Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО
«Тульский государственный университет»
Технический колледж им. С.И. Мосина

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

МАТЕМАТИКА

по специальностям СПО

23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (по видам).
23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования (по отраслям).

2022

УТВЕРЖДЕНЫ

цикловой комиссией естественнонаучных дисциплин

Протокол от «13» 01 2022 № 6

Председатель цикловой комиссии ____________ Е.А. Рейм

Тема: «Функции, пределы, непрерывность».

Вычисление пределов.
Теоремы о пределах.

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c;(c - const)$

2. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$;

4. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$;

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}$; если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) \neq 0$.

6. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\varphi(x)} = (\lim\limits_{x\to a} f(x))^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}$.

"Замечательные пределы"

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

<u>Отработка техники вычисления пределов.</u>

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3} = \dfrac{5\cdot4+2}{2\cdot4+3} = 2$;

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+2x}{3x-8} = \dfrac{3^3+2\cdot3}{1} = 33$;

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5}{3x-12}$

Здесь предел знаменателя равен нулю, поэтому теорему о пределе частного применить нельзя. Так как $\lim\limits_{x\to 4}(3x-12) = 0$, то 3х-2 при $x \to 4$ есть величина бесконечно малая, а обратная ей величина $\dfrac{1}{3x-12}$ бесконечно большая. Поэтому, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5}{3x-12} = \infty$.

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$

Здесь пределы числителя и знаменателя при $x \to 3$ равны нулю, т.е. получили неопределённость $\dfrac{0}{0}$. Однако, из этого не следует, что данная функция не имеет предела. Разложим на множители числитель и знаменатель, чтобы сократить дробь на общий множитель, стремящийся к нулю.

$$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{3x(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{x-2}{3x} = \frac{3-2}{3\cdot3} = \frac{1}{9}.$$

5. $\lim\limits_{x \to 12} \dfrac{\sqrt{x+4}-4}{x-12}$

При $x \to 12$ получим неопределённость $\dfrac{0}{0}$. Умножим числитель и знаменатель на сопряжённый числителю множитель $\sqrt{x+4}+4$:

$$\lim_{x \to 12} \frac{\sqrt{x+4}-4}{x-12} = \lim_{x \to 12} \frac{(\sqrt{x+4}-4)(\sqrt{x+4}+4)}{(x-12)(\sqrt{x+4}+4)} =$$

$$\lim_{x \to 12} \frac{x+4-16}{(x-12)(\sqrt{x+4}+4)} = \lim_{x \to 12} \frac{x-12}{(x-12)(\sqrt{x+4}+4)} = \lim_{x \to 12} \frac{1}{\sqrt{x+4}+4} = \frac{1}{8}.$$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+x^3}{x^3+2x^4}$

Пределы числителя и знаменателя при $x \to \infty$ - бесконечно большие величины, получим неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на наивысшую степень аргумента, т.е. на x^4.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+x^3}{x^3+2x^4} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+2} = \frac{0+0}{0+2} = 0.$$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x+5}{2}$; 8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{5x+3x^2}$; 9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{9x^2}{5x^3+6x^4}$; 10. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$;

11. $\lim\limits_{x \to 1} (\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3})$; 12. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$; 13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{2x}$;

14. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7}{2x^2+x}$; 15. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+x}{2x}$; 16. $\lim\limits_{x \to \infty} (\dfrac{1+2x^2}{x^2+2x} - \dfrac{3x}{5x-1})$;

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{3x}$; 18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$; 19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x}$;

20. $\lim\limits_{x \to \infty} (1+\dfrac{3}{x})^x$; 22. $\lim\limits_{x \to 0} (1+2x)^{\frac{3}{x}}$; 23. $\lim\limits_{x \to \infty} (\dfrac{x}{x+1})^x$.

Тема: «Производная и её приложение».

<u>Основные правила дифференцирования.</u>

(U+V-W)'=U'+V'-W' - производная алгебраической суммы функций.

(UV)'=U'V+V'U - производная произведения

$\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V-V'U}{V^2}$ - производная частного.

Формулы дифференцирования.

1. $(C)' = 0$
2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(e^x)' = e^x$
6. $(a^x)' = a^x \ln a$
7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.
9. $(\sin x)' = \cos x$
10. $(\cos x)' = -\sin x$
11. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
16. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Найти производные следующих функций:

1. $y = \sqrt{x} \cdot \cos x$.

- $y' = (\sqrt{x} \cdot \cos x)' = (\sqrt{x})' \cos x + (\cos x)' \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x - \sin x \sqrt{x}$.

2. $y = \frac{3^x - 4}{x^{-3}}$.

- $y' = \left(\frac{3^x - 4}{x^{-3}}\right)' = \frac{(3^x - 4)' x^{-3} - (x^{-3})' \cdot (3^x - 4)}{(x^{-3})^2} = \frac{3^x \ln 3 x^{-3} + 3x^{-4} \cdot (3^x - 4)}{x^{-6}}$.

3. $y = tgx - \sqrt{4} + x^{\frac{1}{3}} - \log_4 x$.

- $y' = (tgx - \sqrt{4} + x^{\frac{1}{3}} - \log_4 x)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{x \ln 4}$.

Производные сложных функций.

Функция $y = f(U)$, где $U = f(x)$, называется сложной функцией.
U -промежуточный аргумент.
Производная сложной функции $y' = f'(u) \cdot U'(x)$

Найти производные следующих функций:

1. $y = (x^2 - 6x + 4)^7$.

- $y' = 7(x^2 - 6x + 4)^6 \cdot (x^2 - 6x + 4)' = 7(x^2 - 6x + 4)^6 \cdot (2x - 6)$.

1. $y = \cos(5x^3 - 4)$.

- $y' = -\sin(5x^3 - 4) \cdot (5x^3 - 4)' = -\sin(5x^3 - 4) \cdot 15x^2$.

2. $y=\sqrt{x^3-2x}$.

- $y'=\frac{(x^3-2x)'}{2\sqrt{x^3-2x}}=\frac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x}}$.

3. $y=\ln\sin x$.

- $y'=\frac{(\sin x)'}{\sin x}=\frac{\cos x}{\sin x}=ctgx$.

4. $y=4^{\sqrt{x}}$.

- $y'=4^{\sqrt{x}}\ln 4\cdot(\sqrt{x})'=4^{\sqrt{x}}\ln 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Геометрический смысл производной.

Геометрический смысл первой производной состоит в том, что она численно равна тангенсу угла наклона (угловому коэффициенту) касательной, проведённой к графику функции в данной точке.

$$y'=k=tg\alpha$$

Уравнение касательной: $y-y_0=k(x-x_0)$.

Уравнение нормали: $y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0)$.

Пример. Составить уравнение касательной и нормали, проведённых к графику функции:

1. $y=x^2-4x$ в точке $x_0=3$.

Решение.

Найдём y_0: $y_0(3)=3^2-4\cdot 3=-3$. Угловой коэффициент равен первой производной, вычисленной в данной точке $x_0=3$: $k=(x^2-4x)'=2x-4$; $k(3)=2\cdot 3-4=2$. Тогда уравнения касательной и нормали будут иметь вид:

$y+3=2(x-3)$ -уравнение касательной.

$y+3=-\frac{1}{2}(x-3)$ -уравнение нормали.

2. $y=\ln x$ в точке $x_0=1$; 3. $y=3^x$ в точке $x_0=0$.

Порядок исследования функции на экстремум с помощью первой производной.

1. Найти область определения функции.
2. Найти первую производную
3. Найти критические точки функции $y=f(x)$, т.е. точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.
4. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые критические точки делят область определения функции $f(x)$. Если при

переходе через критическую точку, знак производной $f'(x)$ поменялся с "-" на "+" , то в этой точке минимум; если с "+" на "-" , то максимум. Если при переходе через критическую точку знак производной $f'(x)$ не изменился, то экстремума в данной точке нет.

5. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Найти экстремумы функций:

1. $y = x^3 - 3x^2$.

- $D(y): x \in R$.
- $y' = 3x^2 - 6x$.
- $y' = 0$; $3x(x-2) = 0$; $x = 0$ и $x = 2$ - критические точки.
- Определим знак $f'(x)$ в полученных промежутках:

В точке $x = 0$ максимум, в точке $x = 2$ минимум.

- $y_{max}(0) = 0; y_{min}(2) = -4$

2. $y = 2x^4 - x$;
3. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$.

Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости графика функции, точек перегиба.

1. Найти область определения функции.
2. Найти вторую производную $f''(x)$.
3. Найти критические точки второго рода.
4. Исследовать знак второй производной в промежутках, на которые делят критические точки второго рода область определения функции $f(x)$. Если производная $f'(x)$ отрицательна, то график функции на этом промежутке выпуклый, если производная $f'(x)$ положительна, то - вогнутый. Если при переходе через критическую точку знак второй производной поменялся, то она является точкой перегиба графика.
5. Вычислить значения функции в точках перегиба.

Найти точки перегиба.

1. $y = 6x^2 - x^3$

- $D(y): x \in R$;
- $y' = 12x - 3x^2$; $y'' = 12 - 6x$.
- $y'' = 0$; $12 - 6x = 0$; $x = 2$.
-

$x = 2$ - точка перегиба.

- $y(2)=16$.

2. $y=-\frac{1}{3}x^3-x$. 3. $y=x^4-x^2$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти первую производную:

$y=tg^{\frac{1}{3}}7x$; $y=\sqrt{2x-1}(x^3+8)$; $y=\frac{\sqrt{x}+2}{6+x}$.

