шарнирно – подвижных опор

а) шарнирно - подвижная опора. Эта опора допускает поворот опорного сечения балки и его перемещение параллельно опорной поверхности. Реакция этой опоры проходит через шарнир перпендикулярно опорной по поверхности (рис. 4.2);

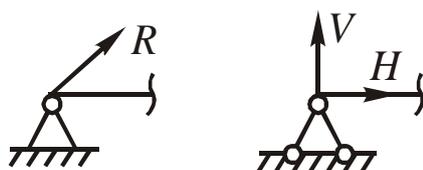


Рис. 4.3. Схематическое изображение шарнирно – неподвижных опор

б) шарнирно - неподвижная опора допускает только поворот опорного сечения балки.



Рис. 4.4. Схематическое изображение подвижной заделки

Реакция  $R$  проходит через ось шарнира, обычно ее представляют двумя составляющими -  $V$  и  $H$  (рис. 4.3);

в) подвижная заделка представляет собой паз, который допускает смещение опорного сечения параллельно опорным поверхностям. В опоре действуют два реактивных усилия: сила  $V$ , перпендикулярная опорной поверхности, и опорный момент  $M$  (рис. 4.4);

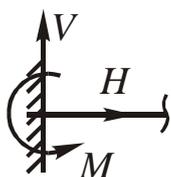


Рис. 4.5. Схематическое изображение неподвижной (жесткой) заделки

г) заделка (жесткое защемление) исключает угловое и линейные перемещения опорного сечения. Реакция заделки представляется ее тремя составляющими: силой  $V$ , перпендикулярной опорной поверхности, силой  $H$ , направленной вдоль оси балки, и опорным моментом  $M$  (рис. 4.5).

Опорные реакции определяются из уравнений равновесия балки (уравнений статики), число которых для плоской системы сил равно трем. Если их достаточно для того, чтобы найти реакции опор, балку называют *статически определимой*, в противном случае балка *статически неопределима*.

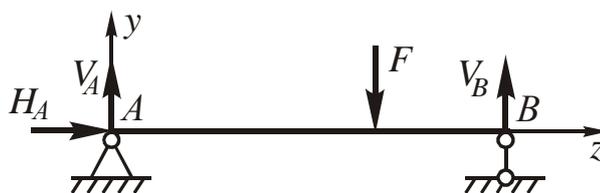


Рис. 4.6. Расчетная схема статически определимой балки

Способы определения опорных реакций рассматриваются в курсе теоретической механики. Для статически определимой балки (рис. 4.6) вычисления рекомендуется проводить в следующем порядке:

- обозначить опоры буквами  $A, B, \dots$  либо цифрами  $1, 2, \dots$ ; вертикальные реакции обозначаются латинскими буквами  $V$  или  $R$  с индексом соответствующей опоры (например,  $V_A, R_1$  и т.д.);

- выбрать направление опорных реакций и изобразить их на схеме (обычно опорные реакции направляют вверх, опорный момент – по часовой стрелке);

- выбрать систему координат: ось  $Z$  направить вдоль оси балки, ось  $Y$  – вверх;

- найти три неизвестные реакции опор из уравнений равновесия балки, для чего:

1. Составить сумму проекций всех сил, приложенных к балке, на ее ось и приравнять ее нулю ( $\sum Z = 0$ ), что позволяет определить горизонтальную реакцию  $H_A$ . Так как внешние силы при изгибе перпендикулярны оси балки, уравнение удовлетворяется тождественно ( $H_A \equiv 0$ );

2. Составить сумму моментов всех внешних сил, приложенных к балке, относительно второй опоры ( $\sum M_B = 0$ ) и вычислить величину реакции  $V_A$ ;

3. Составить сумму моментов всех внешних сил, приложенных к балке, относительно первой опоры ( $\sum M_A = 0$ ) и вычислить величину реакции  $V_B$ ;

4. Проверить правильности вычислений, используя равенство нулю суммы проекций всех сил, включая реакции опор, на вертикальную ось ( $\sum Y = 0$ ), или же условие равенства нулю суммы моментов всех сил относительно произвольно выбранной точки  $C$ , не совпадающей ни с точкой  $A$ , ни с точкой  $B$ .

*Примечание:*

1. Если к балке приложена распределенная нагрузка, при вычислении опорных реакций ее заменяют равнодействующей, численно равной площади эпюры этой нагрузки и приложенной в ее центре тяжести.

Сосредоточенная пара сил, приложенная в любом сечении балки (в том числе и на опоре), входит непосредственно в уравнение равновесия, т.е., в отличие от сосредоточенных сил и распределенных нагрузок, в уравнении суммы моментов относительно какой-либо точки, пара сил на плечо не умножается;

2. Если балка имеет в пролете промежуточный шарнир, к трем основным уравнениям статики добавляется дополнительное уравнение: относительно промежуточного шарнира сумма моментов всех сил, расположенных по одну сторону от шарнира – слева или справа, равна нулю. Это дополнительное уравнение позволяет вычислить "лишнюю" опорную реакцию.

Примеры вычисления опорных реакций балок приводятся ниже.

**Пример 4.1.** Вычислить опорные реакции балки, расчетная схема которой показана на рис. 4.7.

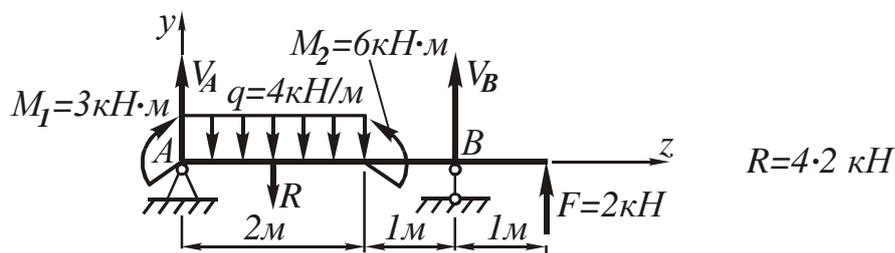


Рис. 4.7. Расчетная схема балки

1. Заданная балка рассматривается в системе координат  $z, y$ . На ее расчетной схеме показываются векторы опорных реакций  $V_A$  и  $V_B$ , направленные вверх (рис. 4.7).

2. Записывается первое уравнение равновесия балки -  $\sum M_B = 0$ . Составляя алгебраическую сумму моментов сил и пар сил, приложенных к балке, относительно правой опоры B, в качестве первого слагаемого записывается момент опорной реакции  $V_A$  относительно точки B, считая его положительным. Моменты остальных внешних сил считаем положительными, если они стремятся повернуть балку относительно точки B в том же направлении (в рассматриваемом случае – по часовой стрелке); моменты сил, поворачивающих балку относительно точки B в противоположном направлении считаются отрицательными.

Пользуясь приведенными выше рекомендациями, имеем

$$\sum M_B = 0; V_A \cdot 3 + 3 - 6 - 4 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0.$$

Первое слагаемое представляет собой момент опорной реакции  $V_A$  относительно точки B, расположенной на расстоянии 3 м от опоры A. Второе слагаемое – момент пары сил 3 кНм относительно точки B. Момент считается положительным, так как пара сил 3 кНм стремится повернуть балку относительно второй опоры в том же направлении, что и опорная реакция  $V_A$ . Третье слагаемое в уравнении равновесия представляет собой момент пары сил 6 кНм относительно точки B. Оно отрицательно, так как пара сил стремится повернуть балку относительно точки B в противоположном направлении. Четвертое слагаемое - это момент равномерно распределенной нагрузки интенсивностью  $q = 4 \text{ кН/м}$  относительно точки B.

*Примечание:* Момент равномерно распределенной нагрузки относительно рассматриваемой точки равен произведению равнодействующей этой нагрузки ( $R = 4 \cdot 2$ ) на соответствующее расстояние до точки, т.е. на 2 м. Очевидно, что этот момент должен быть отрицательным, так как равнодействующая R стремится повернуть балку относительно опоры B в противоположном направлении, по сравнению с поворотом балки, вызванным опорной реакцией  $V_A$ .

Последнее слагаемое отрицательно, оно представляет момент сосредоточенной силы 2 кН относительно опоры В, т.е. произведение силы на расстояние до опоры В, равное 1 м.

Решив уравнение равновесия, определяем величину опорной реакции левой опоры балки:

$$3V_A = 21, V_A = 7 \text{ кН} .$$

Положительное значение величины опорной реакции  $V_A$  означает, что вектор  $V_A$  направлен так, как это показано на расчетной схеме (рис. 4.7), т.е. вверх.

3. Составляется второе уравнение равновесия балки. Записывается алгебраическая сумма моментов сил и пар сил, приложенных к балке, относительно левой опоры А ( $\sum M_{\hat{A}} = 0$ ). В качестве первого слагаемого записывается момент опорной реакции  $V_{\hat{A}}$  относительно точки А. Будем считать его положительным.

$$\sum M_{\hat{A}} = 0; V_{\hat{A}} \cdot 3 + 6 + 2 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 - 3 = 0.$$

Решив это уравнение, определяем величину реакции, возникающей в правой опоре балки

$$3V_{\hat{A}} = -3, V_{\hat{A}} = -1 \text{ кН} .$$

Отрицательное значение реакции  $V_{\hat{A}}$  означает, что она направлена не вверх, а вниз.

4. Для контроля правильности вычислений составляется сумма проекций всех сил, включая реакции опор, на вертикальную ось. Если опорные реакции определены правильно, эта сумма должна равняться нулю ( $\sum Y = 0$ )

$$\sum Y = 0; 7 - 4 \cdot 2 - 1 + 2 = 0.$$

Реакции опор вычислены правильно.

**Пример 4.2.** Вычислить опорные реакции консольной балки, расчетная схема которой представлена на рис. 4.8.

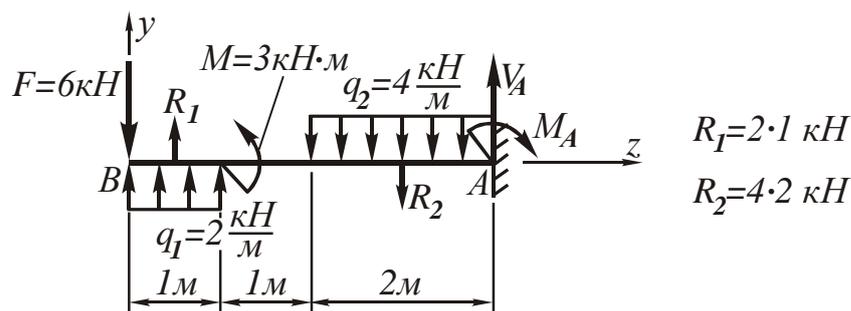


Рис. 4.8. Расчетная схема консольной балки

В рассматриваемом примере необходимо определить две опорные реакции балки – вертикальную реакцию и опорный момент.

Расчет производится в следующей последовательности:

1. Выбираем систему координат  $z, y$  и показываем на расчетной схеме опорные реакции консольной балки – вертикальную реакцию  $V_A$  и опорный момент  $\hat{I}_A$  (рис. 4.8);

2. Составляем первое уравнение равновесия балки -  $\sum M_A = 0$ . В качестве первого слагаемого записываем неизвестный опорный момент  $\hat{I}_A$  относительно точки  $A$ , считая его положительным. Моменты остальных внешних сил считаем положительными, если они стремятся повернуть балку относительно точки  $A$  в том же направлении (в рассматриваемом случае – по часовой стрелке); моменты от сил, поворачивающих балку относительно точки  $A$  в противоположном направлении будем считать отрицательными:

$$\sum M_A = 0; M_A - 6 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 3,5 - 3 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0, M_A = 28 \hat{e}l$$

Положительный результат расчета говорит о том, что первоначальное направление опорного момента выбрано правильно.

3. Для определения вертикальной реакции  $V_A$  составим сумму проекций всех сил, приложенных к балке, на вертикальную ось  $Y$  и приравняем ее нулю:

$$\sum Y = 0; V_A - 6 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 0, V_A = 12 \hat{e}l$$

реакция  $V_A$  направлена вверх.

4. Для контроля правильности вычислений используем равенство нулю суммы моментов всех сил относительно произвольно выбранной точки  $B$  (рис. 4.8):

$$\sum M_B = 0; 28 - 12 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot 3 - 3 - 2 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0,$$

что подтверждает правильность определения опорных реакций.

3. Деформации балки при изгибе. Внутренние усилия в поперечном сечении балки.

Рассмотрим деформацию балки в случае ее простейшего нагружения - *чистом изгибе* - парами сил, приложенными к ее торцевым сечениям (рис. 4.9).

Как показывает опыт, поперечные сечения балки, оставаясь плоскими, поворачиваются друг относительно друга на некоторый угол, оставаясь перпендикулярными к ее оси, что подтверждает гипотезу плоских сечений И. Бернулли. Верхние продольные волокна при этом укорачиваются (сжимаются), а нижние удлиняются (растягиваются), в поперечном сечении возникают *нормальные напряжения*  $\sigma$ . В силу того, что сечения остаются плоскими, следует, что в одном и том же слое волокна деформируются одинаково, т.е. нормальные напряжения  $\sigma$  по ширине сечения не изменяются.

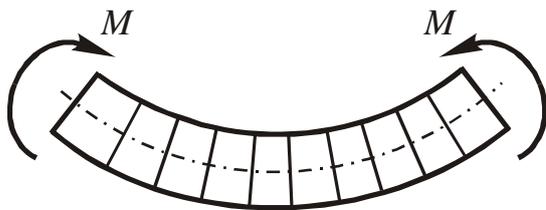


Рис. 4.9. Деформация балки при чистом изгибе

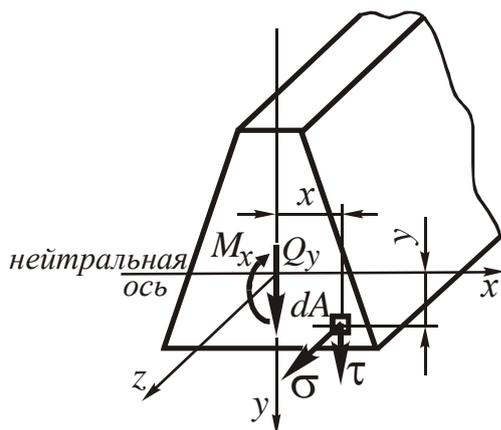


Рис. 4.10. Внутренние усилия и напряжения, действующие в сечении балки при плоском поперечном изгибе

Поскольку при изгибе одна часть волокон балки растянута, а другая сжата, существует пограничный слой волокон, разделяющий растянутую и сжатую части. Этот слой называют *нейтральным*. Волокна, принадлежащие нейтральному слою, ни сжаты, ни растянуты, они только искривлены, следовательно, нормальные напряжения  $\sigma$  во всех волокнах нейтрального слоя равны нулю.

Пересечение нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения происходит по прямой линии, называемой *нейтральной (нулевой) линией (осью)*.