2. Составить уравнение касательной к графику функции $y=\ln(5+x)$ в точке $x_0=2$.
3. Вычислить приближённо с помощью дифференциала: $y=x^{11}; x=1{,}021$.
4. Найти точки перегиба графика функции $y=3x^5-5x^3+1$.
5. Найти угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $y=\frac{4x-x^2}{4}$ в точке $x_0=-2$.
6. Исследовать и построить график функции $y=x^3+2x+4$.

Функции нескольких переменных. Частные производные и полный дифференциал.

Переменная величина z называется функцией двух переменных x и y, если каждой паре допустимых значений x и y соответствует единственное значение z (аналогично определяется функция n переменных).

Функции двух переменных обозначают $z=f(x;y); z=F(x;y)$; и т.п.

Частной производной функции $z=f(x;y)$ по переменной x называется производная этой функции при постоянном значении переменной y; она обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$ или z_x.

Частной производной функции $z=f(x;y)$ по переменной y называется производная по y при постоянном значении переменной x; она обозначается $\frac{\partial z}{\partial y}$ или z_y.

Частная производная функции нескольких переменных по одной переменной определяется как производная этой функции по соответствующей переменной при условии, что остальные переменные считаются постоянными.

Полным дифференциалом функции $z = f(x;y)$ в некоторой точке М $(x;y)$ называется выражение $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, где $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ вычисляются в точке М $(x;y)$, а $dx = \Delta x$; $dy = \Delta y$.

Найти частные производные:

1. $z = x^3 + 2xy^2 + 3y^3$

Решение.

Находим частную производную по x при постоянном значении y: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2$. Находим частную производную по y при постоянном значении x: $\frac{\partial z}{\partial y} = 4xy + 9y^2$.

2. $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

3. Вычислить значение частной производной функции $z = \frac{x - y}{x + y}$ в точке М (-2;3).

4. Вычислить полный дифференциал функции $z = x^3 - 2x^2y^2 + y^3$ в точке М(1; 2).

5. Найти частные производные: а) $z = x^3 - 3x^2y + 4x^3y^2 - y^3$; б) $z = \frac{3x}{y}$;

в) $z = \frac{y - 3x}{x + 4y}$; г) $y = e^{-\frac{x}{y}}$; д) $z = \ln(2x - y)$.

6. Вычислить значения частных производных в заданных точках:

а) $z = \frac{x - 2y}{x + y}$ в точке М (2; -1); б) $z = \frac{y}{x} + x$ в точке М (1; -2);

в) $z = e^{\frac{3x}{y}}$ в точке М (1; 1); г) $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке М (2; -2).

7. Вычислить полные дифференциалы функций в заданных точках:

а) $z = \frac{y}{x + y}$ в точке М (2; -1); б) $z = \sin(x^2 + 2y)$ при $x = 1; y = 2; dx = 0{,}1; dy = 0{,}2$;

в) $z = e^{\frac{x}{2y}}$ при $x = 2; y = 1; dx = 0{,}2; dy = 0{,}1$;

г) $z = \ln(2x + y)$ в точке М (1; 0).

Тема: Неопределённый и определённый интегралы, методы вычисления.
Приложения определённого интеграла.

Таблица интегралов.

1. $\int dx = x + C$;
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$;
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$;
4. $\int e^x dx = e^x + C$;
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Вычисление неопределённых интегралов.

1. Найти: $\int (4x^3 + 3x^2 - 2x - 8)dx$.

Решение.

$$\int (4x^3 + 3x^2 - 2x - 8)dx = \int 4x^3 dx + \int 3x^2 dx - \int 2x dx - \int 8dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 8x + C$$
$$= x^4 + x^3 - x^2 - 8x + C.$$

2. Найти: $\int \frac{3 + 2x - x^2}{x} dx$.

Решение.

$$\int \frac{3 + 2x - x^2}{x} dx = \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{2x}{x} dx - \int \frac{x}{x} dx = 3\int \frac{dx}{x} + 2\int dx - \int x dx = 3\ln x + 2x - \frac{x^2}{2} + C.$$

3. Найти: $\int (2e^x - 3\cos x)dx$.

Решение.

$$\int (2e^x - 3\cos x)dx = 2\int e^x dx - 3\int \cos x dx = 2e^x - 3\sin x + C.$$

4. Найти: $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\cos x} dx = 2\int \sin x dx = -2\cos x + C.$$

Метод подстановки.

1. Найти: $\int \dfrac{x^2dx}{x^3+4}$.

Решение.

Пусть $x^3+4=t$, откуда $3x^2dx=dt$ и $x^2dx=\dfrac{dt}{3}$. Тогда

$$\int\frac{x^2dx}{x^3+4}=\int\frac{dt}{3t}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}\ln|t|+C=\frac{1}{3}\ln\left|x^3+4\right|+C.$$

2. Найти: $\int\sin^4 x\cos x dx$.

Решение.

Пусть $\sin x=t$, тогда $\cos xdx=dt$.

$$\int\sin^4 xdx=\int t^4dt=\frac{t^5}{5}+C=\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$$

3. Найти: $\int \dfrac{9e^xdx}{(5-e^x)^3}$.

Решение.

Пусть $5-e^x=t$, откуда $-e^xdx=dt$. Тогда

$$\int\frac{9e^xdx}{(5-e^x)^3}=-9\int\frac{dt}{t^3}=-9\int t^{-3}dt=\frac{9}{2}t^{-2}+C=\frac{9}{2}(5-e^x)^{-2}+C.$$

4. Найти: $\int 7\sin\dfrac{7}{9}xdx$.

Решение.

Пусть $\dfrac{7}{9}x=t$, откуда $\dfrac{7}{9}dx=dt$, $dx=\dfrac{9}{7}dt$. Тогда

$$\int 7\sin\frac{7}{9}xdx=7\int\sin t\cdot\frac{9}{7}dt=9\int\sin tdt=-9\cos t+C=-9\cos\frac{7}{9}x+C.$$

Вычисление определённого интеграла.

Формула Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

1. Вычислить: $\int\limits_0^2(5x^4+6)dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^2(5x^4+6)dx=5\int\limits_0^2 x^4dx+6\int\limits_0^2 dx=x^5\Big|_0^2=2^5-6\cdot2=20.$$

2. Вычислить: $\int\limits_0^1\dfrac{4dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int\limits_0^1\frac{4dx}{1+x^2}=4arctgx\Big|_0^1=4(arctg1-arctg0)=4(\frac{\pi}{4}-0)=\pi.$$

3. Вычислить: $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{4} \sin x dx$.

Решение.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{4} \sin x dx = \frac{3}{4} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = -\frac{3}{4} \cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{3}{4} (\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{4}.$$

Вычисление определённого интеграла методом подстановки.

1. Вычислить: $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{6x dx}{(x^2-1)^2}$.

Решение.

Пусть $x^2 - 1 = t$, тогда $2x dx = dt$, откуда $x dx = \frac{dt}{2}$. Найдём новые пределы интегрирования: $t_н = 0^2 - 1 = -1; t_в = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}$.

$$\int\limits_{0}^{1/2} \frac{6x dx}{(x^2-1)^2} = 6 \int\limits_{-1}^{-\frac{3}{4}} \frac{\frac{dt}{2}}{t^2} = 3 \int\limits_{-1}^{-\frac{3}{4}} t^{-2} dt = -3t^{-1} \Big|_{-1}^{-\frac{3}{4}} = -3(-\frac{4}{3} + 1) = 1.$$

2. Вычислить: $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$.

Решение.

Пусть $\sin x = t$, тогда $\cos x dx = dt$. Найдём новые пределы интегрирования: $t_н = \sin \frac{\pi}{2} = 1; t_в = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \int\limits_{1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t^2} = \int\limits_{1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^{-2} dt = -t^{-1} \Big|_{1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1).$$

3 Вычислить : $\int\limits_{0}^{1} e^{x+1} dx$.

Решение.

Пусть $x + 1 = t$; тогда $dx = dt$. Найдём новые пределы интегрирования: $t_н = 0 + 1 = 1; t_в = 1 + 1 = 2$.

$$\int\limits_{0}^{1} e^{x+1} dx = \int\limits_{1}^{2} e^t dt = e^t \Big|_{1}^{2} = e^2 - e.$$

Приложения определённого интеграла.

1. Путь, пройденный точкой.

Путь, пройденный точкой за промежуток времени $t_1 \le t \le t_2$ вычисляется по формуле $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt$, где $f(t)$-скорость при прямолинейном движении.

2. Работа переменной силы.

Если переменная сила $F = F(x)$ действует в направлении оси ОХ , то работа силы на отрезке $a \le x \le b$ вычисляется по формуле: $A = \int\limits_a^b F(x)dx$

3. Площадь криволинейной трапеции.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x); x = a; x = b; y = 0$ вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

4. Объём тела вращения.

Объём тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси ОХ, вычисляется по формуле

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислить интегралы:

$$\int (x^2 - 2)^3 x dx; \quad \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}; \quad \int\limits_{2\sqrt{2}}^{4} x\sqrt{x^2 - 7}dx.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^3; x = -1; x = 2; y = 0.$$

3. Найти путь, пройденный телом от начала движения до остановки, если его скорость вычисляется по формуле $v = 6t - 2t^2$ (м/с).

4. Вычислить:

а. $\int (3x^5 - c/sx + 1)dx$; б. $\int \cos 3x dx$; в. $\int \frac{x^{-\frac{1}{2}} + 2}{\sqrt{x}} dx$; г. $\int x \cdot 2^{x^2} dx$; д. $\int \sqrt{\ln x} \frac{dx}{x}$;

е. $\int \frac{\sin t dt}{(2\cos t+3)^2}$; ж. $\int \frac{3dx}{5\sin^2 x}$; з. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt[4]{2x^5-4}}$; и. $\int \frac{2\sqrt{x}+5}{3\sqrt{x}}dx$.

Тема: «Решение дифференциальных уравнений»

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную **x**, искомую функцию **y** и её производную (или дифференциал).

Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если входящие в него функции зависят от одного аргумента.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок высшей производной, входящей в него.

Функция, обращающая дифференциальное уравнение в верное тождество, называется решением данного уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, уравнение первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Нахождение частного решения по начальным условиям называется решением задачи Коши.

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

Дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными называется уравнение вида $\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y)$. Для его решения сначала необходимо разделить переменные, а затем обе части уравнения проинтегрировать.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1. $xyy'=1+x^2$.

Решение.

$xyy'=1+x^2$; заменим $y'=\frac{dy}{dx}$, $xy\frac{dy}{dx}=1+x^2$. После разделения переменных, получим: $ydy=\frac{1+x^2}{x}dx$. Проинтегрируем полученное уравнение $\int ydy=\int\frac{1+x^2}{x}dx=\int\frac{dx}{x}+\int xdx$. $\frac{y^2}{2}=\ln|x|+\frac{x^2}{2}+C$ -общее решение дифференциального уравнения.

2. $(1+y)dx-(1-x)dy=0$.

Решение.

$(1+y)dx-(1-x)dy=0$. После разделения переменных, получим: $\frac{dy}{1+y}=\frac{dx}{1+x}$.

Проинтегрируем это уравнение $\int\frac{dy}{1+y}=\int\frac{dx}{1+x}$, откуда $\ln|1+y|=\ln|1+x|+\ln|c|$.

Здесь произвольную постоянную удобнее представить $\ln|c|$. $1+y=(1+x)c$ - общее решение дифференциального уравнения.

3. $(1+x^2)dy-\sqrt{y}dx=0$.

Решение.

$(1+x^2)dy-\sqrt{y}dx=0$. После разделения переменных, получим: $y^{-\frac{1}{2}}dy=\frac{dx}{1+x^2}$.

Общее решение уравнения имеет вид $2\cdot\sqrt{y}=arctgx+c$.

4. $(1+x^2)y'-2xy=0$.

Решение.

$(1+x^2)y'-2xy=0$; $(1+x^2)\frac{dy}{dx}-2xy=0$; $\frac{dy}{y}=\frac{2xdx}{1+x^2}$. После интегрирования получим: $\ln|y|=\ln\left|1+x^2\right|+\ln|c|$. Общее решение данного уравнения имеет вид $y=(x^2+1)c$.

5. $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0$.

Решение.

$e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0$. Разделим переменные: $\frac{e^ydy}{1+e^y}=\frac{2xdx}{1+x^2}$. После интегрирования получим: $\ln\left|1+e^y\right|=\ln\left|1+x^2\right|+\ln|c|$. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $1+e^y=(1+x^2)c$.

Найти частное решение дифференциальных уравнений:

1. $y^2+x^2y'=0$; $y(-1)=1$.

Решение.

$y^2+x^2y'=0$; $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=0$; $-\frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{x^2}$. После интегрирования получим: $y^{-1}=-x^{-1}+c$ (общее решение). Найдём значение произвольной постоянной при заданных начальных условиях и подставим его в общее решение: $c=0$; $y^{-1}=-x^{-1}$, или $y=-x$ -частное решение.

2. $(x+1)^3dy-(y-2)^2dx=0$, $y(0)=4$.

Решение.

$(x+1)^3dy-(y-2)^2dx=0$; $\frac{dy}{(y-2)^2}=\frac{dx}{(x+1)^2}$; $-(y-2)^{-1}=-(x+1)^{-1}-c^{-1}$;

$\frac{1}{y-2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{c}$ -общее решение. Найдём значение произвольной постоянной и подставим его в общее решение: $c=-2$; $\frac{1}{y-2}=\frac{1}{x+1}-2$ - частное решение дифференциального уравнения.

3. $\left(\sqrt{y}+1\right)\cdot\sqrt{x}\cdot y'-y=0$; $y(1)=1$.

Решение.

$\left(\sqrt{y}+1\right)\cdot\sqrt{x}\cdot y'-y=0$; $\left(\sqrt{y}+1\right)\cdot\sqrt{x}\frac{dy}{dx}-y=0$; $\frac{\left(\sqrt{y}+1\right)dy}{y}=\frac{dx}{x}$;

$y^{-\frac{1}{2}}dy+\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$. После интегрирования получим общее решение:

$2\cdot\sqrt{y}+\ln|y|=\ln|x|+c$. Подставив начальные условия, найдём $c=2$. $2\cdot\sqrt{y}+\ln|y|=\ln|x|+2$ - частное решение.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Уравнения вида $\frac{dy}{dx}+f(x)y+\varphi(x)=0$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ функции от x, называются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка. В частном случае $f(x)$ и $\varphi(x)$ могут быть постоянными величинами. Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y=UZ$, где U и Z новые функции от x.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1. $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$.

Решение.

$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$ - это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}-(x+1)^3=0$; здесь $f(x)=-\frac{2}{x+1}$; $\varphi(x)=-(x+1)^3$. Сделаем замену $y=UZ$ и продифференцируем $y'=Z'U+U'Z$, $\frac{dy}{dx}=\frac{dU}{dx}Z+\frac{dZ}{dx}U$ подставим выражение для y и $\frac{dy}{dx}$ в данное уравнение, получим: $\frac{dU}{dx}Z+\frac{dZ}{dx}U-\frac{2UZ}{x+1}=(x+1)^3$; сгруппируем $\frac{dZ}{dx}U+Z\left(\frac{dU}{dx}-\frac{2U}{x+1}\right)=(x+1)^3$. Одну из вспомогательных функций U или Z можно выбирать произвольно; в данном уравнении функцию U можно найти из частного решения дифференциального уравнения $\frac{dU}{dx}-\frac{2U}{x+1}=0$ (ищем одно из частных решений). $\int\frac{dU}{U}=\int\frac{2dx}{x+1}$, $U=(x+1)^2$, $(c=0)$., получим: $(x+1)^2\frac{dZ}{dx}=(x+1)^3$;

$\frac{dZ}{dx}=x+1$;

$Z=\frac{(x+1)^2}{2}+C$. Зная U и Z, получим общее решение: $y=UZ=(x+1)^2\left(\frac{(x+1)^2}{2}+c\right)$.

2. $y'-y\cdot ctgx=\sin x$.

Решение.

$y'-y\cdot ctgx=\sin x$. Сделаем замену $y=UZ$ и $\frac{dy}{dx}=\frac{dU}{dx}Z+\frac{dZ}{dx}U$

$U\frac{dZ}{dx}+Z\frac{dU}{dx}-UZctgx=\sin x$; $U\frac{dZ}{dx}+Z\left(\frac{dU}{dx}-Uctgx\right)=\sin x$. Для нахождения U выберем частное решение уравнения $\frac{dU}{dx}-Uctgx=0$ при $C=0$: $U=\sin x$;

$\sin x\frac{dZ}{dx}=\sin x$; $dZ=dx$; $Z=x+C$; $y=\sin x(x+C)$.

3. $y'+2xy=2x^2e^{-x^2}$.

Решение.

$y'+2xy=2x^2e^{-x^2}$. Сделаем замену $y=UZ$ и $\frac{dy}{dx}=\frac{dU}{dx}Z+\frac{dZ}{dx}U$:

$\frac{dZ}{dx}U+\frac{dU}{dx}Z+2xUZ=2x^2e^{-x^2}$; $\frac{dZ}{dx}U+Z\left(\frac{dU}{dx}+2xU\right)=2x^2e^{-x^2}$; $\frac{dU}{dx}+2xU=0$;

$\frac{dU}{U}=-2xdx$: $\ln|U|=-x^2$;

$U=e^{-x^2}$; $\frac{dZ}{dx}\cdot e^{-x^2}=2x^2e^{-x^2}$; $Z=\frac{2}{3}x^3+C$; $y=e^{-x^2}\left(\frac{2}{3}x^3+C\right)$.

4. $\cos xdy+y\sin xdx=dx; y=1; x=0$. Найти частное решение дифференциального уравнения.(разделить на $\cos xdx$).

Неполные дифференциальные уравнения второго порядка.

Общий вид дифференциального уравнения второго порядка $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x;y;\frac{dy}{dx})$. Общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две постоянные.

Найти общее решение дифференциальных уравнений второго порядка:

1. $\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x$.

Решение.

$\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x$. Сделаем замену $\frac{dy}{dx}=Z$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\sin x$; $\frac{dZ}{dx}=\sin x$; $dZ=\sin xdx$;

$Z=-\cos x+C_1$; $\frac{dy}{dx}=-\cos x+C_1$; $dy=(-\cos x+C_1)dx$; $y=-\sin x+C_1x+C_2$.

Найти частное решение дифференциальных уравнений:

1. $\frac{d^2y}{dx^2}=12x$; $y=2; x=0; \frac{dy}{dx}=20$.

Решение.

$\frac{d^2y}{dx^2}=12x$; $\frac{dy}{dx}=Z$; $\frac{dZ}{dx}=12x$; $Z=6x^2+C_1$; $y=2x^3+C_1x+C_2$;

$\begin{cases}20=6\cdot 0+C_1\\ 2=2\cdot 0+C_1\cdot 0+C_2\end{cases}$ $C_1=20; C_2=2$. $y=2x^3+20x+2$.

2. $\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}$; $y=\frac{3}{2}; x=0; \frac{dy}{dx}=1$. $\left(y=\frac{1}{2}e^{2x}+1\right)$

3. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x+2}\frac{dy}{dx}$; $y=2; x=2; \frac{dy}{dx}=8$. $\left(y=x^3+4x-10\right)$

Задачи для самостоятельного решения.