При плоском поперечном изгибе она проходит через центр тяжести сечения перпендикулярно силовой линии.

В случае плоского поперечного изгиба внутренние усилия, возникающие в поперечном сечении, приводятся к поперечной силе  $Q$  и изгибающему моменту  $M$  (рис. 4.10).

Поперечная сила  $Q_y$  - это равнодействующая внутренних касательных сил в поперечном сечении

$$Q_y = \int_A \tau \cdot dA. \quad (4.1)$$

Изгибающим моментом  $M_x$  относительно нейтральной оси называется результирующий момент всех внутренних сил, возникающих в поперечном сечении балки

$$M_x = \int_A \sigma \cdot dA \cdot y. \quad (4.2)$$

*Примечание:* в учебной литературе индексы  $x, y$  часто опускаются, т.е. вместо  $M_x$  пишут  $M$ , а вместо  $Q_y$  просто  $Q$ .

Величины  $Q$  и  $M$  определяются *методом сечений*.

Для вычисления значений поперечной силы и изгибающего момента, действующих в поперечном сечении балки, удобно пользоваться следующими правилами:

- поперечная сила  $Q$  в произвольно выбранном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на нормаль к оси балки всех сил, приложенных к балке слева или справа от рассматриваемого сечения

$$Q = \sum_{i=1}^n F_i, \quad (4.3)$$

- изгибающий момент в произвольно выбранном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех сил, приложенных к балке слева или справа от рассматриваемого сечения, относительно нейтральной оси поперечного сечения

$$M = \sum_{i=1}^n M_i. \quad (4.4)$$

Знак поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$  можно установить с помощью рис. 4.11 и рис. 4.12.

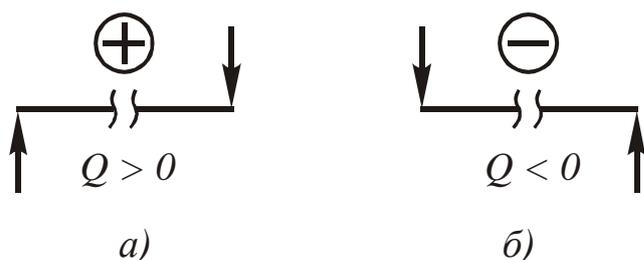


Рис. 4.11. К определению знака поперечной силы

Представим себе, что мысленно балка разрезана на две части в выбранном сечении.

Поперечная сила  $Q$  в этом сечении положительна, если сила, приложенная к балке *слева* от сечения, стремится сдвинуть балку *вверх*, а если сила приложена к правой части - она сдвигает эту часть *вниз* (рис. 4.11, *а*). Если направление сил, приложенных к балке, заменить на

противоположное (рис. 4.11, *б*), поперечной силе приписывается знак минус.

Изгибающий момент  $M$  положителен, если он вызывает сжатие верхних волокон балки (рис. 4.12, *а*), если же верхние волокна растянуты, изгибающий момент отрицателен (рис. 4.12, *б*).

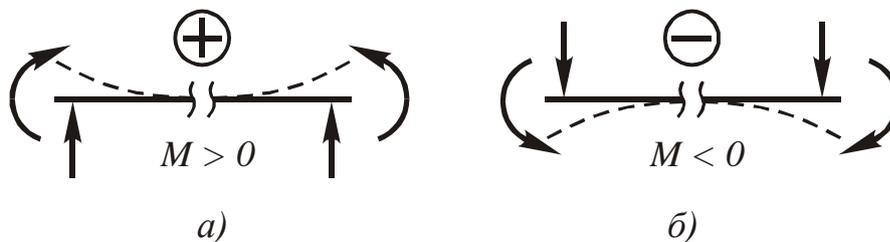


Рис. 4.12. К определению знака изгибающего момента

Рассмотрим примеры вычисления поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  в поперечных сечениях балок.

**Пример 4.3.** Для балки, показанной на рис. 4.13, определить поперечные силы  $Q$  и изгибающие моменты  $M$ , действующие в ее первом, втором и третьем поперечных сечениях.

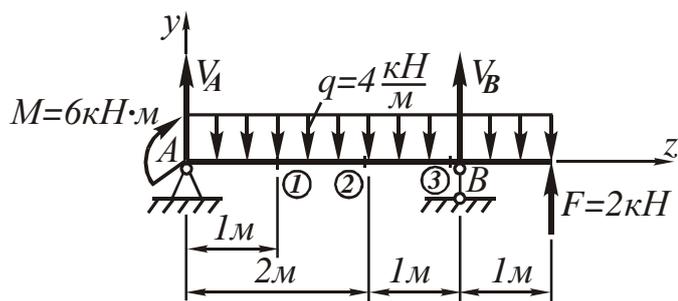


Рис. 4.13. Расчетная схема балки

Решение подобных задач рекомендуется выполнять в следующей последовательности:

1. Определение опорных реакций балки.

Опорные реакции вычисляются из уравнений ее равновесия:

$$\sum M_B = 0; V_A \cdot 3 + 6 - 4 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0, V_A = 4 \text{ кН},$$

$$\sum M_A = 0; V_B \cdot 3 - 6 - 4 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 0, V_B = 10 \text{ кН}.$$

Проверка правильности определения опорных реакций заключается в вычислении суммы проекций всех сил, приложенных к балке, на ось  $y$  (эта сумма должна равняться нулю)

$$\sum Y = 0; 4 + 10 - 4 \cdot 4 + 2 = 0,$$

что означает правильность вычислений.

2. Определение поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ , действующих в первом, втором и третьем поперечных сечениях заданной балки.

Для определения внутренних усилий, действующих в первом поперечном сечении балки, рассекаем ее мысленно в сечении 1 на две части, и одна из частей - *правая* или *левая* - отбрасывается.

Представим, что отброшена *правая* часть балки. Закроем ее, например, кусочком бумаги, так, чтобы ее не было видно (на рис. 4.14, *a* невидимая часть балки залита серым цветом).

В дальнейших расчетах учитываются только те силовые факторы, которые приложены к оставшейся, *левой* части балки (на рис. 4.14, *a* эта часть показана на белом фоне).

По определению поперечная сила  $Q_1$  в первом сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на нормаль к оси балки всех сил, приложенных к балке *слева* от рассматриваемого сечения. Изгибающий момент  $M_1$  в этом же сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех сил, приложенных к балке *слева* от сечения, относительно нейтральной оси *первого* сечения.

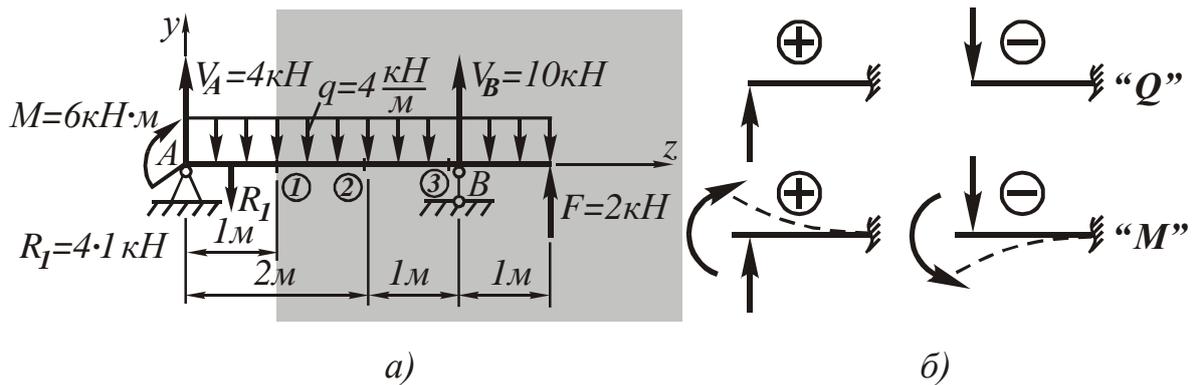


Рис. 4.14. Определение поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ , действующих в первом поперечном сечении балки:  $a$  - расчетная схема балки;  $b$  - схемы к определению знака поперечной силы и изгибающего момента

Знаки проекций сил на нормаль к оси балки и знаки моментов сил, приложенных слева от первого сечения, выбираются в соответствии с рис. 4.11 - 4.12. Используем здесь левые части этих рисунков:

$$Q_1 = 4 - 4 \cdot 1 = 0 \text{ кН} ; M_1 = 4 \cdot 1 + 6 - 4 \cdot 1 \cdot 0,5 = 8 \text{ кНм} .$$

*Примечание:* второе слагаемое в выражении  $Q_1 = 4 - 4 \cdot 1$  представляет собой проекцию на нормаль к оси балки равнодействующей  $R = 4 \cdot 1$  равномерно распределенной нагрузки, приложенной посередине рассматриваемой части балки и направленной вниз. В свою очередь, второе слагаемое в выражении  $M_1 = 4 \cdot 1 + 6 - 4 \cdot 1 \cdot 0,5$  представляет собой момент пары сил  $6 \text{ кНм}$  относительно рассматриваемого сечения, третье слагаемое - произведение равнодействующей нагрузки  $R = 4 \text{ кН}$  на ее расстояние ( $0,5 \text{ м}$ ) до рассматриваемого сечения.

Определим внутренние усилия, действующие во втором поперечном сечении балки (рис. 4.15).

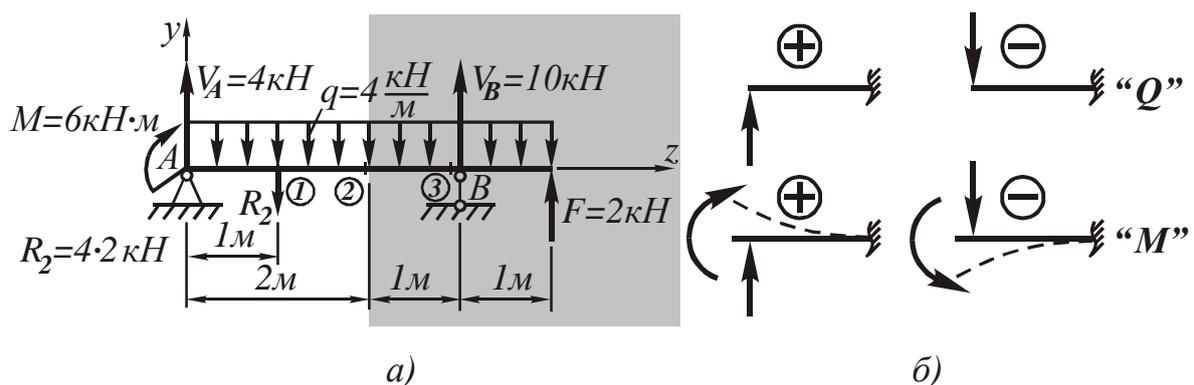


Рис. 4.15. Определение поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ , действующих во втором поперечном сечении балки:  $a$  - расчетная схема балки;  $b$  - схемы к определению знака поперечной силы и изгибающего момента

Мысленно разрежем балку в сечении 2 и отбросим ее *правую* часть (здесь и далее на соответствующих рисунках отброшенная часть балки для наглядности затемнена серым цветом).

Рассматривая оставшуюся часть балки (на рис. 4.15, *a* она изображена на белом фоне), имеем:

$$Q_2 = 4 - 4 \cdot 2 = -4 \text{ кН} ; M_2 = 4 \cdot 2 + 6 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

Определим внутренние усилия, действующие в третьем поперечном сечении балки (рис. 4.16).

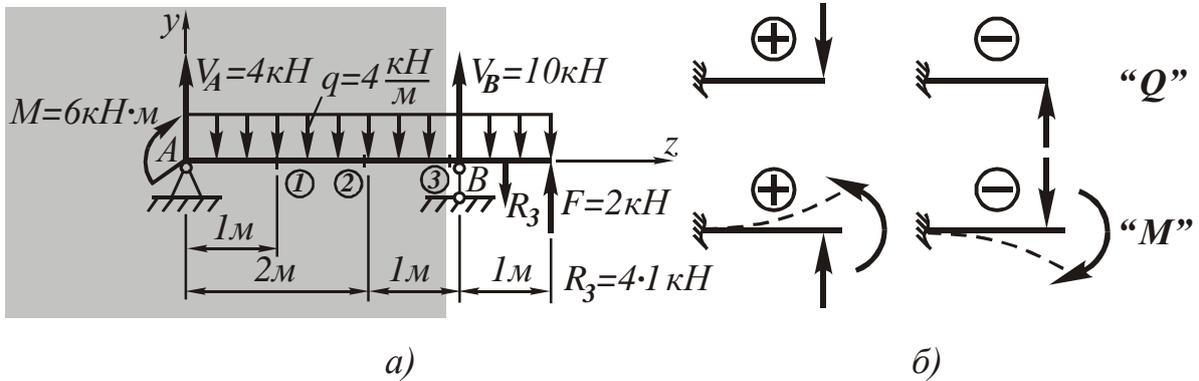


Рис. 4.16. Определение поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$  в третьем поперечном сечении балки: *a* - расчетная схема балки; *б* - схемы к определению знака поперечной силы и изгибающего момента

Чтобы упростить вычисления, отбросим часть балки, расположенную слева от третьего сечения (на рис. 4.16 она затемнена серым цветом). Очевидно, что

$$Q_3 = -2 + 4 \cdot 1 - 10 = -8 \text{ кН} ; M_3 = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0 .$$

*Примечание:* Проводя вычисления, следует обращать внимание на правило знаков (рис. 4.16, *б*).

4. Дифференциальные зависимости между  $Q$ ,  $q$  и  $M$  (зависимости Журавского). Использование дифференциальных зависимостей для построения и контроля построения эпюр внутренних усилий при изгибе.

Для расчета балок на прочность и жесткость строятся графики, изображающие характер изменения внутренних силовых факторов  $Q$  и  $M$  по длине балки. Подобные графики называются *эпюрами*. Их построение и проверка правильности построения упрощаются при использовании дифференциальных зависимостей между поперечной силой  $Q$ , изгибающим моментом  $M$  и интенсивностью распределенной нагрузки  $q$ .

Эти зависимости, полученные Д.И. Журавским, имеют вид:

$$q = \frac{dQ}{dz} ; \tag{4.5}$$

$$\tag{4.6}$$

$$\tag{4.7}$$

Они позволяют установить некоторые характерные особенности эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

Из анализа формул (4.5) - (4.7) следует:

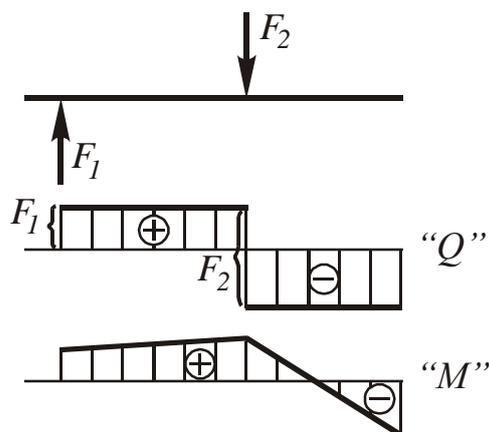


Рис. 4.17. Вид эпюр поперечных сил и изгибающих моментов при отсутствии распределенной нагрузки

- Если к балке приложены несколько сосредоточенных сил (рис. 4.17) и распределенные нагрузки отсутствуют, эпюра поперечной силы ограничена отрезками горизонтальных прямых, параллельных оси балки, а эпюра изгибающего момента – отрезками наклонных прямых (при  $Q > 0$  - изгибающий момент возрастет, а при  $Q < 0$  - убывает). В сечениях, где к балке приложены сосредоточенные силы, на эпюре  $Q$  будут скачки, а на эпюре изгибающего момента - перелом, острие которого направлено навстречу вектору приложенной силы.