1) $(1+x)ydx+(1-y)dy=0; x=y=1$; 2) $x^2dy-y^2dx=0$; 3) $y'=-\frac{1}{x^3y^2}; x=y=1$;

4) $xy'=x^4-1$; 5) $\frac{d^2y}{dx^2}=x; x=y=\frac{dy}{dx}=2$. 6) $(x^2+1)dy=xydx; x=\sqrt{3}; y=2$;

7) $x^3y'=y^3$; 8) $2y'-1+x^2; x=0; y=1$; 9) $\frac{dy}{dx}-x=3^x$;

10) $\frac{d^2y}{dx^2}=6x-4; x=2; y=5; \frac{dy}{dx}=6$.

Тема: Элементы линейной алгебры.

1. Матрицы, виды матриц.

Прямоугольной матрицей порядка $m\times n$ называется таблица из mn чисел

$A=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}...a_{1n}\\ a_{21}a_{22}...a_{2n}\\ ....\\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn}\end{pmatrix}$ с m строками, n столбцами. Сокращённо обозначают $A=\left(a_{ij}\right)_{mn}$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы А; $i; j$-индексы элемента a_{ij}, определяющие положение элемента в таблице: i-номер строки, j-номер столбца, на пересечении которых находится a_{ij}. Если $m=n$, то матрица называется квадратной, а число n называется порядком матрицы. Совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, ... a_{nn}$ образует главную диагональ матрицы, а элементы $a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{n1}$-побочную диагональ.

Нулевой матрицей называют матрицу все элементы, которой равны нулю.

Особую роль на множестве квадратных матриц играет единичная матрица **E**, все элементы которой, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, а на главной диагонали стоят единицы:

$$E = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \end{matrix} \quad .$$

Квадратная матрица B, под главной диагональю которой стоят нули, называется верхнетреугольной; соответственно определяется нижнетреугольная матрица.

$B = \begin{pmatrix} b_{11} b_{12} \ldots b_{1n} \\ 0 .. b_{22} \ldots b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0 .. 0 \ldots b_{nn} \end{pmatrix}$ – верхнетреугольная, а матрица $C = \begin{pmatrix} c_{11} 0 \ldots\ldots 0 \\ c_{21} c_{22} \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_{m1} c_{m2} \ldots c_{mn} \end{pmatrix}$ - нижнетреугольная .

Симметричной называется квадратная матрица A= $(a_{ij})_n$, у которой элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны $a_{ij} = a_{ji} = a_{ij} (i = \overrightarrow{1,n}; j = \overrightarrow{1,n})$. Частным случаем прямоугольной матрицы являются вектор-строка и вектор – столбец. Так, вектор $\vec{c} = (3,0,1,2) \in R^4$ является матрицей порядка 1x4, а вектор $\vec{a} \in R^5$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ - матрица порядка 5x1.

2. *Действия над матрицами.*

На множестве матриц определены следующие операции.

Сложение. Суммой двух матриц $A = (a_{ij})_{m,n}$ и $B = (b_{ij})_{m,n}$ одного порядка называется матрица $C = (c_{ij})_{m,n}$ того же порядка, C=A+B, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n)$.

Из определения следует, что A+B=B+A (коммутативность сложения) и A+(B+C)=(A+B)+C (ассоциативность операции сложения).

<u>Умножение на число.</u> Произведением матрицы $A=(a_{ij})_{m,n}$ на число λ называется матрица $C=(c_{ij})_{m,n}$, где $c_{ij}=\lambda a_{ij}$ (для всех i, j).

Отсюда следует, что общий множитель всех элементов матрицы можно вынести за знак матрицы:

$$A = \begin{matrix} 2 & 4 & -8 \\ -6 & 0 & -4 \end{matrix} = 2 \begin{matrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & -2 \end{matrix}$$

Операция умножения матрицы на число обладает свойствами: а) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$; б) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$, где $\alpha;\beta$-числа.

<u>Транспонирование матрицы</u>. Пусть матрица А порядка 3х4

$$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{matrix}$$

Составим новую матрицу A' по правилу: первую строку матрицы А запишем в первый столбец матрицы A', вторую строку А – во второй столбец A', третью строку А – в третий столбец A', тогда

$$A' = \begin{matrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{matrix}$$ порядок A' равен 4x3.

Такая операция, называется транспонированием матрицы А. Транспонированную матрицу будем обозначать A' или A^{T}. Таким образом, матрица $A'=(a'_{ij})$ порядка $n\times m$ называется транспонированной к матрице А=(a_{ij}) порядка $m\times n$, если $a_{ji}=a'_{ij}$ для всех i, j.

Для квадратной матрицы операция транспонирования равносильна отражению элементов относительно главной диагонали. Очевидно, для симметричной матрицы $A=A'$.

<u>Умножение матриц.</u> а). Произведение матрицы на вектор.

Пусть матрица А имеет порядок $m\times n$ и вектор $\vec{x}\in R^{n}$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

Произведение $A\vec{x}$ есть вектор $\vec{y}\in R^{m}$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix}$$

Для умножения матрицы A на вектор $\vec{x}$ число столбцов матрицы (число n) должно совпадать с числом координат вектора $\vec{x}$, а новый преобразованный вектор $\vec{y} = A\vec{x}$ имеет столько координат, сколько строк у матрицы A, т.е. m.

<u>Пример</u>. Найти произведение матрицы A на вектор $\vec{x}$.

$$A = \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \vec{x} = \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{matrix}$$

<u>Р е ш е н и е.</u>

Заметим, что $\vec{x} \in R^3$, а строки матрицы A – тоже трёхмерные векторы. Результатом $A\vec{x}$ будет вектор $\vec{y}$.

$$A\vec{x} = \vec{y}; \quad \vec{y} = \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix} \quad , \qquad \text{где}$$

$$y_1 = (\vec{a_1}, \vec{x}) = (1, -1, 0)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 4-2+0=2; \quad y_2 = (\vec{a_2}, \vec{x}) = (0, 2, 1)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0+4-4=0;$$

$$y_3 = (\vec{a_3}, \vec{x}) = (1,1,0)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 4+2+0 = 6; \quad y_4 = (\vec{a_4}, \vec{x}) = (-1,0,1)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -4+0-4 = -8.$$

Итак, $\vec{y}$=(2; 0; 6; -8)

б) Умножение квадратных матриц (одного порядка).

Произведением A x B называется квадратная матрица C того же порядка n:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}b_{12}...b_{1n} \\ b_{21}b_{22}...b_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ b_{n1}b_{n2}...b_{nn} \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} c_{11}c_{12}...c_{1n} \\ c_{21}c_{22}...c_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ c_{n1}c_{n2}...c_{nn} \end{pmatrix}$$

Для получения элемента c_{ij} необходимо:

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ ... \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \quad a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}; (i; j = 1, 2..., n).$$

Пример 1.

$$\text{Дано:} \qquad A = \begin{matrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{matrix} \quad ; \; B = \begin{matrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{matrix}$$

Найти произведение матрицы А и В.

Р е ш е н и е.

$$A \cdot B = C = \begin{pmatrix} c_{11} c_{12} c_{13} \\ c_{21} c_{22} c_{23} \\ c_{31} c_{32} c_{33} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = (-1, 2, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 1; \quad c_{12} = (-1, 2, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 5; \quad c_{13} = (-1, 2, 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1;$$

$$c_{21} = (3, 1, -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -7; \; c_{32} = (3, 1, -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -1; \; c_{23} = (3, 1, -1) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 12;$$

$$c_{31} = (2, 1, 2) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 6; \quad c_{32} = (2, 1, 2) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0; \; c_{33} = (2, 1, 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 6.$$

$$\text{Итак, } A \cdot B = \begin{matrix} 1 & 5 & 1 \\ -7 & -1 & 12 \\ 6 & 0 & 6 \end{matrix}$$

Отметим важное свойство умножения матриц. В отличие от умножения чисел результат умножения матриц зависит от порядка сомножителей. *Свойство перестановки сомножителей при умножении матриц отсутствует.* $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пример 2. Пусть $A = \begin{matrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{matrix}$, $B = \begin{matrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{matrix}$, найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$.

Р е ш е н и е.

$$A \cdot B = \begin{matrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{matrix} \quad ; \; B \cdot A = \begin{matrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{matrix} = \begin{matrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{matrix}$$

Матрицы А и В, для которых АВ=ВА, называются **перестановочными.** Произведение чисел равно нулю в том случае, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Произведение матриц не наследует это свойство. Более того, возможно, что $A^2 = A \cdot A = 0$, хотя А не совпадает с 0-матрицей.

3. Ранг матрицы.

Важнейшей характеристикой матрицы является максимальное число её линейно независимых строк (оно равно максимальному числу линейно независимых столбцов). Это общее число называется **рангом** матрицы **А.** Таким образом, $r(A)$-ранг матрицы **А** ($rangA$) совпадает с рангом системы векторов-строк (векторов-столбцов).

Пример. Определить ранг матрицы А= $\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}$.

Первая и вторая строки матрицы линейно независимы, т.к. векторы $\vec{a}_1 = (1,-1,2)$ и $\vec{a}_2 = (0,2,-3)$ не коллинеарны (их координаты не пропорциональны), третья строка матрицы является суммой второй и удвоенной первой: $\vec{a}_3 = (2,0,1)$; $\vec{a}_3 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$. Вектор $\vec{a}_3$ - линейная комбинация векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, тройка векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ линейно зависима. Максимальное число линейно независимых строк матрицы **А** равно двум, ранг $r(A) = 2$.

4. Элементарные преобразования, приведение матрицы к ступенчатому виду.

Рассмотрим матрицу В:

$$\begin{matrix} \underline{-1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \underline{5} & \underline{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Матрицу такого вида называют **ступенчатой.** Элементы -1, 5 и 2 называются угловыми элементами. «Высота» ступеньки всегда равна единице, а длина может быть произвольной.

В ступенчатой матрице строки, содержащие угловые элементы (ненулевые строки), линейно независимы. Ранг ступенчатой матрицы равен числу угловых элементов.

Преобразования, позволяющие привести произвольную матрицу к ступенчатому виду, называются **элементарными.**

Пусть **А** – матрица порядка $m \times n$, её строки $\vec{a}_1, \vec{a}_2 ... \vec{a}_m \in R^n$. Запись $A \to B$

означает, что матрица **B** получена из матрицы **A** элементарными преобразованиями. Матрица **B** остаётся того же порядка, что и матрица **A**, строки её обозначим $\vec{b}_1, \vec{b}_2 ... \vec{b}_n$. Элементарные преобразования, переводящие А в **B**: а) перестановка строк – две строки матрицы **A** меняются местами, а остальные строки не меняются; б) к одной строке матрицы **A** прибавляется другая, умноженная на число λ, остальные строки переписываются в **B** без изменения. Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы. Любую прямоугольную матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду (метод Гаусса).

Пример 1. Привести матрицу **A** к ступенчатому виду, определить ранг матрицы.

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Алгоритм метода Гаусса.

1. «Загоним» в левый верхний угол ненулевой элемент с помощью перестановки строк. Для ручного счета удобно, чтобы этот элемент был равен 1 или -1 (если это возможно). В нашем примере поменяем местами первую и вторую строки.

$$\begin{matrix} \mathbf{-1} & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{matrix}$$

В дальнейшем первую строку менять не будем. Теперь с помощью отмеченного элемента (-1) в левом верхнем углу (назовём его «ведущим») образуем нули в первом столбце под ним. Для этого ко второй строке прибавим первую, умноженную на 2, из третьей строки вычтем первую, а к четвёртой прибавим первую строку:

$$\begin{matrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \end{matrix}$$

В дальнейшем первый столбец (как и первая строка) меняться не будет, их мысленно исключим из преобразований.

2. Алгоритм повторяется для оставшейся части матрицы меньшего порядка (отмечена пунктиром). Меняем местами вторую и третью строки и с помощью нового «ведущего» элемента 1 получим нули во втором столбце второй и третьей строк:

$$\begin{matrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{matrix}$$

Здесь из третьей строки вычли вторую, умноженную на 5, а из четвёртой – вторую, умноженную на 6.

3. Действуя аналогично, получим ступенчатую матрицу

$$\begin{matrix} \mathbf{-1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Угловые элементы - 1, 1, 1, их число равно 3. Число угловых элементов не зависит от способа приведения матрицы к ступенчатому виду. Ранг матрицы равен 3.

<u>Пример 2</u>.

Привести матрицу **А** к ступенчатому виду и определить её ранг.

$$\begin{matrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}$$

1. Поменяем местами первую и вторую строки матрицы:

$$\begin{matrix} \mathbf{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}$$

2. Из элементов второй строки вычитаем соответствующие элементы первой, умноженные на 2; из элементов третьей строки вычитаем элементы первой, умноженные на 4; из элементов последней строки вычитаем соответствующие элементы первой. Первая строка остаётся без изменения:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{-1} & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{matrix}$$

3. «Ведущим» элементом выберём -1. Перепишем без изменения первый столбец, первую и вторую строки матрицы. Из элементов третьей строки вычитаем соответствующие элементы второй, умноженные на 3, из элементов последней строки вычитаем элементы второй, умноженные на 2:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{matrix}$$

Получим вторую «ступеньку». Следующим «ведущим» элементом берём (-2). Оставляем без изменения первые три строки, а из последней строки вычитаем соответствующие элементы третьей.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Сделано три шага методом Гаусса. Последняя матрица имеет ступенчатый вид. Число угловых элементов ступенчатой матрицы равно трём, поэтому $r(A) = 3$.

Пример 3.

Привести матрицу к ступенчатому виду, определить её ранг.

$$A = \begin{matrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \end{matrix}$$

Решение:

$$A = \begin{matrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Ранг матрицы равен двум: $r(A) = 2$.

Задачи для самостоятельного решения.

1). Дана матрица **C** и вектор $\vec{d}$. Используя метод элементарных преобразований Гаусса, определить:

а) ранг матрицы **C**;

б) произведение $C^{t} \cdot \vec{d}$;

в) привести матрицу C к ступенчатому виду.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -15 & 18 \\ 3 & 5 & -4 & 6 \\ 7 & 10 & -1 & 4 \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}$$

2). Дана матрица **C** и вектор $\vec{d}$. Используя метод элементарных преобразований Гаусса, определить:

а) ранг матрицы **C**;

б) произведение $C' \cdot \vec{d}$;

в) привести матрицу С к ступенчатому виду.

1	2	3	-1	2
3	5	4	-2	1
2	3	1	-1	1
3	4	-3	-1	1

3). Дана матрица **C** и вектор $\vec{d}$. Используя метод элементарных преобразований Гаусса, определить:

а) ранг матрицы **C**;

б) произведение $C' \cdot \vec{d}$;

в) привести матрицу С к ступенчатому виду.

1	2	-3	4	1
0	3	-15	18	6
3	5	-4	6	1
7	10	-1	4	-1

5. Определители второго и третьего порядков.

Важной характеристикой квадратной матрицы А порядка n является её определитель.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix}$ -квадратная матрица второго порядка.

Определитель матрицы А- *число, которой ставится в соответствие матрице А и вычисляется по правилу:* $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Обозначение: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}$

Порядок определителя совпадает с порядком матрицы.

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix}$.

Её определитель есть число, вычисленное по правилу:

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} a_{23} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} a_{23} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} a_{22} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix}$$

Минором определителя M_{ij} *<u>называется определитель, составленный из его элементов без перестановок, путём вычеркивания i-ой строки и j-го столбца определителя.</u>*

Алгебраическим дополнением A_{ij} *называется минор*, *взятый со своим знаком, т.е.* $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Определителем матрицы А n-го порядка называется число, полученное разложением по i-ой строке: $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$.

Квадратная матрица называется невырожденной, если её определитель отличен от нуля.

<u>Основные свойства определителей.</u>

1. При умножении всех элементов некоторой строки (столбца) на число определитель исходной матрицы умножается на это число.
2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю, то и определитель равен нулю.
3. При перестановке местами двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.
4. Если две строки (столбца) равны или пропорциональны, то определитель равен нулю.
5. Определитель не меняется при транспонировании матрицы (при замене строк столбцами).
6. Величина определителя не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой, умноженные на некоторое число (элементарное преобразование Гаусса).
7. Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

<u>Пример.</u> Вычислить определитель верхнетреугольной матрицы А.

$$\det A \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Замечание 1. При элементарных преобразованиях Гаусса определитель матрицы может только изменить знак. Поэтому удобно считать определитель матрицы, предварительно приведя её к ступенчатому виду.

Замечание 2. Преобразования Гаусса сводит квадратную матрицу к верхнетреугольному виду, определитель которой равен произведению диагональных элементов. Такой определитель будет отличен от нуля, если все диагональные элементы угловые, т.е. $r(A) = n$, где n - порядок матрицы.

Замечание 3. Если ранг А равен её порядку, то строки матрицы линейно независимы. Таким образом, равенство нулю определителя есть признак линейной зависимости строк матрицы.

Вычисление определителей.

Пример. Для данного определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Найти миноры и алгебраические дополнения элементов $a_{12};a_{32}$. Вычислить определитель, разложив его: а) по элементам первой строки; б) по элементам второго столбца.

Находим: $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -18;\quad M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -20.$

Алгебраические дополнения элементов a_{12} и a_{32} соответственно равны: $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}$=18; $\quad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32}$=20.

а) Вычислим определитель, разложив его по элементам первой строки по формуле $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$.

$$\Delta = -3\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 38;\quad \Delta = 38$$

б) Разложим определитель по элементам второго столбца:
$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42}$.

$$\Delta = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 38;\quad \Delta = 38$$

Задачи для самостоятельного решения.

1). Для данного определителя Δ найти миноры и алгебраические дополнения элементов $a_{22};a_{33}$. Вычислить определитель Δ, разложив его по элементам второй строки; третьего столбца.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2). Для данного определителя Δ найти миноры и алгебраические дополнения элементов $a_{42};a_{31}$. Вычислить определитель Δ, разложив его по элементам четвёртой строки; первого столбца.

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

3). Для данного определителя Δ найти миноры и алгебраические дополнения элементов $a_{32};a_{34}$. Вычислить определитель Δ, разложив его по элементам третьей строки; четвёртого столбца.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

6. Обратная матрица.

Определение, вычисление обратной матрицы.

Матрица B *называется обратной* к матрице A, если выполняются условия $A \cdot B = B \cdot A = E$.

Обратную матрицу к A обозначают A^{-1}.

Ответим на вопрос: любая ли матрица имеет обратную и как вычислить A^{-1}, если она существует?

Теорема. *Матрица A имеет обратную A^{-1} тогда и только тогда, когда A - невырожденная, т.е.* $\det A \neq 0$.

Т.к. $A \cdot A^{-1} = E$, то $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$ и, если существует A^{-1}, то $\det A^{-1} \neq 0; \det A \neq 0$.

Обратная матрица вычисляется по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^{T}$.

Пример. Даны две матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найти: $A^{-1}; A \cdot A^{-1}; A^{-1} \cdot A$.

Обратная матрица A^{-1} матрицы A имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{matrix} A_{11} A_{21} A_{22} \\ A_{12} A_{22} A_{32} \\ A_{13} A_{23} A_{33} \end{matrix}$$, где

$$\det A = \begin{matrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix} = 39 \neq 0$$, т.е. матрица A - невырожденная, и, значит, существует обратная матрица.