- Если на участке балки поперечная сила  $Q = 0$ , эпюра изгибающего момента параллельна оси балки (рис. 4.18), при этом изгибающий момент, оставаясь постоянным, может быть как положительным, так и отрицательным.

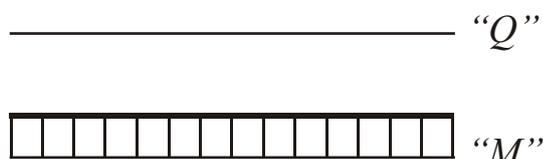


Рис. 4.18. Вид эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для случая, когда  $Q = 0$

- Если в каком-либо сечении балки приложена пара сил (сосредоточенный момент), на эпюре  $M$  будет скачок на величину приложенной пары, на эпюре  $Q$  изменений не будет (рис. 4.19).

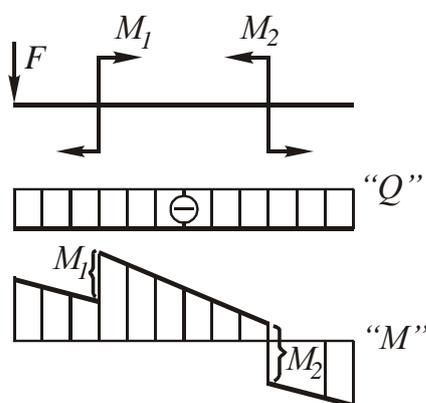


Рис. 4.19. Вид эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для случая, когда к участку балки приложены две пары сил

и сосредоточенная сила

- Если к участку балки приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , эпюра поперечной силы ограничена наклонной прямой (рис. 4.20), а эпюра  $M$  - квадратной параболой.

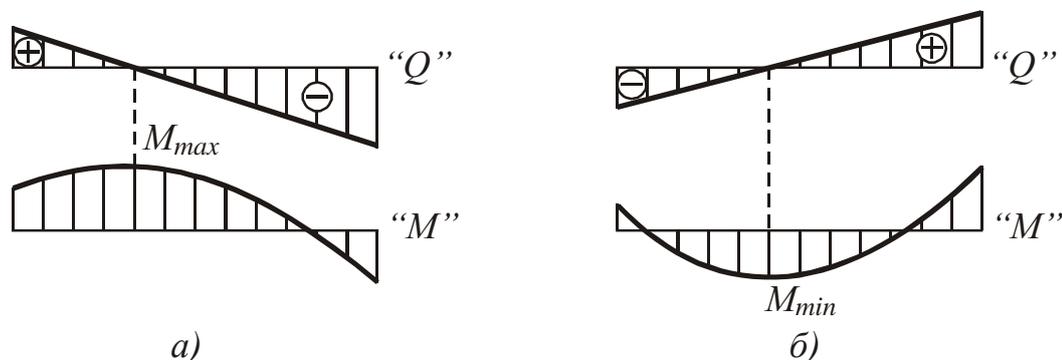


Рис. 4.20. Вид эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для случая, когда к участку балки приложена равномерно распределенная нагрузка (эпюра  $M$  построена на сжатом волокне): *а* - нагрузка направлена вниз, *б* - нагрузка направлена вверх

При построении эпюры изгибающих моментов на *сжатых* волокнах выпуклость параболы направлена в сторону, противоположную направлению действия распределенной нагрузки. В сечении, где поперечная сила, изменяясь непрерывно, обращается в ноль, изгибающий момент экстремален: максимален при изменении знака поперечной силы с «плюса» на «минус» и минимален в противоположном случае (см. рис. 4.20, *а*, *б*).

При отсутствии консоли изгибающий момент над шарнирной опорой равен нулю. Если в балке имеется промежуточный шарнир, изгибающий момент в этом шарнире равен нулю (рис. 4.21).

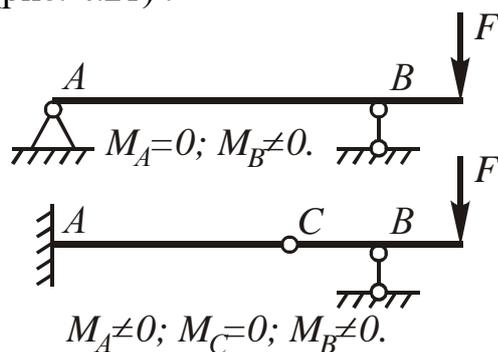


Рис. 4.21. Расчетные схемы балок

При построении эпюр на сжатых волокнах положительные значения  $Q$  и  $M$  откладываются в масштабе вверх, отрицательные – вниз от осей эпюр.

*Примечание:* при проектировании строительных конструкций принято противоположное правило построения эпюры изгибающих моментов – их положительные значения откладываются *вниз* от оси эпюры.

## 5. Методы построения эпюр внутренних усилий при изгибе.

Для расчета балок на прочность и жесткость строятся графики, изображающие характер изменения внутренних силовых факторов  $Q$  и  $M$  по длине балки. Подобные графики называются *эпюрами*.

Существует несколько методов построения эпюр  $Q$  и  $M$ , два из которых рассматриваются в данном пособии:

- аналитический способ (с записью уравнений  $Q = Q(z)$ ,  $M = M(z)$ );
- построение эпюр  $Q$  и  $M$  на основе дифференциальных зависимостей Д.И. Журавского с вычислением поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях.

Рассмотрим аналитический способ построения эпюр.

Для записи уравнений  $Q = Q(z)$ ;  $M = M(z)$  выбирается система координат  $z, y$ . Ось  $z$  совмещается с осью балки, ось  $y$  направляется вверх. Начало координат располагается в одном из торцевых сечений балки (обычно - в левом сечении). Затем балка разбивается на участки, в пределах которых справедливы составленные выражения для вычисления поперечной силы и изгибающего момента. Границами участков служат сечения, в которых приложены сосредоточенные силы, пары сил, начинаются или заканчиваются распределенные нагрузки, имеются опоры или промежуточные шарниры. В пределах каждого участка выбирается произвольное сечение на расстоянии  $z$  от начала координат, и для этого сечения составляются уравнения  $Q = Q(z)$ ;  $M = M(z)$ .

*Примечание:* В ряде случаев удобно начало координат располагать в начале любого участка балки.

Подставив в уравнения  $Q = Q(z)$ ;  $M = M(z)$  вместо текущей координаты  $z$  её значения в начале и конце участка, получим соответствующие величины  $Q$  и  $M$ , которые откладываются в масштабе вверх или вниз от осей эпюр.

Полученные точки соединяются прямыми или кривыми линиями в соответствии со следствиями, вытекающими из дифференциальных зависимостей (4.5)-(4.7).

Рассмотрим несколько примеров построения эпюр  $Q, M$  аналитическим методом.

**Пример 4.4.** Построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  для консольной балки, схема которой показана на рис. 4.22.

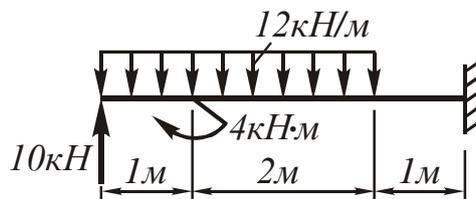


Рис. 4.22. Заданная схема балки

Рассмотрим заданную балку в системе координат  $z, y$  (рис. 4.23). Этот приём позволит построить эпюры  $Q, M$  без предварительного вычисления опорных реакций.

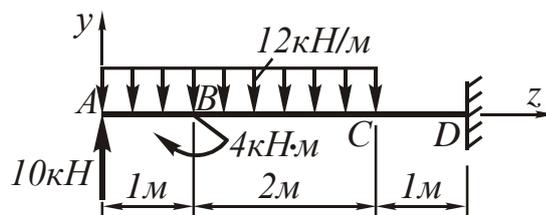


Рис. 4.23. Расчетная схема балки

Для записи уравнений  $Q = Q(z)$ ;  $M = M(z)$  балка разбивается на три участка -  $AB$ ,  $BC$ , и  $CD$ , которые рассматриваются последовательно.

Участок  $AB$ .

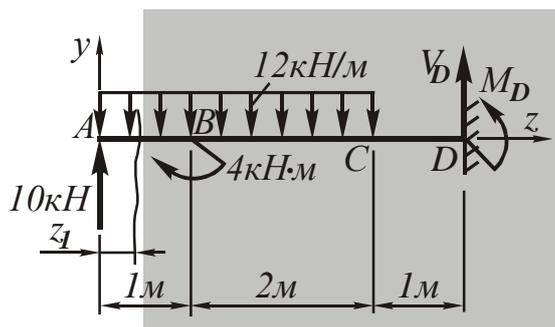


Рис. 4.24. К определению внутренних усилий в поперечных сечениях участка  $AB$ .

Отбросим часть балки, расположенную справа от сечения с абсциссой  $z_1$  ( $0 \leq z_1 \leq 1$ ) - на рис. 4.24 эта часть затемнена серым цветом, - и запишем выражения  $Q(z_1)$ ,  $M(z_1)$ :

$$Q(z_1) = 10 - 12 \cdot z_1; M(z_1) = 10 \cdot z_1 - 12 \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2} = 10 \cdot z_1 - 6 \cdot z_1^2$$

$$M(z_1) = 10 \cdot z_1 - 12 \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2} = 10 \cdot z_1 - 6 \cdot z_1^2.$$

Первая функция в интервале  $0 \leq z_1 \leq 1$  изменяется по линейному закону, вторая - по закону квадратной параболы.

Вычисляем значения поперечных сил и изгибающих моментов, действующих в граничных сечениях участка  $AB$ .

При  $z_1 = 0$ :  $Q(0) = 10 \text{ кН}$ ;  $M(0) = 0$ ,

при  $z_1 = 1 \text{ м}$ :  $Q(1) = 10 - 12 \cdot 1 = -2 \text{ кН}$ ;  $M(1) = 10 \cdot 1 - 6 \cdot 1^2 = 4 \text{ кН·м}$ .

Из приведенных расчетов видно, что на участке  $AB$  изгибающий момент максимален в некотором сечении на расстоянии  $z_0$  от начала координат, так как в пределах участка поперечная сила изменяет знак с плюса на минус.

Определим величину абсциссы  $z_0$  из равенства нулю поперечной силы в этом сечении

$$Q(z_0) = 10 - 12 \cdot z_0 = 0, \quad z_0 = 0,83 \text{ м}.$$

Экстремальный момент  $M_{\max}$

$$M_{\max} = M(0,83) = 10 \cdot 0,83 - 6 \cdot (0,83)^2 = 4,17 \text{ êĤ} .$$

Участок  $BC$ .

Отбросив правую от выбранного сечения часть балки (рис. 4.25), запишем при  $1 \leq z_2 \leq 3$ :

$$Q(z_2) = 10 - 12 \cdot z_2;$$

$$M(z_2) = 10 \cdot z_2 + 4 - 12 \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2} = 10 \cdot z_2 + 4 - 6 \cdot z_2^2.$$

Здесь первая функция  $Q(z_2)$  меняется по линейному закону, вторая -  $M(z_2)$  - по закону квадратной параболы.

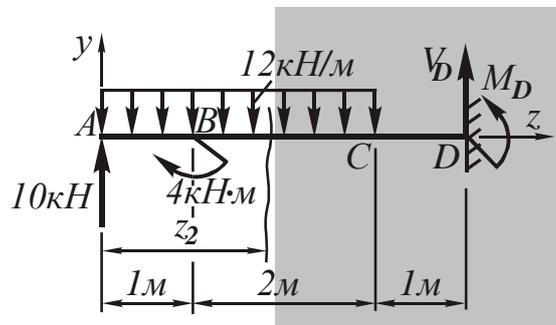


Рис. 4.25. К определению внутренних усилий в поперечных сечениях участка  $BC$

Вычисляем значения поперечных сил и изгибающих моментов, действующих в граничных сечениях участка  $BC$ :

При  $z_2 = 1 \text{ м}$ :

$$Q(1) = 10 - 12 \cdot 1 = -2 \text{ êĤ} ;$$

$$M(1) = 10 \cdot 1 + 4 - 6 \cdot 1^2 = 8 \text{ êĤ} ;$$

при  $z_2 = 3 \text{ м}$ :

$$Q(3) = 10 - 12 \cdot 3 = -26 \text{ êĤ} ;$$

$$M(3) = 10 \cdot 3 + 4 - 6 \cdot 3^2 = -20 \text{ êĤ} .$$

Участок  $CD$ .

Отбросим часть балки (рис. 4.26), расположенную *справа* от сечения с абсциссой  $z_3$  ( $3 \leq z_3 \leq 4$ ), и запишем выражения  $Q = Q(z_3)$ ;  $M = M(z_3)$ :

$$Q(z_3) = 10 - 12 \cdot 3 = -26 \text{ êĤ} ;$$

$$M(z_3) = 10 \cdot z_3 + 4 - 12 \cdot 3 \cdot (z_3 - 1,5) .$$

Из полученных выражений следует, что поперечная сила в пределах участка постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейной зависимости.

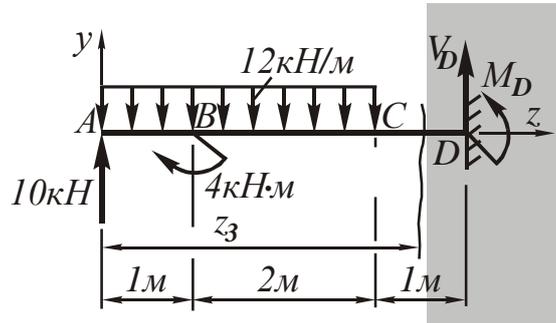


Рис. 4.26. К определению внутренних усилий в поперечных сечениях участка  $CD$ .

Вычисляем значения поперечных сил и изгибающих моментов, действующих в граничных сечениях участка  $CD$ :

При  $z_3 = 3\text{ м}$  :

$$Q(3) = 10 - 12 \cdot 3 = -26 \text{ кН} ;$$

$$M(3) = 10 \cdot 3 + 4 - 12 \cdot 3 \cdot (3 - 1,5) = -20 \text{ кН}\cdot\text{м} ;$$

при  $z_3 = 4\text{ м}$  :

$$Q(4) = 10 - 12 \cdot 3 = -26 \text{ кН} ;$$

$$M(4) = 10 \cdot 4 + 4 - 12 \cdot 3 \cdot (4 - 1,5) = -46 \text{ кН}\cdot\text{м} .$$

Эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ , построенные в выбранном масштабе по их вычисленным значениям, показаны на рис. 4.27.