После вычисления алгебраических дополнений, находим

$$A^{-1} = \frac{1}{39} \begin{matrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{-8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & \frac{-11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{matrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{matrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \frac{-8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & \frac{-11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} = E$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{39} \begin{matrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Обратная матрица найдена верно.

Задачи для самостоятельного решения.

1). Даны две матрицы А и В. Найти: а) АВ; б) ВА; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

$$A = \begin{matrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

2). Даны две матрицы А и В. Найти: а) АВ; б) ВА; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

$$A = \begin{matrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{matrix}$$

3). Даны две матрицы А и В. Найти: а) АВ; б) ВА; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

$$A = \begin{matrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{matrix}$$

7. Решение систем линейных уравнений по правилам Крамера, матричным способом, методом Гаусса.

Рассмотрим систему из m уравнений с n неизвестными

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

$$A = \begin{array}{c} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{array}$$ – матрица системы уравнений.

$$B = \begin{array}{cc} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} & b_m \end{array}$$ - расширенная матрица системы.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ называют соответственно вектором неизвестных и вектором правой части системы

Если вектор $\vec{b} = 0$, то система называется однородной, если хотя бы один из элементов вектора $\vec{b}$ отличен от 0, то система называется неоднородной.

Система называется совместной (имеет одно решение), если $r(A) = r(B) = m$; если $r(B) > r(A)$ система называется несовместной (решений не имеет): если $r(A) = r(B) = k < m$, то система имеет бесчисленное множество решений.

Пример.

Проверить совместность данной системы уравнений, в случае совместности решить её по формулам Крамера, матричным способом, методом Гаусса. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$

Проверим совместность системы. Найдём ранг матрицы данной системы

$A = \begin{array}{ccc} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{array}$ и ранг расширенной матрицы $B = \begin{array}{cccc} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}$

Для этого умножим первую строку матрицы В на -2 и сложим со второй строкой, затем умножим первую строку на -3 и сложим с третьей строкой, поменяем местами второй и третий столбцы, получим:

$$B = \begin{matrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \end{matrix}$$

Следовательно, $r(A) = R(B) = 3$, система совместна и имеет единственное решение.

а). Решение системы по формулам Крамера.

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{matrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{matrix}; \quad \Delta x_1 = \begin{matrix} b_1a_{12}a_{13} \\ b_2a_{22}a_{23} \\ b_3a_{32}a_{33} \end{matrix}; \quad \Delta x_2 = \begin{matrix} a_{12}b_1a_{13} \\ a_{22}b_2a_{23} \\ a_{31}b_3a_{33} \end{matrix}; \quad \Delta x_3 = \begin{matrix} a_{11}a_{12}b_1 \\ a_{21}a_{22}b_2 \\ a_{31}a_{32}b_3 \end{matrix}$$

$$\Delta = \begin{matrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{matrix} = (4\cdot(-3)-(-1)\cdot(-3))-5(2\cdot(-3)-3\cdot(-3))-(2\cdot(-1)-3\cdot4) = -16$$

$$\Delta x_1 = \begin{matrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -3 \end{matrix} = 3(4\cdot(-3)-(-1)\cdot(-3))-5(2\cdot(-3)-(-7)\cdot(-3))-((-7)\cdot4-2\cdot(-1)) = 64$$

$$\Delta x_2 = \begin{matrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{matrix} = (2\cdot(-3)-(-7)\cdot(-3))-3(2\cdot(-3)-3\cdot(-3))-(2\cdot(-7)-3\cdot2) = -16$$

$$\Delta x_3 = \begin{matrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{matrix} = (4\cdot(-7)-(-1)\cdot2)-5(2\cdot(-7)-3\cdot2)+3(2\cdot(-1)-3\cdot4) = 32$$

$$x_1 = \frac{64}{-16} = -4; \quad x_2 = \frac{-16}{-16} = 1; \quad x_3 = \frac{32}{-16} = -2.$$

б) Решение системы матричным способом.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$$

Запишем данную систему в матричной форме $A\vec{X} = \vec{B}$. Решение системы в матричной форме имеет вид $\vec{X} = A^{-1}\cdot\vec{B}$. Найдем обратную матрицу (она существует, т.к. $\Delta = -16 \neq 0$).

$$A_{11}=\begin{vmatrix}4 & 3\\ -1 & -3\end{vmatrix}=-15;\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}5 & -1\\ -1 & -3\end{vmatrix}=16;\quad A_{31}=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-11;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -3\end{vmatrix}=-3;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -3\end{vmatrix}=0;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-14;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 5\\ 3 & -2\end{vmatrix}=16;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-6.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-16}\begin{vmatrix}-15 & & -11\\ -3 & & 1\\ -14 & & -6\end{vmatrix}$$

Решение системы:

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{-16}\begin{vmatrix}-15 & & -11\\ -3 & & 1\\ -14 & & -6\end{vmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -7\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}(-45+32+77)/(-16)\\ (-9-7)/(-16)\\ (-42+32+42)/(-16)\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

Итак, $x_1=-4$; $x_2=1$; $x_3=-2$.

в) Решение системы методом Гаусса.

$$\begin{cases}x_1+5x_2-x_3=3\\ 2x_1+4x_2-3x_3=2\\ 3x_1-x_2-3x_3=-7\end{cases}$$

Исключим x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого первое уравнение умножим на 2 и вычтем из второго, затем первое уравнение умножим на 3 и вычтем из третьего:

$$\begin{cases}x_1+5x_2-x_3=3\\ -6x_2-x_3=-4\\ -16x_2=-16\end{cases}$$

Из полученной системы находим $x_1=-4$; $x_2=1$; $x_3=-2$.

Пример.

Проверить совместность системы уравнений, в случае совместности, решить её по формулам Крамера.

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=2\\ 3x_1+x_2-3x_3=1\\ 5x_1-2x_2-2x_3=4\end{cases}$$

Для проверки совместности найдем ранги матрицы системы и расширенной матрицы. В расширенной матрице меняем третий и первый столбцы местами, умножаем первую строку на 3 и прибавляем ко второй, умножаем первую строку на 2 и прибавляем к третьей, из второй строки вычитаем третью:

$$B = \begin{matrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 5 & 4 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & 7 \\ 0 & -8 & 9 & 8 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$r(A) = 2$; $r(B) = 3$, следовательно, система несовместна.

Задачи для самостоятельного решения.

1). Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её: а) по формулам Крамера, б) матричным способом, в) методом Гаусса.

а) $\begin{matrix} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{matrix}$ б) $\begin{matrix} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{matrix}$

2). Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её: а) по формулам Крамера, б) матричным способом, в) методом Гаусса.

а) $\begin{matrix} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{matrix}$ б) $\begin{matrix} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4 \end{matrix}$

3). Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её: а) по формулам Крамера, б) матричным способом, в) методом Гаусса.

а) $\begin{matrix} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19 \end{matrix}$ б) $\begin{matrix} 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{matrix}$

Тема: «Решение задач на определение вероятности события с использованием теорем сложения и умножения вероятностей».

Формулы комбинаторики..

- $P_n = n!$ - формула для вычисления числа перестановок, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$;
- а) $A_n^m = \underbrace{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}_{m-\text{сомножителей}}$;
- б) $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ - формулы для вычисления числа размещений, где n - число

всех элементов, m-число элементов в каждой комбинации, $m \le n$.

- $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ - формула для вычисления числа сочетаний, $m \le n$.

Вероятностью события А называется отношение числа m исходов, благоприятствующих наступлению события А, к числу n всех исходов. $P(A)=\dfrac{m}{n}$. По определению $0 \le P(A) \le 1$.

Теоремы сложения и умножения вероятностей.

1. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий : $P(A+B)=P(A)+P(B)$.
2. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице: $P(A)+P(\overline{A})=1$.
3. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.
4. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$.

Пример 1.

Вычислить: $C_{15}^{13}+A_6^3-P_4$.

Решение.

$$\frac{15!}{13!(15-13)!}+\frac{6!}{(6-3)!}-4!=\frac{15\cdot 14\cdot 13!}{13!2!}+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!}-1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=105+120-24=201$$

Пример 2.

Решить уравнение: $A_n^5=30A_{n-2}^4$

Решение.

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=30(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$;

$n^2-n=30n-150$; $n_1=6$; $n_2=25$

Задача 1.

Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятности попадания в круг и кольца соответственно равны 0,2; 0,15; 0,1. Найти вероятность промаха.

Решение.

Пусть $A_1;A_2;A_3$-попадания в круг и кольца, события несовместны. Событие $A=A_1+A_2+A_3$-попадание в мишень, $P(A)=0.2+0.15+0.1=0.45$. Событие $\overline{A}$-промах (противоположное событию A). Вероятность промаха: $P(\overline{A})=1-0,45=0,55$

Задача 2.

Два стрелка для которых вероятности попадания в мишень соответственно равны 0,7 и 0,8, производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

Решение.

События попадания A_1 и A_2 соответственно первым и вторым стрелком независимы и совместны. Вероятность попадания хотя бы одного из них определится: $P(A)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$=0,7+0,8-0,7·0,8=0,94

Задача3.
В группе 25 студентов, из них отлично учатся 5 человек, хорошо – 12, удовлетворительно -6, слабо- 2. Преподаватель, не знакомый с группой, вызывает по списку одного из студентов, найти вероятность того, что он окажется или отличником, или хорошистом.

Решение.
Вероятность того, что вызванный студент окажется отличником равна $P(A_1)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$. Вероятность того, что он хорошист $P(A_2)=\frac{12}{25}$. Вероятность того, что он либо отличник, либо хорошист $P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{1}{5}+\frac{12}{25}=\frac{17}{25}$.

Задача 4.
Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 5, либо и тому и другому одновременно. [0,4]

Задача 5.
Три стрелка стреляют по мишени, вероятности попадания в цель для первого, второго и третьего стрелков соответственно равны 0,75; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что все они одновременно попадут в цель. [0,54]

Задача 6.
В ящике 12 деталей, из них 8 стандартных. Рабочий берёт наудачу одну за другой две детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными. [0,424]

Тема: Дискретная случайная величина, закон её распределения. Дисперсия, математическое ожидание.

Случайной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, но обязательно одно. При многократном проведении опыта в неизменных условиях в общем случае будут получены различные значения случайной величины. Случайные величины делятся на прерывные (или дискретные) и непрерывные.

Дискретной случайной величиной называют такую случайную величину, множество возможных значений которой либо конечное, либо счётное (число студентов, число пасмурных дней в году).

Закон распределения дискретной случайной величины - это соответствие между значениями случайной величины и их вероятностями (закон распределения ДСВ- это функция, связывающая значения случайной величины с соответствующими ей вероятностями). Задаётся в виде таблицы.

x_i	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_{n-1}	p_n

Понятие *математического ожидания и дисперсии* относятся к числовым характеристикам случайной величины.

Математическое ожидание дискретной случайной величины находится как сумма произведений всех её возможных значений x_i на их вероятности p_i: $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$

Разность $x - M(X)$ называют отклонением случайной величины от её математического ожидания.

Дисперсия- это мера рассеяния (отклонение от среднего) значений случайной величины относительно её математического ожидания.

Дисперсией $D(X)$ дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания: $D(X) = M(X - M(X))^2$.

Средне квадратичным отклонением случайной величины называется величина, вычисляемая по формуле: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Пример 1. Задан закон распределения дискретной случайной величины X.

x_i	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. 1) $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4$; $M(X) = 0,9$

2) Вычислим отклонения и их квадраты.

x_i	-1	0	1	2
$x_i - M(X)$	-1,9	-0,9	0,1	1,1
$(x_i - M(X))^2$	3,61	0,81	0,01	1,21
p_i	0,2	0,1	0,3	0,4

$D(X) = 3,61 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,81 + 0,3 \cdot 0,01 + 0,4 \cdot 1,21 = 1,29$

Пример 2. Дискретная случайная величина задана законом распределения

x_i	6,5	7,2	8,4	9,1
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

Найти : $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$.

Пример 3. Найти $M(X)$ и $D(X)$, если

x_i	-3	-7	1	2
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Демонстрационный вариант экзаменационного билета

Экзаменационный билет № по математике.

1. Матрицы, виды матриц. Действия над матрицами. Транспонированная матрица, обратная матрица.
2. Задан закон распределения дискретной случайной величины X. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение.

X	6	10	16	20	26	30
P	0,2	0,2	0,1	0,3	0,1	0,1

3. Найти частное решение дифференциального уравнения:

$y' = 1 + \cos x$. $x = \pi; y = 0$

Преподаватель:

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
ФГБОУ ВО
«Тульский государственный университет»
Технический колледж им. С.И. Мосина

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

МАТЕМАТИКА

по специальностям СПО

23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (по видам).
23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования (по отраслям).

2022

УТВЕРЖДЕНЫ

цикловой комиссией естественнонаучных дисциплин

Протокол от «13» 01 2022 № 6

Председатель цикловой комиссии ______________ Е.А. Рейм

Тема: *Вычисление пределов. Теоремы о пределах.*

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c; (c - const)$

2. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$;

4. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$;

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}$; если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) \neq 0$.

6. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\varphi(x)} = (\lim\limits_{x\to a} f(x))^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}$.

"Замечательные пределы"

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{\sin x} = 1$;   2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

<u>Отработка техники вычисления пределов.</u>

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3} = \dfrac{5\cdot 4+2}{2\cdot 4+3} = 2$;

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+2x}{3x-8} = \dfrac{3^3+2\cdot 3}{1} = 33$;

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5}{3x-12}$

Здесь предел знаменателя равен нулю, поэтому теорему о пределе частного применить нельзя. Так как $\lim\limits_{x\to 4}(3x-12) = 0$, то 3x-2 при $x \to 4$ есть величина бесконечно малая, а обратная ей величина $\dfrac{1}{3x-12}$ бесконечно большая. Поэтому, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5}{3x-12} = \infty$.

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$

Здесь пределы числителя и знаменателя при $x \to 3$ равны нулю, т.е. получили неопределённость $\dfrac{0}{0}$. Однако, из этого не следует, что данная функция не имеет предела. Разложим на множители числитель и знаменатель, чтобы сократить дробь на общий множитель, стремящийся к нулю.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{3x(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x-2}{3x} = \frac{3-2}{3\cdot 3} = \frac{1}{9}.$$

5. $\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{\sqrt{x+4}-4}{x-12}$

При $x \to 12$ получим неопределённость $\frac{0}{0}$. Умножим числитель и знаменатель на сопряжённый числителю множитель $\sqrt{x+4}+4$:

$$\lim_{x \to 12} \frac{\sqrt{x+4}-4}{x-12} = \lim_{x \to 12} \frac{(\sqrt{x+4}-4)(\sqrt{x+4}+4)}{(x-12)(\sqrt{x+4}+4)} =$$

$$\lim_{x \to 12} \frac{x+4-16}{(x-12)(\sqrt{x+4}+4)} = \lim_{x \to 12} \frac{x-12}{(x-12)(\sqrt{x+4}+4)} = \lim_{x \to 12} \frac{1}{\sqrt{x+4}+4} = \frac{1}{8}.$$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+x^3}{x^3+2x^4}$

Пределы числителя и знаменателя при $x \to \infty$ - бесконечно большие величины, получим неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на наивысшую степень аргумента, т.е. на x^4.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+x^3}{x^3+2x^4} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+2} = \frac{0+0}{0+2} = 0.$$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x+5}{2}$; 8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{5x+3x^2}$; 9. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{9x^2}{5x^3+6x^4}$; 10. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2+3x+2}{x+1}$;

11. $\lim\limits_{x \to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$; 12. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$; 13. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{2x}$;

14. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7}{2x^2+x}$; 15. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+x}{2x}$; 16. $\lim\limits_{x \to \infty}(\frac{1+2x^2}{x^2+2x}-\frac{3x}{5x-1})$;

17. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{3x}$; 18. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}$; 19. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x}$;

20. $\lim\limits_{x \to \infty}(1+\frac{3}{x})^x$; 22. $\lim\limits_{x \to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}$; 23. $\lim\limits_{x \to \infty}(\frac{x}{x+1})^x$.

Тема: «Производная и её приложение».

Основные правила дифференцирования.

$(U+V-W)'=U'+V'-W'$ - производная алгебраической суммы функций.

$(UV)'=U'V+V'U$ - производная произведения

$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-V'U}{V^2}$ - производная частного.

Формулы дифференцирования.

1. $(C)' = 0$

2. $(x)' = 1$

3. $(x^n)' = nx^{n-1}$

4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $(e^x)' = e^x$

6. $(a^x)' = a^x \ln a$

7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

9. $(\sin x)' = \cos x$

10. $(\cos x)' = -\sin x$

11. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

16. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Найти производные следующих функций:

1. $y = \sqrt{x} \cdot \cos x$.

- $y' = (\sqrt{x} \cdot \cos x)' = (\sqrt{x})' \cos x + (\cos x)' \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x - \sin x \sqrt{x}$.

2. $y = \frac{3^x - 4}{x^{-3}}$.

- $y' = \left(\frac{3^x - 4}{x^{-3}}\right)' = \frac{(3^x - 4)' x^{-3} - (x^{-3})' \cdot (3^x - 4)}{(x^{-3})^2} = \frac{3^x \ln 3 x^{-3} + 3x^{-4} \cdot (3^x - 4)}{x^{-6}}$.

3. $y = tgx - \sqrt{4} + x^{\frac{1}{3}} - \log_4 x$.

- $y' = (tgx - \sqrt{4} + x^{\frac{1}{3}} - \log_4 x)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{x \ln 4}$.

Производные сложных функций.

Функция $y = f(U)$, где $U = f(x)$, называется сложной функцией, U-промежуточный аргумент.

Производная сложной функции $y' = f'(u) \cdot U'(x)$

Найти производные следующих функций:

1. $y = (x^2 - 6x + 4)^7$.

- $y' = 7(x^2 - 6x + 4)^6 \cdot (x^2 - 6x + 4)' = 7(x^2 - 6x + 4)^6 \cdot (2x - 6)$.

1. $y = \cos(5x^3 - 4)$.

- $y' = -\sin(5x^3 - 4) \cdot (5x^3 - 4)' = -\sin(5x^3 - 4) \cdot 15x^2$.

2. $y = \sqrt{x^3 - 2x}$.

- $y' = \frac{(x^3-2x)'}{2\sqrt{x^3-2x}} = \frac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x}}$.

3. $y = \ln\sin x$.

- $y' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx$.

4. $y = 4^{\sqrt{x}}$.

- $y' = 4^{\sqrt{x}}\ln 4\cdot(\sqrt{x})' = 4^{\sqrt{x}}\ln 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Геометрический смысл производной.

Геометрический смысл первой производной состоит в том, что она численно равна тангенсу угла наклона (угловому коэффициенту) касательной, проведённой к графику функции в данной точке.

$$y' = k = tg\alpha$$

Уравнение касательной: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Уравнение нормали: $y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$.

Пример. Составить уравнение касательной и нормали, проведённых к графику функции:

1. $y = x^2 - 4x$ в точке $x_0 = 3$.

Решение.

Найдём y_0: $y_0(3) = 3^2 - 4\cdot 3 = -3$. Угловой коэффициент равен первой производной, вычисленной в данной точке $x_0 = 3$: $k = (x^2 - 4x)' = 2x - 4$; $k(3) = 2\cdot 3 - 4 = 2$. Тогда уравнения касательной и нормали будут иметь вид:

$y + 3 = 2(x - 3)$ -уравнение касательной.