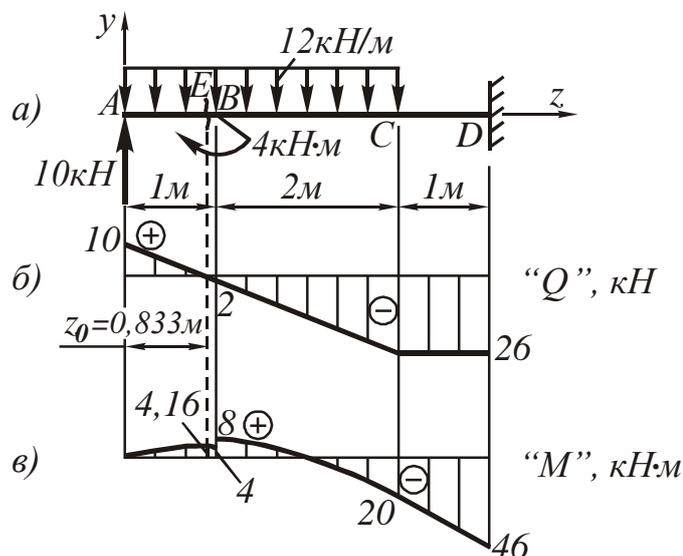


Рис. 4.27. Расчетная схема балки, эпюры поперечных сил и изгибающих моментов: *a* - расчетная схема балки; *б* - эпюра поперечных сил; *в* - эпюра изгибающих моментов

Рассмотрим метод построения эпюр на основе дифференциальных зависимостей Журавского.

Этот способ построения эпюр так же, как и первый, предусматривает разбиение балки на участки. По выше приведенным правилам значения  $Q$  и  $M$  вычисляются в характерных сечениях (на границах участков), а также там, где рассматриваемый силовой фактор имеет экстремальное значение. Вычисленные значения внутренних усилий откладываются в масштабе от оси балки и соединяются прямыми или кривыми линиями; очертание эпюры устанавливается на основе дифференциальных зависимостей (4.5) - (4.7).

## 6. Нормальные напряжения при изгибе.

При плоском поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают нормальные и касательные напряжения, которые зависят как от внутренних силовых факторов, так и от формы и размеров сечения.

Нормальное напряжение в произвольно выбранной точке поперечного сечения определяется по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y, \quad (4.8)$$

где  $M_x$  - изгибающий момент в данном сечении;

$I_x$  - момент инерции сечения относительно нейтральной оси;

$y$  - расстояние от нейтральной оси до точки, в которой определяется напряжение (рис. 4.28, *a*).

Из формулы (4.8) следует:

- величина нормальных напряжений не зависит от прочностных и деформационных свойств материала, из которого изготовлена балка;

- нормальные напряжения, оставаясь постоянными по ширине сечения, изменяются линейно по его высоте, достигая экстремальных значений в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{1 \max, 2 \max}. \quad (4.9)$$

Вводя обозначение  $W_x$  для геометрической характеристики сечения, называемой *осевым моментом сопротивления*,

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, \quad (4.10)$$

формулу (4.9) можно записать иначе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}. \quad (4.11)$$

Если сечение несимметрично относительно нейтральной оси, вычисляются два значения осевых моментов сопротивления путем подстановки в формулу

(4.10) значений ординат для крайних растянутых и крайних сжатых волокон, балки (рис. 4.28, б):

$$W'_x = \frac{I_x}{y_{1\max}}; \quad W''_x = \frac{I_x}{y_{2\max}}. \quad (4.12)$$

Напряжения в крайних растянутых и сжатых волокнах при этом различаются не только знаком, но и численным значением:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W'_x}; \quad \sigma_{\min} = \frac{M_x}{W''_x}. \quad (4.13)$$

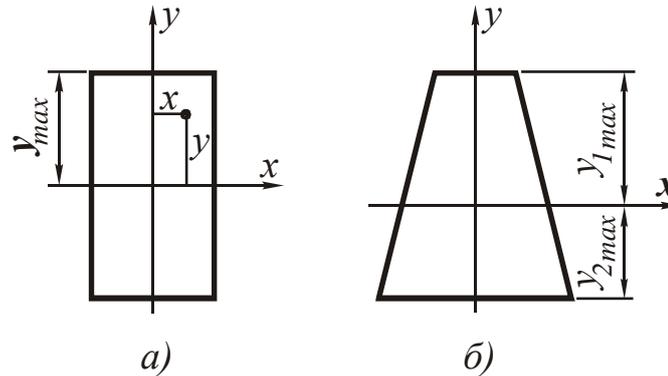


Рис. 4.28. К определению: а - нормальных напряжений при изгибе; б - осевого момента сопротивления сечения с одной осью симметрии

Формулы для определения геометрических характеристик простых геометрических фигур и прокатных профилей приведены в разделе «Приложения».

**Пример 4.5.** Требуется определить нормальное напряжение в точке А поперечного сечения балки (рис. 4.29) и величину максимальных нормальных напряжений, если в поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M$ , равный 30 кНм.

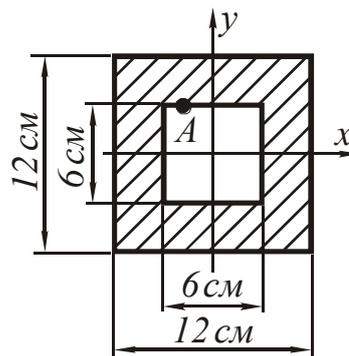


Рис. 4.29. Поперечное сечение балки

Осевой момент инерции заданного сечения балки относительно оси  $x$  может быть представлен как разность моментов инерции двух фигур (квадрата  $12 \times 12$  см и отверстия - квадрата  $6 \times 6$  см) относительно этой же оси

$$I_x = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 12^3}{12} - \frac{6 \cdot 6^3}{12} = 1620 \text{ нм}^4 = 1620 \cdot 10^{-8} \text{ м}^3.$$

Осевой момент сопротивления сечения равен

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{1620 \cdot 10^{-8}}{6 \cdot 10^{-2}} = 270 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Нормальные напряжения в точке  $A$  определяются по формуле (4.8)

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_A = \frac{30 \cdot 10^3}{1620 \cdot 10^{-8}} \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 55,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 55,5 \text{ МПа},$$

а максимальные нормальные напряжения – из выражения (4.11):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{30 \cdot 10^3}{270 \cdot 10^{-6}} = 111 \cdot 10^6 \text{ Па} = 111 \text{ МПа}.$$

## 7. Касательные напряжения при изгибе.

При плоском поперечном изгибе в поперечном сечении балки возникают не только нормальные, но и касательные напряжения, которые можно определить по формуле Д.И. Журавского.

Пусть необходимо вычислить касательные напряжения в точках поперечного сечения, расположенных на расстоянии  $y$  от нейтральной оси  $x$  (рис. 4.30). Если обозначить через  $S_x^{\hat{\sigma}\hat{\eta}}$  – статический момент площади (отсеченной части), расположенной выше или ниже точки, в которой определяются касательные напряжения, относительно нейтральной оси сечения,  $b(y)$  – ширину отсеченной части сечения, формула Д.И. Журавского имеет вид

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{\hat{\sigma}\hat{\eta}}}{I_x \cdot b(y)}. \quad (4.14)$$

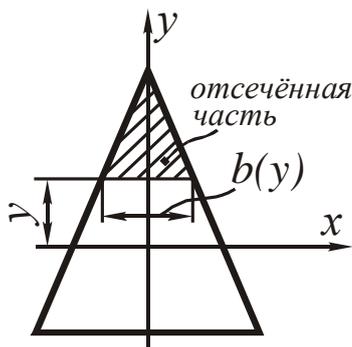


Рис. 4.30. К определению касательных напряжений по формуле Д.И. Журавского

Из формулы (4.14) следует, что касательные напряжения не зависят от материала балки и не изменяются по ее ширине. Распределение касательных напряжений по высоте сечения зависит от его формы, при этом в наиболее удаленных от нейтральной линии волокна касательные напряжения равны нулю.

Эпюры распределения касательных напряжений по высоте сечения для некоторых форм поперечных сечений балок приводится в разделе «Приложения».

Поскольку в балках сплошного сечения величина касательных напряжений по сравнению с нормальными напряжениями обычно невелика, проверять прочность по касательным напряжениям, как правило, нет необходимости.

## 8. Расчет балок на прочность по нормальным напряжениям.

Условие прочности при изгибе балок, изготовленных из материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, записывается в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (4.15)$$

*Примечание:*  $M_{\max}$  - наибольший по модулю изгибающий момент, действующий в поперечном сечении.

Если балка изготовлена из материала, неодинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, проверка прочности опасного сечения производится по наибольшим растягивающим  $\sigma_{\delta}$  и наибольшим сжимающим напряжениям  $\sigma_{\tilde{n}\tilde{a}e}$ :

$$\sigma_p = \frac{M_{\max}}{I_x} \cdot y_{\delta} \leq [\sigma]_{\delta}; \quad \sigma_{\tilde{n}\tilde{a}e} = \frac{M_{\max}}{I_x} \cdot y_{\tilde{n}\tilde{a}e} \leq [\sigma]_{\tilde{n}\tilde{a}e},$$

где  $\delta$  - расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленной точки, находящейся в растянутой зоне сечения;

$\tilde{n}\tilde{a}e$  - расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленной точки, находящейся в сжатой зоне сечения;

$[\sigma]_{\delta}$  - допускаемое напряжение материала при растяжении;

$[\sigma]_{\tilde{n}\tilde{a}e}$  - допускаемое напряжение материала при сжатии.

*Примечание:* Если нейтральная ось сечения балки не является осью симметрии, а эпюра изгибающих моментов балки имеет участки разных знаков, расчеты на прочность производятся для двух сечений, в которых действуют наибольшие положительные и отрицательные изгибающие моменты.

Используя условие прочности при изгибе, можно решить три основных задачи сопротивления материалов:

### 8.1. Подбор поперечного сечения балки.

С этой целью для заданной балки следует построить эпюру изгибающих моментов и с ее помощью определить  $M_{\max}$ , а из условия прочности  $W_x$  - необходимый (требуемый) осевой момент сопротивления сечения при изгибе

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

Определив требуемый момент сопротивления  $W_x$ , можно достаточно просто найти размеры поперечного сечения балки, если оно представляет собой одну из простых геометрических фигур (прямоугольник, круг, кольцо и т.д.) или может быть разбито на простые геометрические элементы.

**Пример 4.6.** Определить размеры поперечного сечения стальной балки, рассмотрев следующие их варианты:

- прямоугольное  $b \times h$  при  $h=2b$ ,
- кольцевое, внешний диаметр которого  $D$ , внутренний диаметр  $d$ ; соотношение внешнего и внутреннего диаметров кольцевого сечения  $\alpha = \frac{d}{D} = 0,8$ .

Допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma]=160 \text{ МПа}$ . Максимальный изгибающий момент, действующий в поперечном сечении,  $M_{\max} = 25 \hat{e} \hat{l}$  .

Требуемый из условия прочности осевой момент сопротивления

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{25 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 156 \cdot 10^{-6} \hat{i}^3 = 156 \tilde{n} \hat{i}^3 .$$

*Примечание:* Обратите внимание на то, что величина требуемого осевого момента сопротивления не зависит от того, какую форму поперечного сечения будет иметь рассматриваемая балка.

#### 1. Определение размеров прямоугольного сечения.

Для определения размеров прямоугольного сечения приравняем величину требуемого осевого момента сопротивления осевому моменту сопротивления прямоугольника, учитывая, что  $h=2b$

$$\frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3} = 156 \tilde{n} \hat{i}^3 ,$$

следовательно,

$$b = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot 156} = 6,16 \tilde{n} \hat{i} , \quad h = 2b = 2 \cdot 6,16 = 12,32 \tilde{n} \hat{i} .$$

#### 2. Определение размеров кольцевого сечения.

Размеры кольцевого сечения балки определяются аналогично

$$W_x \approx 0,1D^3(1 - \alpha^4) = 0,1D^3(1 - 0,8^4) = 156 \tilde{n} \hat{i}^3 ,$$

$$D = 13,8 \tilde{n} \hat{i} , \quad d = 13,8 \cdot 0,8 = 11 \tilde{n} \hat{i} .$$

При подборе поперечного сечения балки из прокатного профиля (двутаврового, швеллерного), следует в таблицах сортамента найти нужный номер профиля, момент сопротивления которого наиболее близок к необходимому.

Превышение напряжений в поперечном сечении по сравнению с допускаемыми не должно быть больше 5%.

**Пример 4.7.** Подобрать поперечное сечение стальной балки:

- двутаврового профиля,
- состоящего из двух швеллеров [ ] .

Допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma]=160 \text{ МПа}$ . Максимальный изгибающий момент, действующий в поперечном сечении,  $M_{\max} = 25 \hat{e} \hat{l}$  .

#### 1. Подбор двутаврового профиля.

Требуемый момент сопротивления  $W_x = 156 \tilde{n} \tilde{i}^3$ , в таблице сортамента прокатной стали (см. «Приложения: сталь горячекатаная, ГОСТ 8239-72») подбираем двутавровый профиль сечения, имеющий осевой момент сопротивления, близкий к требуемому.

Наиболее подходящим является двутавровый профиль № 18а, осевой момент сопротивления которого  $W_x = 159 \tilde{n} \tilde{i}^3$ .

## 2. Подбор сечения, составленного из двух швеллеров.

Прежде чем подбирать подходящие швеллеры, определим главный центральный момент инерции составного сечения

$$I_x = 2 \cdot I_x^{\phi \hat{a}}.$$

Очевидно, что осевой момент сопротивления сечения

$$W_x = \frac{2 \cdot I_x^{\phi \hat{a}}}{y_{\max}} = \frac{I_x^{\phi \hat{a}}}{y_{\max}} + \frac{I_x^{\phi \hat{a}}}{y_{\max}} = 2W_x^{\phi \hat{a}} = 156 \tilde{n} \tilde{i}^3,$$

и осевой момент сопротивления одного швеллера, входящего в составное сечение  $W_x^{\phi \hat{a}} = \frac{156}{2} = 78 \tilde{c} \tilde{i}^3$ .

По ГОСТ 8240-72. Выбираем профиль №14а с осевым моментом сопротивления  $W_x = 77,8 \tilde{n} \tilde{i}^3$ .

## 8.2. Определение максимального значения допускаемого изгибающего момента $[M_{\max}]$ , если форма поперечного сечения балки и его размеры заданы.

Для определения допускаемого изгибающего момента  $[M_{\max}]$  следует представить условие прочности в виде:

$$[M_{\max}] \leq W_x \cdot [\sigma].$$

## 8.3. Проверка прочности балки.

Для проверки прочности балки при расчете по допускаемым нормальным напряжениям необходимо:

- построить эпюру изгибающих моментов  $M$  и с ее помощью установить  $M_{\max}$  (его значение, максимальное по модулю);

- зная форму и размеры поперечного сечения, найти  $W_x$  - момент сопротивления сечения при изгибе, т.е. вычислить  $W_x$  простой или составной геометрической фигуры. Если сечение представляет собой прокатный профиль (или составлено из прокатных профилей) следует использовать в расчетах таблицы сортамента прокатной стали, алюминиевых сплавов и т. д.;

- вычислить максимальные нормальные напряжения, действующие в поперечном сечении балки по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x};$$

- проверить справедливость выполнения условия прочности при изгибе  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ .

### 9. Определение перемещений в балках при изгибе.

При действии на балку внешних сил (рис. 4.31) происходит искривление её оси, которая в деформированном состоянии называется *упругой линией*.

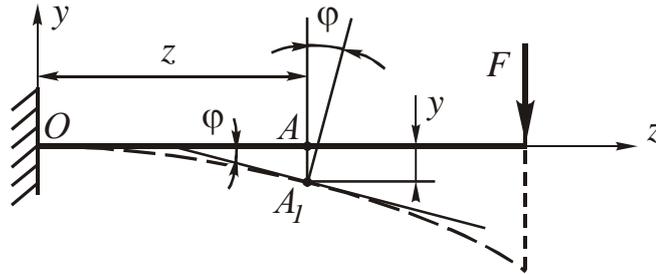


Рис. 4.31. Деформации балки:  $y$  - прогиб в сечении с абсциссой  $z$ ,  $\varphi$  - угол поворота сечения

Деформация балки характеризуется:

- прогибом  $y$ , т.е. перемещением центра тяжести поперечного сечения перпендикулярно оси балки;
- углом поворота сечения  $\varphi$ , т.е. углом, на который поворачивается поперечное сечение вокруг нейтральной оси (или углом наклона касательной к упругой линии балки в рассматриваемом сечении).

Наибольший прогиб называется *стрелой прогиба*.

*Примечание:* Прогибы также обозначаются  $u, f$ , а угол поворота сечения -  $y'$ .

Уравнение  $y = y(z)$ , выражающее зависимость между прогибом  $y$  и координатой  $z$  сечения, называется *уравнением упругой линии*.

Приближенное дифференциальное уравнение упругой линии записывается в виде

$$EI_x y'' = M(z), \quad (4.16)$$

где  $E$  - модуль упругости материала балки;

$I_x$  - момент инерции сечения относительно нейтральной оси;

$M(z)$  - изгибающий момент в сечении  $z$ .

Путем интегрирования уравнения (4.16) можно получить выражения для вычисления прогибов и углов поворота сечений балок.

Следует заметить, что при определении перемещений при изгибе непосредственное интегрирование дифференциального уравнения (4.16) применяется сравнительно редко. В практике инженерных расчетов для этих целей получил широкое распространение так называемый *метод начальных параметров*, в котором используется *универсальное уравнение упругой линии*. Это уравнение

при показанных на рис. 4.32 направлениях нагрузок может быть записано в следующем виде

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot z + \frac{M(z-a)^2}{2} + \frac{F(z-b)^3}{6} + \frac{q(z-c)^4}{24}. \quad (4.17)$$

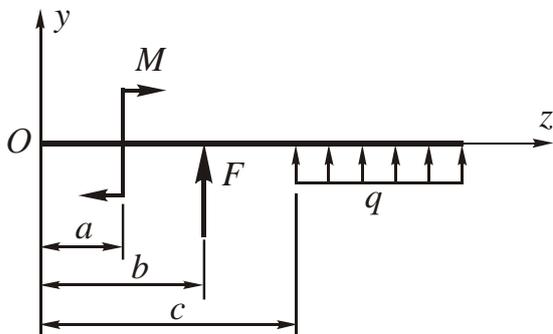


Рис. 4.32. Расчетная схема балки для записи уравнения упругой линии

Здесь  $y_0$  и  $\theta_0$ , называемые *начальными параметрами*, - соответственно прогиб и угол поворота сечения в начале координат.

Начальные параметры определяются из граничных условий, зависящих от способа закрепления балки (рис. 4.33) и могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Что касается других слагаемых, входящих в универсальное уравнение, то их

знак зависит от того, положительный или отрицательный изгибающий момент создает данная нагрузка в сечении с абсциссой  $z$ . Поскольку каждая из нагрузок, показанных на рис. 4.32, создает в рассматриваемом сечении положительный изгибающий момент, перед третьим и последующими слагаемыми в уравнении (4.17) поставлен знак «+».

Число слагаемых в уравнении (4.17) должно соответствовать количеству нагрузок, приложенных к балке. В этом случае универсальное уравнение упругой линии балки записывается в виде

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot z + \sum \frac{M(z-a)^2}{2} + \sum \frac{F(z-b)^3}{6} + \sum \frac{q(z-c)^4}{24} \quad (4.18)$$

Дифференцируя уравнение (4.18) по координате  $z$ , получаем уравнение для определения угла поворота рассматриваемого сечения балки:

$$EI_x \varphi = EI_x y' = EI_x \theta_0 + \sum \frac{M \cdot (z-a)}{1} + \sum \frac{F \cdot (z-b)^2}{2} + \sum \frac{q \cdot (z-c)^3}{6}. \quad (4.19)$$

Используя уравнения (4.18), (4.19) следует иметь в виду следующее:

- начало координат помещается в крайнее левое или крайнее правое сечение балки;
- при определении прогиба в сечении с координатой  $z$  в универсальное уравнение подставляются лишь те нагрузки, которые приложены на участке балки *от начала координат до этого сечения* (выражения в круглых скобках будут при этом положительны);
- если распределенная нагрузка не доходит до *конца* балки, ее следует продолжить вплоть до конечного сечения, а для компенсации продол-

женной нагрузки приложить на этом участке нагрузку противоположно-го направления той же интенсивности.

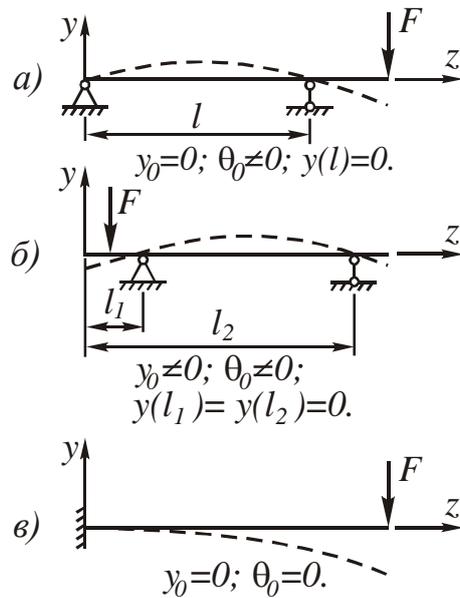


Рис. 4.33. Расчетные схемы балок для определения начальных параметров

**Пример 4.8.** Для балки с консолью (рис. 4.34) методом начальных параметров определить прогиб в сечении С.

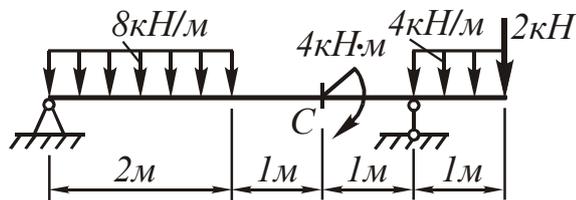


Рис. 4.34. Заданная схема балки

Для определения прогиба в сечении С балки прежде всего необходимо вычислить опорные реакции. Направив векторы опорных реакций вверх (рис. 4.35), составим уравнения равновесия балки:

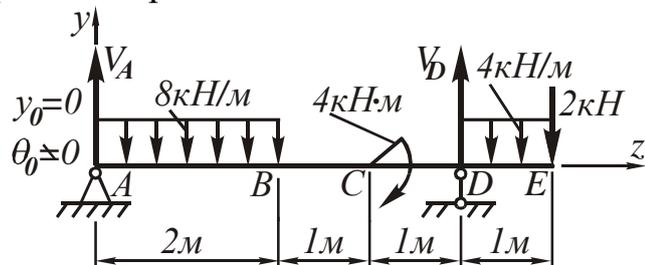


Рис. 4.35. К определению опорных реакций балки

$$\sum \dot{I}_D = 0; V_A \cdot 4 - 8 \cdot 2 \cdot 3 + 4 + 4 \cdot 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 1 = 0, V_A = 10 \text{ кН} ;$$

$$\sum \dot{I}_A = 0; V_D \cdot 4 - 8 \cdot 2 \cdot 1 - 4 - 4 \cdot 1 \cdot 4,5 - 2 \cdot 5 = 0, V_D = 12 \text{ кН} .$$

Проверим правильность вычислений, записав алгебраическую сумму проекций на ось  $y$  всех сил, приложенных к балке:

$$\sum Y = 0; 10 + 12 - 2 - 8 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0,$$

- реакции определены правильно.

Для записи универсального уравнения упругой линии балки, выбираем систему координат  $y, z$ , помещая её начало в точку  $A$ , т.е. на левую опору балки, распределенную нагрузку  $q = 8 \text{ кН/м}$  участка  $AB$ , направленную вниз, продолжаем до конца балки (сечение  $E$ ). На участке  $BE$  прикладываем такую же нагрузку  $q = 8 \text{ кН/м}$ , но направленную вверх (рис. 4.36).

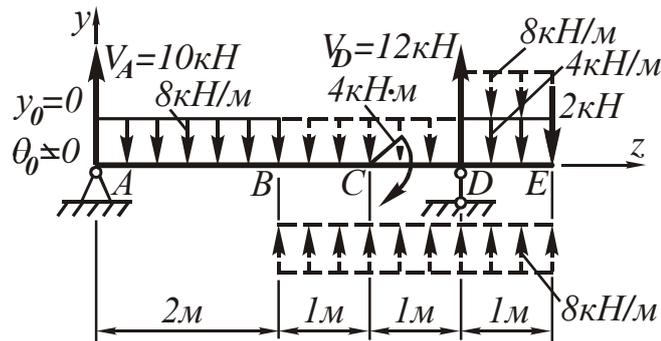


Рис. 4.36. Расчетная схема балки

В соответствии с рис. 4.33 начальные параметры в начале координат: прогиб  $y_0 = 0$ , угол поворота  $\theta_0 \neq 0$ .

Универсальное уравнение упругой линии для заданной балки имеет вид

$$EI_x y = EI_x \theta_0 \cdot z + \frac{4(z-3)^2}{2} + \frac{10(z-0)^3}{6} + \frac{12(z-4)^3}{6} - \frac{2(z-5)^3}{6} - \frac{8(z-0)^4}{24} + \frac{8(z-2)^4}{24} - \frac{4(z-4)^4}{24}.$$

Величину угла поворота  $\theta_0$  определяем из условия равенства нулю прогиба  $y_D$  на опоре  $D$  (рис. 4.37), оставляя в предыдущем уравнении только те слагаемые, в которые входят нагрузки, приложенные к балке на участке  $AD$ .

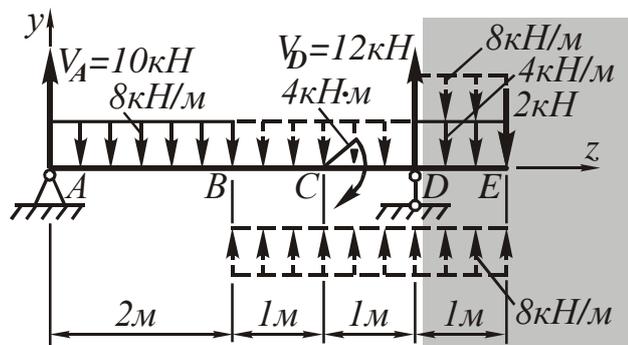


Рис. 4.37. Расчетная схема балки для вычисления угла поворота  $\theta_0$  в начале координат

Подставив в универсальное уравнение упругой линии  $z = 4i$ , получим

$$EI_x y = EI_x \theta_0 \cdot 4 + \frac{4(4-3)^2}{2} + \frac{10(4-0)^3}{6} - \frac{8(4-0)^4}{24} + \frac{8(4-2)^4}{24} = 0.$$

Решая полученное уравнение относительно  $EI_x \theta_0$ , находим

$$EI_x \theta_0 = -6,525.$$

Тогда универсальное уравнение упругой линии балки принимает вид:

$$EI_x y = -6,525 \cdot z + \frac{4(z-3)^2}{2} + \frac{10(z-0)^3}{6} + \frac{12(z-4)^3}{6} - \frac{2(z-5)^3}{6} - \frac{8(z-0)^4}{24} - \frac{4(z-4)^4}{24} + \frac{8(z-2)^4}{24}.$$

Для вычисления прогиба балки в сечении  $C$ , подставим в универсальное уравнение  $z = 3i$  (расстояние сечения  $C$  от начала координат). В уравнение, кроме начального параметра  $\theta_0$ , войдут слагаемые, зависящие от внешних нагрузок, приложенных к балке на участке  $AC$  (рис. 4.38).

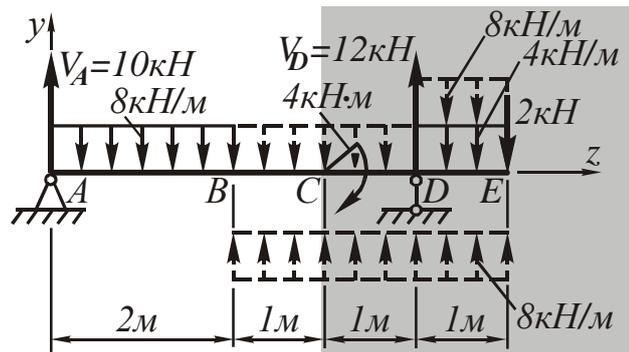


Рис. 4.38. Расчетная схема для вычисления прогиба балки в сечении  $C$

Прогиб балки в сечении  $C$  ( $z = 3i$ ):

$$EI_x y_{\tilde{N}} = -6,525 \cdot 3 + \frac{4(3-3)^2}{2} + \frac{10(3-0)^3}{6} - \frac{8(3-0)^4}{24} + \frac{8(3-2)^4}{24} = -1,24,$$

$$y_{\tilde{N}} = -\frac{1,24}{EI_x}.$$

Отрицательное значение прогиба означает, что балка в рассматриваемом сечении  $C$  смещается вниз.

## 10. Расчет балок на жесткость.

Проверка балки на жесткость состоит в сравнении ее максимального прогиба  $f_{\max}$  с соответствующей допускаемой величиной  $[f_{\max}]$ , обычно равной  $\left(\frac{1}{250} \div \frac{1}{500}\right) \cdot l$  ( $l$  – длина пролета балки или длина консоли), то есть в проверке условия:

$$f_{\max} \leq [f_{\max}]. \quad (4.19)$$

Если условие жесткости не удовлетворяется, размеры сечения балки, найденные из условия прочности, корректируются.

*Примечание:* для определения максимального прогиба  $f_{\max}$  рекомендуется определять прогибы в нескольких сечениях балки и построить эпюру вертикальных перемещений – упругую линию балки. Это позволяет с достаточной точностью найти значение  $f_{\max}$ , а затем определить размеры сечения балки, обеспечивающие ее прочность и жесткость.

## 2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какое деформированное состояние бруса называется изгибом?
2. Какой вид изгиба называется «чистым изгибом»?
3. Какой вид изгиба называется «поперечным изгибом»?
4. Что такое упругая линия бруса?
5. Какой брус называется балкой?
6. Что такое пролет балки?
7. Какие опорные устройства балки Вы знаете? Назовите их.
8. Какие балки называются статически неопределимыми?
9. Как вычисляются опорные реакции балки?
10. Могут ли опорные реакции балки равняться нулю при наличии внешней нагрузки?
11. Как проверить правильность вычислений опорных реакций?
12. В чем заключается гипотеза плоских сечений Бернулли при изгибе?
13. Какие напряжения действуют в поперечном сечении бруса при его чистом изгибе?
14. Какой слой волокон балки называется нейтральным?
15. Как называется прямая, образованная пересечением нейтрального слоя и плоскости поперечного сечения балки?
16. Как расположена эта линия в поперечном сечении балки при плоском поперечном изгибе?
17. Какие внутренние усилия возникают в поперечном сечении балки при плоском поперечном изгибе?
18. Чему численно равна поперечная сила  $Q$  в произвольно выбранном сечении балки?
19. Чему численно равен изгибающий момент  $M$  в произвольно выбранном сечении балки?
20. В чем состоит метод определения поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$  при изгибе? Как называется этот метод?
21. Что такое эпюра поперечной силы  $Q$  и эпюра изгибающего момента  $M$  при изгибе?
22. Запишите дифференциальные зависимости между поперечной силой  $Q$ , изгибающим моментом  $M$  и интенсивностью распределенной нагрузки  $q$ .
23. На некотором участке балки поперечная сила положительна и постоянна. Изменяется ли на этом участке изгибающий момент?
24. В каких сечениях балки на эпюре поперечной силы  $Q$  имеются скачки?
25. В каких случаях эпюра поперечной силы  $Q$  ограничена наклонной прямой?
26. На эпюре изгибающего момента  $M$  имеется скачок. Имеется ли скачок в этом же сечении на эпюре поперечной силы  $Q$ ?
27. В каких случаях изгибающий момент  $M$  на шарнирно-подвижной опоре балки не равен нулю?
28. В каком случае эпюра изгибающего момента  $M$  ограничена квадратной параболой?
29. В каком случае эпюра изгибающего момента  $M$  ограничена квадратной параболой, имеющей на участке балки экстремум?

30. От чего зависит направление выпуклости квадратной параболы на эпюре изгибающего момента  $M$ ?
31. Если в балке имеется промежуточный шарнир, чему равен изгибающий момент в этом шарнире?
32. При построении эпюр на сжатых волокнах балки положительные значения  $Q$  и  $M$  откладываются в масштабе вверх или вниз от осей эпюр?
33. В чем состоит аналитический способ построения эпюр  $Q$  и  $M$ ?
34. В чем состоит способ построения эпюр  $Q$  и  $M$  на основе дифференциальных зависимостей Д.И. Журавского с вычислением поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях?
35. Какие напряжения действуют в поперечном сечении бруса при плоском поперечном изгибе?
36. Как распределяются напряжения по поперечному сечению балки?
37. Зависит ли величина нормальных напряжений, действующих в поперечном сечении бруса, от свойств материала, из которого брус изготовлен?
38. В каких точках поперечного сечения балки нормальные напряжения достигают максимальных значений?
39. Какая геометрическая характеристика поперечного сечения балки называется его осевым моментом сопротивления?
40. Как вычисляются осевые моменты сопротивления простых геометрических фигур: прямоугольника, квадрата, круга?
41. При соблюдении какого условия прочность балки будет обеспечена?
42. Запишите условие прочности при изгибе.
43. Какое сечение балки считается опасным?
44. Какое нормальное напряжение принимают в качестве предельного для пластичного материала?
45. Сколько условий прочности записывают для хрупких материалов?
46. В чем состоит проверочный расчет бруса на прочность при изгибе?
47. Как называется искривленная ось балки при изгибе?
48. Чем характеризуется деформация балки?
49. Что называется стрелой прогиба балки?
50. Как при помощи дифференциального уравнения упругой линии можно определить прогибы и углы поворота сечений балок?
51. Запишите универсальное уравнение упругой линии.
52. Что представляют собой начальные параметры  $y_0$  и ?
53. Как определяются начальные параметры?
54. В чем состоит проверочный расчет балок на жесткость?
55. Как определяется величина прогиба в заданном сечении балки?

### 3. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Определите опорные реакции балки (рис. 4.39).

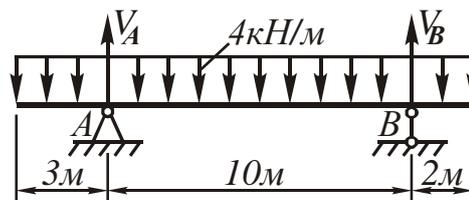


Рис. 4.39. Схема балки к задаче 1

2. Определите опорные реакции консольной балки (рис. 4.40).

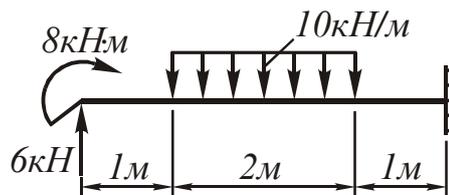


Рис. 4.40. Схема балки к задаче 2

3. Укажите участок балки (рис. 4.41), на котором поперечная сила  $Q$  максимальна.

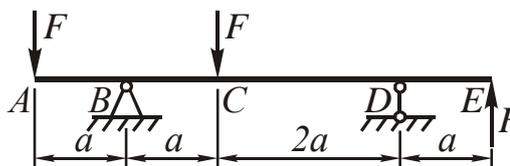


Рис. 4.41. Схема балки к задаче 3

4. Вычислите максимальный изгибающий момент  $M_{\max}$ , действующий в поперечном сечении балки (рис. 4.42).

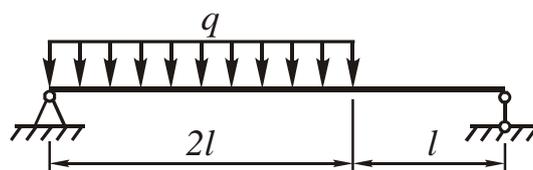


Рис. 4.42. Схема балки к задаче 4

5. Вычислите максимальную поперечную силу  $Q_{\max}$ , действующую в поперечном сечении балки (рис. 4.43).

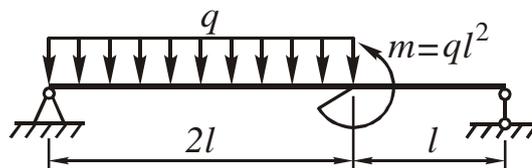


Рис. 4.43. Схема балки к задаче 5

6. Запишите формулу для вычисления изгибающих моментов, действующих в поперечных сечениях участка  $BC$  балки (рис. 4.44).

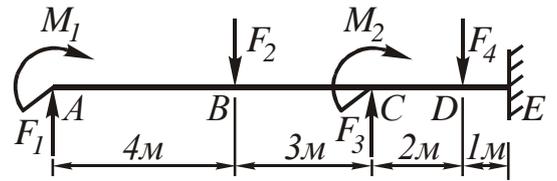


Рис. 4.44. Схема балки к задаче 6

7. Постройте эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок, схемы которых показаны на рис. 4.45.

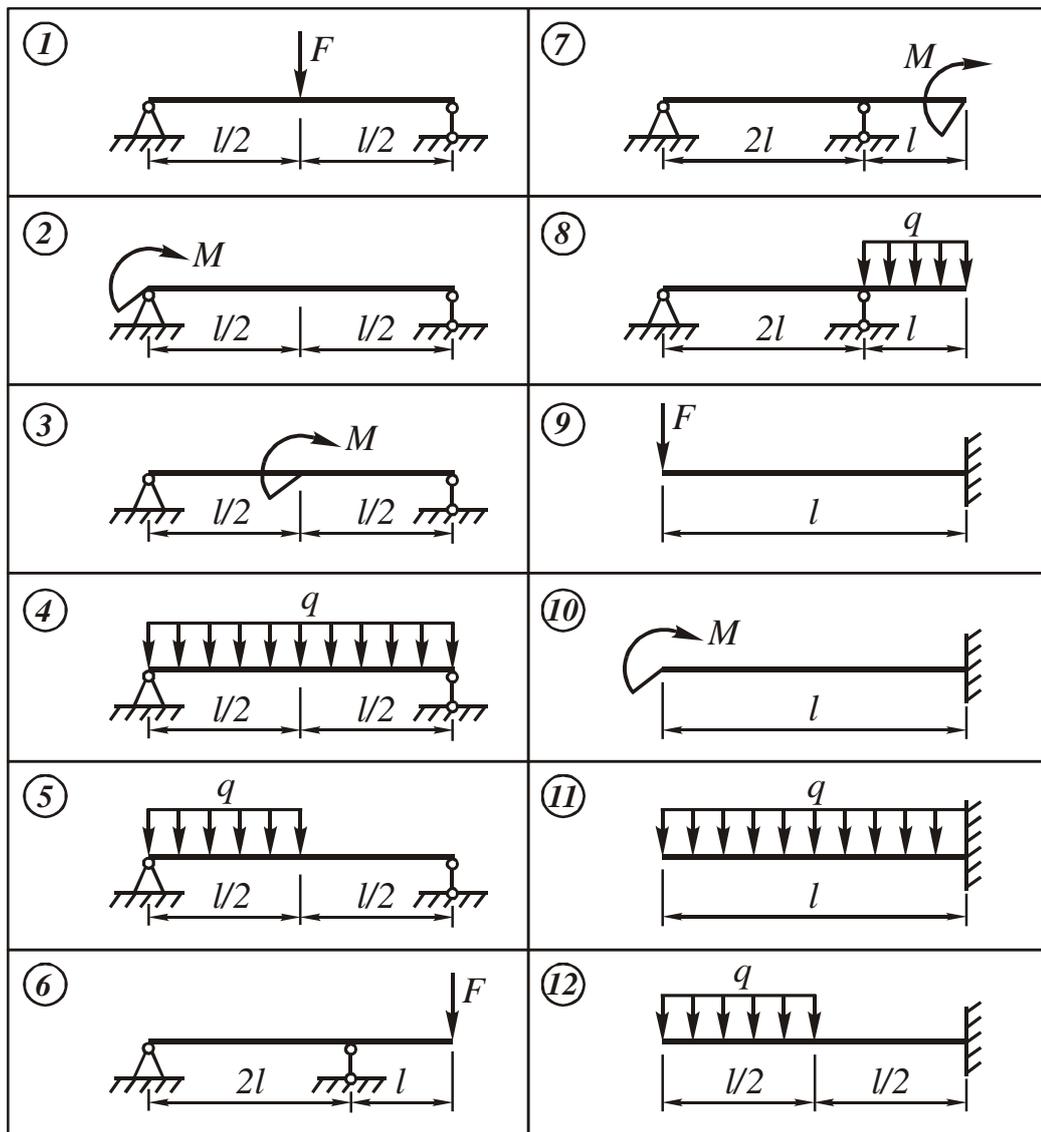


Рис. 4.46. Схемы балок к задаче 7

8. Запишите формулу для вычисления изгибающих моментов, действующих в поперечных сечениях участка  $CD$  балки (рис. 4.47).

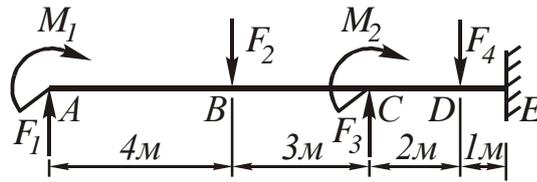


Рис. 4.47. Схема балки к задаче 8

9. Вычислите изгибающий момент, действующий в поперечном сечении  $C$  балки (рис. 4.48).

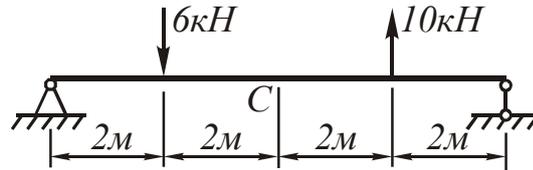


Рис. 4.48. Схема балки к задаче 9

10. Определите абсциссу  $z_0$  сечения, в котором изгибающий момент максимален (рис. 4.49).

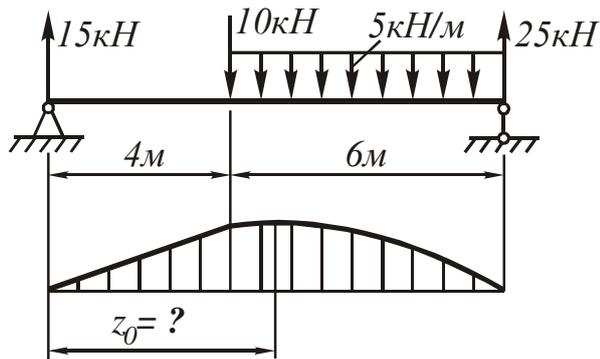


Рис. 4.49. Схема балки к задаче 10

11. Вычислите максимальные нормальные напряжения, действующие в поперечном сечении балки (рис. 4.50).

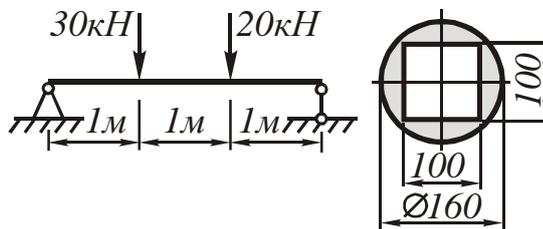


Рис. 4.50. Схема балки и ее поперечного сечения (к задаче 11)

12. Нормальные напряжения, действующие в точке  $B$  поперечного сечения балки (рис. 4.51), равны  $60 \text{ МПа}$ .

Определите нормальные напряжения в точке  $A$ .

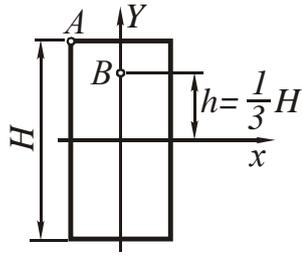


Рис. 4.51. Схема поперечного сечения балки (к задаче 12)

13. На чертеже (рис. 4.52), изображено поперечное сечение балки. Изгибающий момент, действующий в этом сечении, равен  $10 \text{ кНм}$ . Определить коэффициент запаса прочности, если предел текучести материала балки равен  $\sigma_0 = 240 \text{ МПа}$ .

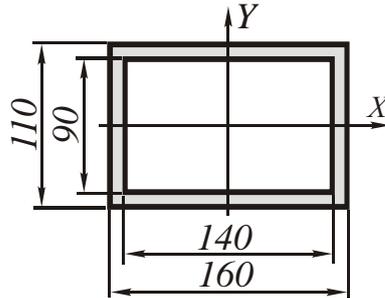


Рис. 4.52. Схема поперечного сечения балки (к задаче 13)

14. Вычислите угол поворота сечения, в котором приложена сила  $F$ . Жесткость балки постоянна и равна  $EI_x$  (рис. 4.53).

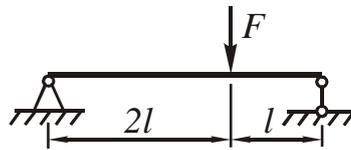


Рис. 4.53. Схема балки к задаче 14

15. Вычислите прогиб балки в сечении  $C$ . Жесткость балки постоянна и равна  $EI_x$  (рис. 4.54).

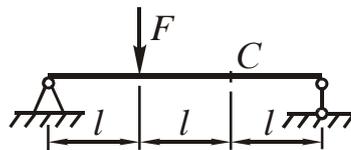


Рис. 4.54. Схема балки к задаче 15

16. Вычислите угол поворота сечения  $C$  балки (рис. 4.55). Жесткость балки  $EI_x$  по всей её длине постоянна.

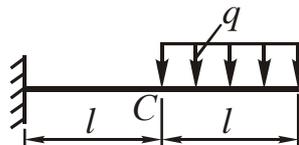


Рис. 4.55. Схема балки к задаче 16

## ВЫВОДЫ

1. Изгибом называется деформация бруса, сопровождающаяся искривлением его оси, при этом в поперечном сечении из шести внутренних силовых факторов в общем случае два равны нулю - крутящий момент  $\dot{I} \ \delta$  и продольная сила  $N$ .

2. Прямой брус, работающий на изгиб, называется балкой. На расчетной схеме балка заменяется ее осью, при этом все нагрузки приводятся к ее оси.

3. Для того чтобы балка могла воспринимать нагрузки и передавать их на основание или другие части конструкции, она должна иметь опорные устройства (опоры).

4. При чистом изгибе поперечные сечения балки, оставаясь плоскими, поворачиваются друг относительно друга на некоторый угол, оставаясь перпендикулярными к ее оси. В поперечном сечении возникают нормальные напряжения  $\sigma$ , не изменяющиеся по ширине сечения.

5. В случае плоского поперечного изгиба внутренние усилия, возникающие в поперечном сечении, приводятся к поперечной силе  $Q$  и изгибающему моменту  $M$ . Величины  $Q$  и  $M$  определяются методом сечений.

6. Поперечная сила  $Q$  в произвольно выбранном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на нормаль к оси балки всех сил, приложенных к балке слева или справа от рассматриваемого сечения.

7. Изгибающий момент  $M$  в произвольно выбранном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех сил, приложенных к балке слева или справа от рассматриваемого сечения, относительно нейтральной оси поперечного сечения.

8. Для расчета балок на прочность и жесткость строятся графики, изображающие характер изменения внутренних силовых факторов  $Q$  и  $M$  по длине балки. Подобные графики называются эпюрами.

9. При плоском поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают нормальные и касательные напряжения, величина которых зависит как от внутренних силовых факторов, так и от формы и размеров сечения.

10. Нормальные напряжения, оставаясь постоянными по ширине сечения, изменяются линейно по его высоте, достигая экстремальных значений в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси. Формула для вычисления нормальных напряжений в точке  $A$  поперечного сечения балки записывается в виде

$$\sigma_A = \frac{M}{I_x} \cdot y_A.$$

11. Касательные напряжения не изменяются по ширине балки. Распределение касательных напряжений по высоте сечения зависит от его формы, в наиболее удаленных от нейтральной линии волокнах касательные напряжения равны нулю.

Формула для вычисления касательных напряжений в точке  $A$  поперечного сечения балки записывается в виде:

$$\tau_A = \frac{Q \cdot S_x^{omc}}{I_x \cdot b(y)}.$$

12. Используя условие прочности при изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\bar{\sigma}}} \leq [\sigma],$$

можно решить три основных задачи сопротивления материалов: подобрать поперечное сечение балки, найти максимальное значение допускаемого изгибающего момента, проверить прочность балки.

13. Деформация балки характеризуется прогибом, т.е. перемещением центра тяжести ее поперечного сечения перпендикулярно оси балки и углом поворота сечения.

14. Для определения перемещений при изгибе применяется метод начальных параметров, в котором используется универсальное уравнение упругой линии, имеющее вид

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot z + \sum \frac{M(z-a)^2}{2} + \sum \frac{F(z-b)^3}{6} + \sum \frac{q(z-c)^4}{24}.$$

15. Проверка балки на жесткость состоит в сравнении её стрелы прогиба  $f_{\max}$  с допускаемой величиной  $[f]$ , если условие жесткости не удовлетворяется, размеры балки определяют из условия обеспечения её жесткости.

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная учебная литература

#### *Учебники*

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов : учебник для вузов / В.И.Феодосьев .— 13-е изд., перераб и доп. — М. : Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2005 .— 592с
2. Горшков А.Г. Сопротивление материалов/ Горшков А.Г., Трошин В.Н., Шашилин В.И. - М.: Физматлит, 2002.- 543 с.
3. Александров А.В. Сопротивление материалов/ Александров А.В., Потапов Д.В., Державин Б.П. - М.: Высшая школа, 2000.- 560 с.
4. Копнов, В.А. Сопротивление материалов.Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ : учеб.пособие для вузов / В.А.Копнов, С.Н.Кривошапка. — 2-е изд., стер. — М. : Высш.шк., 2005 .— 351с.

#### *Задачники*

5. Сборник задач по сопротивлению материалов/ Под ред. В.К. Качурина.- М.: Наука, 1984. - 432 с.

#### *Учебные пособия*

6. Петренко А.К. Основы сопротивления материалов/ А.К. Петренко, А.С. Саммаль, В.М. Логунов. Тул. гос. ун-т. Тула, 2001.-112 с.
7. Фотиева Н.Н. Сопротивление материалов в примерах и задачах/ Фотиева Н.Н., Петренко А.К., Саммаль А.С., Логунов В.М. Тул. гос. ун-т. Тула, 2004.- 186 с.
8. Ицкович Г.М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов/ Ицкович Г.М. и др.- М.: Высшая школа, 1999.- 592 с.
9. Минин Л.С. Тесты. Сопротивление материалов/ Минин Л.С., Хроматов В.Е. - М.: Центр тестирования МО РФ, 2002.- 84 с.

### Дополнительная литература

#### *Задачники*

10. Вольмир А.С. Сборник задач по сопротивлению материалов/ Вольмир А.С. и др.- М.: Наука, 1984. - 407 с.

#### *Учебные пособия*

11. Миролубов И.Н. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов/ Миролубов И.Н. и др. - М.: Высшая школа, 1985.- 399 с.
12. Минин Л.С. Расчетные и тестовые задания по сопротивлению материалов/ Л.С. Минин, В.Е. Хроматов, Ю.П. Самсонов. - М.: Высшая школа, 2003.- 22 с.

#### *Справочники*

13. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов/ Писаренко Г.С. и др. - Киев: Наукова думка, 1988. - 734 с.

**Специальная и научно-популярная литература**

14. Шелофаст В.В. Основы проектирования машин/ Шелофаст В.В. –М.: Издательство АПМ, 2000.- 472с.

15. Макаров Е.Г. Сопротивление материалов на базе Mathcad/ Макаров Е.Г.– СПб: БВХ, -Петербург, 2002.- 512 с.

16. Теличко Г.Н. Основы строительной механики плоских стержневых систем/ Теличко Г.Н.. –Тула, 1999.- 440с.

17. Гордон Дж. Конструкции, или почему не ломаются вещи/ Гордон Дж. – М.: МИР, 1980. 390 с.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

#### 1. Единицы механических величин

**Таблица П1**

Величина		Единица СИ		Соотношение единиц
Наименование	Обозначение	Наименование	Обозначение	
Сила	$F, Q, N$	ньютон	$H$	$10 H = 1 кгс$
Напряжение	$\sigma, \tau$	паскаль	$Па$	$1 Па = 1 Н/м^2$
Модуль упругости	$E, G$	паскаль	$Па$	$1 МПа = 10 кгс/см^2$
Момент силы	$M$	ньютон·метр	$H·м$	$1 H·м = 10 кгс·см$
Интенсивность распределенной по длине нагрузки	$q$	ньютон/метр	$H/м$	$1 H/м = 0,001 кгс/см$

#### 2. Основные характеристики некоторых материалов

Таблица П2

Материал	Модуль упругости первого рода $E, МПа$	Модуль сдвига $G, МПа$	Коэффициент Пуассона $\mu$	Коэффициент температурного расширения $\alpha, 1/^\circ \tilde{N}$
Сталь	$(2,0 \div 2,1) \cdot 10^5$	$(7,8 \div 8,34) \cdot 10^4$	0,25 ÷ 0,33	$12,5 \cdot 10^{-6}$
Чугун	$(1,1 \div 1,5) \cdot 10^5$	$4,4 \cdot 10^4$	0,23 ÷ 0,27	$10,4 \cdot 10^{-6}$
Алюминий и алюминиевые сплавы	$(0,7 \div 0,8) \cdot 10^5$	$2,65 \cdot 10^4$	0,32 ÷ 0,34	$24,5 \cdot 10^{-6}$
Медь	$1,2 \cdot 10^5$	$3,92 \cdot 10^4$	0,31 ÷ 0,34	$16,5 \cdot 10^{-6}$
Латунь	$(1,0 \div 1,1) \cdot 10^5$	$(3,6 \div 3,9) \cdot 10^4$	0,32 ÷ 0,34	-
Бетон	$(0,16 \div 0,2) \cdot 10^5$	-	0,16 ÷ 0,18	$12 \cdot 10^{-6}$
Полиэтилен	$(2,0 \div 2,1) \cdot 10^5$	-	-	-

Дерево вдоль волокон	$(0,1 \div 0,12) \cdot 10^5$	$0,054 \cdot 10^4$	-	-
----------------------	------------------------------	--------------------	---	---

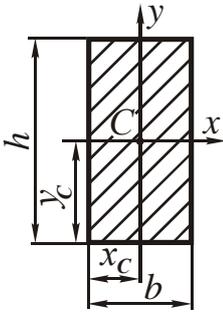
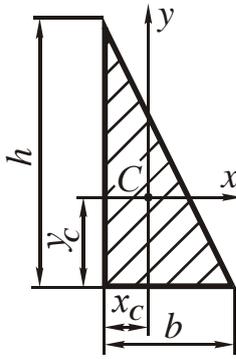
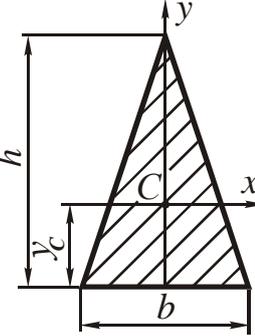
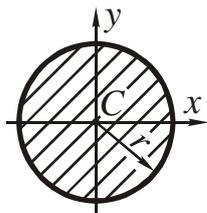
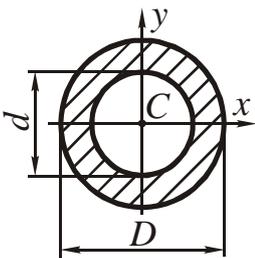
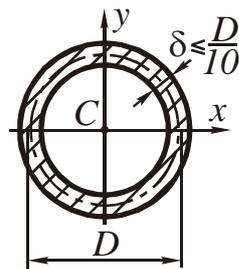
3. Ориентировочные значения основных допускаемых напряжений на растяжение и сжатие

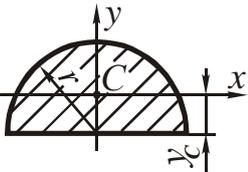
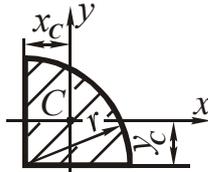
Таблица ПЗ

Материал	Допускаемое напряжение, МПа	
	Растяжение	Сжатие
Чугун серый в отливках	28-80	120-150
Сталь Ст 2	140	
Сталь Ст 3	160	
Сталь Ст 3 в мостах	140	
Сталь машиностроительная (конструкционная) легированная	60-250	
Медь	30-120	
Латунь	70-140	
Бронза	60-120	
Алюминий	30-80	
Алюминиевая бронза	80-120	
Дуралюмин	80-150	
Текстолит	30-40	
Гетинакс	50-70	
Сосна вдоль волокон	7-10	10-12
Сосна поперек волокон	-	1,5-2
Дуб вдоль волокон	9-13	13-15
Дуб поперек волокон	-	2-3,5
Каменная кладка	до 0,3	0,4-4,0
Кирпичная кладка	до 0,2	0,6-2,5
Бетон	0,1-0,7	1-9

4. Геометрические характеристики плоских сечений

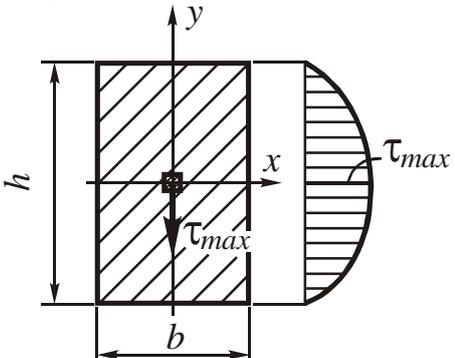
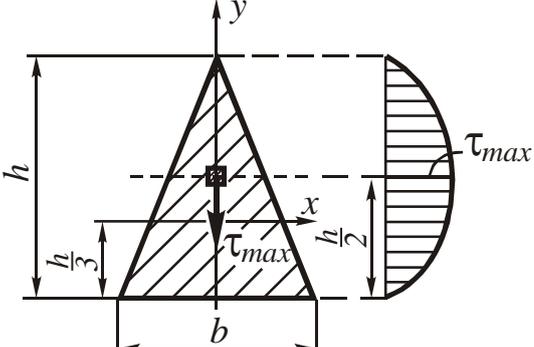
Таблица П4

	$x_c = \frac{1}{2}b;$ $y_c = \frac{1}{2}h;$ $A = bh;$ $I_x = \frac{bh^3}{12};$ $I_y = \frac{hb^3}{12}.$		$x_c = \frac{1}{3}b;$ $y_c = \frac{1}{3}h;$ $A = \frac{1}{2}bh;$ $I_x = \frac{bh^3}{36};$ $I_y = \frac{hb^3}{36}.$
	$y_c = \frac{1}{3}h;$ $A = \frac{1}{2}bh;$ $I_x = \frac{bh^3}{36};$ $I_y = \frac{hb^3}{48}.$		$A = \pi r^2;$ $I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4};$ $I_\rho = \frac{\pi r^4}{2};$ $W_\rho = \frac{\pi r^3}{2}.$
	$\alpha = \frac{d}{D};$ $A = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^2);$ $I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4);$ $I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4);$ $W_\rho = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4).$		$I_\rho = \frac{\pi D^3 \delta}{4};$ $W_\rho = \frac{\pi D^2 \delta}{2}.$

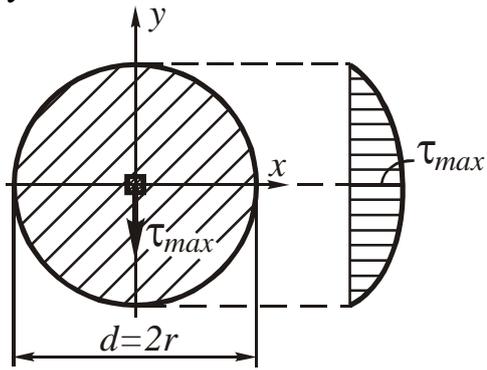
	$y_c = 0,424r;$ $A = \frac{\pi r^2}{2};$ $I_x = 0,11r^4;$ $I_y = \frac{\pi r^4}{8}.$		$x_c = y_c = 0,424r;$ $A = \frac{\pi r^2}{4};$ $I_x = I_y = 0,055r^4.$
-----------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------

5. Касательные напряжения при плоском поперечном изгибе в балках прямоугольного, треугольного и круглого сечений

Таблица П5

<p>Прямоугольник</p> 	$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2A}$
<p>Треугольник</p> 	$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2A}$

Круг



$$\tau_{max} = \frac{4Q}{3A}$$

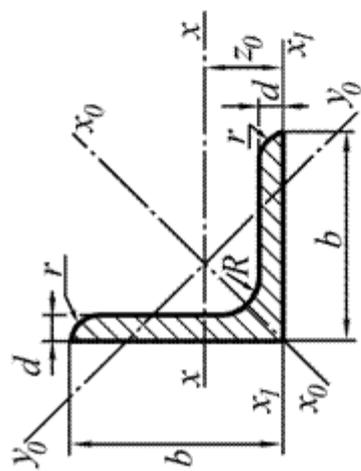


Таблица III

Сталь прокатная угловая равнополочная. ГОСТ 8509-72

Номер профиля	Размеры			Площадь сечения $A$	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей						$z_0$	
	$b$	$d$	$r$			$x-x$		$x_0-x_0$		$y_0-y_0$			$x_1-x_1$
						$I_x$	$i_x$	$I_{x0\max}$	$i_{x0\max}$	$I_{y0\min}$	$i_{y0\min}$		
				$см^2$	$кг$	$см^4$	$см$	$см^4$	$см$	$см^4$	$см$	$см^4$	$см$
2	20	3	3,5	1,13	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
	4			1,46	1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64
2,5	25	3	3,5	1,43	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73
	4			1,86	1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76
2,8	28	3	4,0	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80
3,2	32	3	4,8	1,86	1,46	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
	4			2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94
3,6	36	3	4,5	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
	4			2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04

Продолжение табл. П1

Номер профи- ля	Размеры				Пло- щадь сечения $A$	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей								$z_0$
	$b$	$d$	$R$	$r$			$x-x_0$		$x_0-x_0$		$y_0-y_0$		$x_1-x_1$		
							$I_x$	$i_x$	$I_{x0\max}$	$i_{x0\max}$	$I_{y0\min}$	$i_{y0\min}$		$I_{x1}$	
4	40	5,0	1,7	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	
				4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	
				5	3,79	2,97	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17	
4,5	45	5,0	1,7	3	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	
				4	3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26	
				5	4,20	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30	
5	50	5,5	1,8	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33	
				4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38	
				5	4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42	
5,6	56	6,0	2,0	4	4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52	
				5	5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57	
6,3	63	7,0	2,3	4	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69	
				5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74	
				6	7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78	
7	70	8	2,7	4,5	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	
				5	6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	
				6	8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	
				7	9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	
	8			10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02		

Продолжение табл. П1

Номер профи- ля	Размеры				Пло- щадь сечения $A$	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей								$z_0$
	$b$	$d$	$R$	$r$			$x_0-x_0$		$y_0-y_0$		$x_1-x_1$		$z_0$		
							$I_{x0} \max$	$i_{x0} \max$	$I_{y0} \min$	$i_{y0} \min$	$I_{x1}$	$I_{x1}$			
							$см^4$	$см$	$см^4$	$см$	$см^4$	$см$			
7,5	5	75	9	3,0	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	
	6				8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	
	7				10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	
	8				11,5	9,02	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113	2,15	
	9				12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18	
8	5,5	80	9	3,0	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	
	6				9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19	
	7				10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23	
	8				12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27	
9	6	90	10	3,3	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43	
	7				12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47	
	8				13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51	
	9				15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55	
10	6,5	100	12	4,0	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68	
	7				13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71	
	8				15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75	
	10				19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83	
	12				22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91	
	14				26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99	
11	16	110	12	4,0	29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06	
	7				15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96	
	8				17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00	

Продолжение табл. П1

Номер профи- ля	Размеры			Пло- щадь сечения $A$	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей						$z_0$		
	$b$	$d$	$R$			$r$	$x-x_0$		$y_0-y_0$		$x_1-x_1$			
							$I_x$	$i_x$	$I_{x0\max}$	$i_{x0\max}$			$I_{y0\min}$	$i_{y0\min}$
12,5	125	8	14	4,6	15,5	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9			17,3	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10			19,1	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12			22,7	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14			26,2	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16			29,6	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
14	140	9	14	4,6	19,4	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10			21,5	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12			25,5	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90
16	160	10	16	5,3	24,7	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11			27,0	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12			29,4	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14			34,0	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16			38,5	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18			43,0	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
18	180	20	16	5,3	47,4	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
		11			30,5	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12			33,1	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89

Продолжение табл. ПИ

Номер профи- ля	Размеры			Пло- щадь сечения $A$	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей								$z_0$
	$b$	$d$	$R$			$r$	$x_0-x_0$		$y_0-y_0$		$x_1-x_1$		$z_0$	
							$I_{x0\ max}$	$i_{x0\ max}$	$I_{y0\ min}$	$i_{y0\ min}$	$I_{x1}$			
												$I_x$		
мм		мм		см <sup>4</sup>		см		см <sup>4</sup>		см				
20	12				37,0	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
	13				39,9	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
	14				42,8	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
	16	18		6,0	48,7	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
	20				60,1	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
	25				74,0	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
22	30				87,6	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
	14	21		7,0	47,4	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
25	16				53,8	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
	16				61,5	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
	18				68,9	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
	20				76,1	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
	22	24		8	83,3	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
	25				94,0	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
25	28				104,5	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
	30				111,4	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31

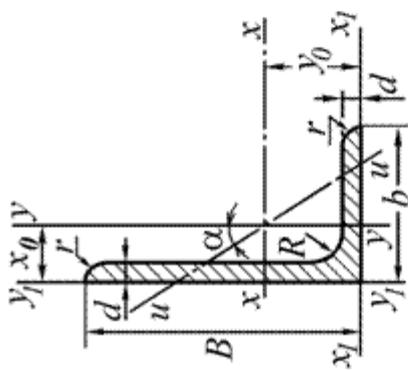


Таблица П2

Сталь прокатная угловая неравнополочная. ГОСТ 8510-72

Номер про-филя	Размеры				Пло-щадь сече-ния $A$	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей												Угол наклона оси $\text{tg}\alpha$
	$B$	$b$	$d$	$R$			$r$	$x - x$		$y - y$		$x_1 - x_1$		$y_1 - y_1$		$u - u$			
								$I_x$	$i_x$	$I_y$	$i_y$	$I_{x1}$	$y_0$	$I_{y1}$	$x_0$	$I_u \text{ min}$	$i_u \text{ min}$		
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,70	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392			
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382			
		4	4	1,94	1,00	0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,374					
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385			
		4	4	2,47	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381					
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382			
		4	4	2,80	1,42	1,69	0,78	12,1	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,379					
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	1,60	1,99	0,91	12,4	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403			
		4	4	3,17	1,59	2,56	0,90	16,6	1,85	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401					

Продолжение табл. П2

Номер про- филя	Размеры					Пло- щадь сече- ния $A$	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей										Угол наклона оси $\text{tg}\alpha$
	$B$	$b$	$d$	$R$	$r$			$x - x$		$y - y$		$x_I - x_I$		$y_I - y_I$		$u - u$		
								$I_x$	$i_x$	$I_y$	$i_y$	$I_{xI}$	$y_0$	$I_{yI}$	$x_0$	$I_{u \min}$	$i_{u \min}$	
5,6/3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58	2,81	1,78	3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406	
			5			4,41	3,46	1,77	4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404	
6,3/4,0	63	40	4			4,04	3,17	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397	
			5	7,0	2,3	4,98	3,91	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,72	0,86	0,396	
			6			5,90	4,63	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393	
			8			7,68	6,03	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,85	0,386	
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	4,39	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406	
			5			6,11	4,79	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436	
7,5/5	75	50	6	8	2,7	7,25	5,69	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435	
			8			9,47	7,43	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	0,430	
8/5	80	50	5	8	2,7	6,36	4,99	2,56	12,7	1,41	84,6	2,60	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387	
			6			7,55	5,92	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386	
9/5,6	90	56	5,5			7,86	6,17	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384	
			6	9	3	8,54	6,70	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384	
			8			11,18	8,77	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380	
10/6,3	100	63	6			9,59	7,53	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393	
			7	10	3,3	11,1	8,70	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392	
			8			12,6	9,87	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391	
			10			15,5	12,1	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387	
11/7	110	70	6,5	10	3,3	11,4	8,98	3,53	45,6	2,00	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402	
			8			13,9	10,9	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400	



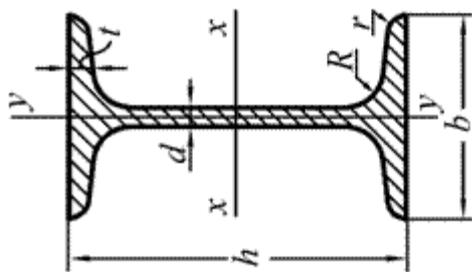


Таблица ПЗ

Сталь горячекатаная. Балки двутавровые. ГОСТ 8239-72

Номер профиля	Масса 1 м длины	Размеры						Площадь сечения $A$	Справочные величины для осей						
		$h$	$b$	$d$	$t$	$R$	$r$		$x-x$			$y-y$			
									$I_x$	$W_x$	$i_x$	$S_x$	$I_y$	$W_y$	$i_y$
	кг			мм				$см^2$	$см^4$	$см^3$	см	$см^4$	$см^3$	см	
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	7,5	3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	8	3	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	9	3,5	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	19,9	180	100	5,1	8,3	9	3,5	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21,0	200	100	5,2	8,4	9,5	4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07

Продолжение табл. ПЗ

Номер про- филя	Масса 1 м длины	Размеры						Пло- щадь сече- ния $A$	Справочные величины для осей						
		мм							x-x			y-y			
		$h$	$b$	$d$	$t$	$R$	$r$		$I_x$	$W_x$	$i_x$	$S_x$	$I_y$	$W_y$	$i_y$
	кг						$см^2$	$см^4$	$см^3$	см	$см^3$	$см^4$	$см^3$	см	
20а	22,7	200	110	5,2	8,6	9,5	4	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24,0	220	110	5,4	8,7	10	4	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22а	25,8	220	120	5,4	8,9	10	4	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	10,5	4	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24а	29,4	240	125	5,6	9,8	10,5	4	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	11	4,5	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27а	33,9	270	135	6,0	10,2	11	4,5	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	12	5	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30а	39,2	300	145	6,5	10,7	12	5	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	13	5	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	14	6	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13,0	15	6	72,6	19062	953	16,20	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9,0	14,2	16	7	84,7	27696	1231	18,10	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10,0	15,2	17	7	100	39727	1589	19,90	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11,0	16,5	18	7	118	55962	2035	21,80	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12,0	17,8	20	8	138	76806	2560	23,60	1491	1725	182	3,54

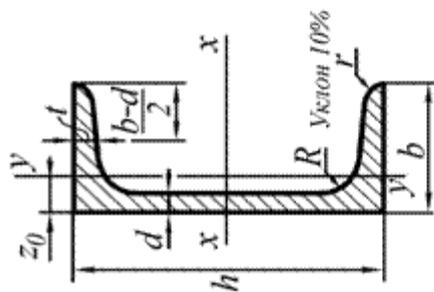


Таблица П4

Сталь горячекатаная. Швеллеры с уклоном внутренних граней полок. ГОСТ 8240-72

Номер профиля	Масса 1м длины кг	Размеры					Площадь сечения $A$ $см^2$	Справочные величины для осей							
		$h$	$b$	$d$	$t$	$R$		$r$	x-x			y-y			
									$I_x$ $см^4$	$W_x$ $см^3$	$i_x$ $см$	$S_x$ $см^3$	$I_y$ $см^4$	$W_y$ $см^3$	$i_y$ $см$
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6	2,5	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	6	2,5	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7	3	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	7,5	3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	8	3	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	8	3	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80

Продолжение табл. П4

Номер про- филя	Масса 1 м длины	Размеры						Пло- щадь сечения A	Справочные величины для осей									
		h	b	d	t	R	r		x-x			y-y			z <sub>0</sub>			
									I <sub>x</sub>	W <sub>x</sub>	i <sub>x</sub>	S <sub>x</sub>	I <sub>y</sub>	W <sub>y</sub>		i <sub>y</sub>		
	кг	мм						см <sup>2</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см
16а	15,3	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	2,00	
18	16,3	180	70	5,1	8,7	9	3,5	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94	1,94	
18а	17,4	180	74	5,1	9,3	9	3,5	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	2,13	
20	18,4	200	76	5,2	9,0	9,5	4	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	2,07	
20а	19,8	200	80	5,2	9,7	9,5	4	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	2,28	
22	21,0	220	82	5,4	9,5	10	4	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	2,21	
22а	22,6	220	87	5,4	10,2	10	4	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	2,46	
24	24,0	240	90	5,6	10,0	10,5	4	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	2,42	
24а	25,8	240	95	5,6	10,7	10,5	4	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	2,67	
27	27,7	270	95	6,0	10,5	11	4,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	2,47	
30	31,8	300	100	6,5	11,0	12	5	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	2,52	
33	36,5	330	105	7,0	11,7	13	5	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	2,59	
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	2,68	
40	48,3	400	115	8,0	13,5	15	6	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	2,75	