$y + 3 = -\frac{1}{2}(x - 3)$ -уравнение нормали.

2. $y = \ln x$ в точке $x_0 = 1$; 3. $y = 3^x$ в точке $x_0 = 0$.

Порядок исследования функции на экстремум с помощью первой производной.

1. Найти область определения функции.
2. Найти первую производную
3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.
4. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые критические точки делят область определения функции $f(x)$. Если при переходе через критическую точку, знак производной $f'(x)$ поменялся с "-

" на "+" , то в этой точке минимум; если с "+" на "-" , то максимум. Если при переходе через критическую точку знак производной $f'(x)$ не изменился, то экстремума в данной точке нет.

5. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Найти экстремумы функций:

1. $y = x^3 - 3x^2$.

- $D(y): x \in R$.
- $y' = 3x^2 - 6x$.
- $y' = 0$; $3x(x-2) = 0$; $x = 0$ и $x = 2$ - критические точки.
- Определим знак $f'(x)$ в полученных промежутках:

В точке $x = 0$ максимум, в точке $x = 2$ минимум.

- $y_{max}(0) = 0; y_{min}(2) = -4$

2. $y = 2x^4 - x$;
3. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$.

Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости графика функции, точек перегиба.

1. Найти область определения функции.
2. Найти вторую производную $f''(x)$.
3. Найти критические точки второго рода.
4. Исследовать знак второй производной в промежутках, на которые делят критические точки второго рода область определения функции $f(x)$. Если производная $f''(x)$ отрицательна, то график функции на этом промежутке выпуклый, если производная $f''(x)$ положительна, то - вогнутый. Если при переходе через критическую точку знак второй производной поменялся, то она является точкой перегиба графика.
5. Вычислить значения функции в точках перегиба.

Найти точки перегиба.

1. $y = 6x^2 - x^3$

- $D(y): x \in R$;
- $y' = 12x - 3x^2$; $y'' = 12 - 6x$.
- $y'' = 0$; $12 - 6x = 0$; $x = 2$.
-

$x = 2$ - точка перегиба.

- $y(2) = 16$.

2. $y = -\frac{1}{3}x^3 - x$.   3. $y = x^4 - x^2$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти первую производную:

$y = tg^{\frac{1}{3}} 7x$; $y = \sqrt{2x-1}(x^3+8)$; $y = \dfrac{\sqrt{x}+2}{6+x}$.

2. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \ln(5+x)$ в точке $x_0 = 2$.
3. Вычислить приближённо с помощью дифференциала: $y = x^{11}; x = 1{,}021$.
4. Найти точки перегиба графика функции $y = 3x^5 - 5x^3 + 1$.
5. Найти угловой коэффициент касательной, проведённой к графику

функции $y = \dfrac{4x - x^2}{4}$ в точке $x_0 = -2$.

6. Исследовать и построить график функции $y = x^3 + 2x + 4$.

Функции нескольких переменных. Частные производные и полный дифференциал.

Переменная величина z называется функцией двух переменных x и y, если каждой паре допустимых значений x и y соответствует единственное значение z (аналогично определяется функция n переменных).

Функции двух переменных обозначают $z = f(x;y); z = F(x;y)$; и т.п.

Частной производной функции $z = f(x;y)$ по переменной x называется производная этой функции при постоянном значении переменной y; она обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ или z'_x.

Частной производной функции $z = f(x;y)$ по переменной y называется производная по y при постоянном значении переменной x; она обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ или z'_y.

Частная производная функции нескольких переменных по одной переменной определяется как производная этой функции по соответствующей переменной при условии, что остальные переменные считаются постоянными.

Полным дифференциалом функции $z = f(x;y)$ в некоторой точке М ($x;y$) называется выражение $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$, где $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ вычисляются в точке М ($x;y$), а $dx = \Delta x$; $dy = \Delta y$.

Найти частные производные:

1. $z = x^3 + 2xy^2 + 3y^3$

Решение.

Находим частную производную по x при постоянном значении y: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2$. Находим частную производную по y при постоянном значении x: $\frac{\partial z}{\partial y} = 4xy + 9y^2$.

2. $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

3. Вычислить значение частной производной функции $z = \frac{x-y}{x+y}$ в точке М (-2;3).

4. Вычислить полный дифференциал функции $z = x^3 - 2x^2y^2 + y^3$ в точке М(1; 2).

5. Найти частные производные: а) $z = x^3 - 3x^2y + 4x^3y^2 - y^3$; б) $z = \frac{3x}{y}$;

в) $z = \frac{y-3x}{x+4y}$; г) $y = e^{-\frac{x}{y}}$; д) $z = \ln(2x - y)$.

6. Вычислить значения частных производных в заданных точках:

а) $z = \frac{x-2y}{x+y}$ в точке М (2; -1); б) $z = \frac{y}{x} + x$ в точке М (1; -2);

в) $z = e^{\frac{3x}{y}}$ в точке М (1; 1); г) $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке М (2; -2).

7. Вычислить полные дифференциалы функций в заданных точках:

а) $z = \frac{y}{x+y}$ в точке М (2; -1); б) $z = \sin(x^2 + 2y)$ при $x = 1; y = 2; dx = 0{,}1; dy = 0{,}2$;

в) $z = e^{\frac{x}{2y}}$ при $x = 2; y = 1; dx = 0{,}2; dy = 0{,}1$;

г) $z = \ln(2x + y)$ в точке М (1; 0).

Тема: Неопределённый и определённый интегралы, методы вычисления.
Приложения определённого интеграла.

Таблица интегралов.

1. $\int dx = x + C$;
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$;
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$;
4. $\int e^x dx = e^x + C$;
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Вычисление неопределённых интегралов.

1. Найти: $\int (4x^3 + 3x^2 - 2x - 8)dx$.

Решение.

$$\int (4x^3 + 3x^2 - 2x - 8)dx = \int 4x^3 dx + \int 3x^2 dx - \int 2x dx - \int 8 dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 8x + C =$$
$$x^4 + x^3 - x^2 - 8x + C.$$

2. Найти: $\int \frac{3 + 2x - x^2}{x} dx$.

Решение.

$$\int \frac{3 + 2x - x^2}{x} dx = \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{2x}{x} dx - \int \frac{x}{x} dx = 3\int \frac{dx}{x} + 2\int dx - \int x dx = 3\ln x + 2x - \frac{x^2}{2} + C .$$

3. Найти: $\int (2e^x - 3\cos x)dx$.

Решение.

$$\int (2e^x - 3\cos x)dx = 2\int e^x dx - 3\int \cos x dx = 2e^x - 3\sin x + C .$$

4. Найти: $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\cos x} dx = 2\int \sin x dx = -2\cos x + C .$$

Метод подстановки.

1. Найти: $\int \frac{x^2dx}{x^3+4}$.

Решение.

Пусть $x^3+4=t$, откуда $3x^2dx=dt$ и $x^2dx=\frac{dt}{3}$. Тогда

$$\int\frac{x^2dx}{x^3+4}=\int\frac{dt}{3t}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}\ln|t|+C=\frac{1}{3}\ln|x^3+4|+C.$$

2. Найти: $\int\sin^4 x\cos xdx$.

Решение.

Пусть $\sin x=t$, тогда $\cos xdx=dt$.

$$\int\sin^4 xdx=\int t^4dt=\frac{t^5}{5}+C=\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$$

3. Найти: $\int \frac{9e^xdx}{(5-e^x)^3}$.

Решение.

Пусть $5-e^x=t$, откуда $-e^xdx=dt$. Тогда

$$\int\frac{9e^xdx}{(5-e^x)^3}=-9\int\frac{dt}{t^3}=-9\int t^{-3}dt=\frac{9}{2}t^{-2}+C=\frac{9}{2}(5-e^x)^{-2}+C.$$

4. Найти: $\int 7\sin\frac{7}{9}xdx$.

Решение.

Пусть $\frac{7}{9}x=t$, откуда $\frac{7}{9}dx=dt$, $dx=\frac{9}{7}dt$. Тогда

$$\int 7\sin\frac{7}{9}xdx=7\int\sin t\cdot\frac{9}{7}dt=9\int\sin tdt=-9\cos t+C=-9\cos\frac{7}{9}x+C.$$

Вычисление определённого интеграла.

Формула Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

1. Вычислить: $\int\limits_0^2(5x^4+6)dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^2(5x^4+6)dx=5\int\limits_0^2x^4dx+6\int\limits_0^2dx=x^5\Big|_0^2=2^5-6\cdot2=20.$$

2. Вычислить: $\int\limits_0^1\frac{4dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int\limits_0^1\frac{4dx}{1+x^2}=4arctgx\Big|_0^1=4(arctg1-arctg0)=4(\frac{\pi}{4}-0)=\pi.$$

3. Вычислить: $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{4}\sin x dx$.

Решение.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{4}\sin x dx = \frac{3}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = -\frac{3}{4}\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{3}{4}(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{4}.$$

Вычисление определённого интеграла методом подстановки.

1. Вычислить: $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{6x dx}{(x^2-1)^2}$.

Решение.

Пусть $x^2 - 1 = t$, тогда $2x dx = dt$, откуда $x dx = \frac{dt}{2}$. Найдём новые пределы интегрирования: $t_n = 0^2 - 1 = -1; t_e = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}$.

$$\int\limits_{0}^{1/2} \frac{6x dx}{(x^2-1)^2} = 6\int\limits_{-1}^{-\frac{3}{4}} \frac{\frac{dt}{2}}{t^2} = 3\int\limits_{-1}^{-\frac{3}{4}} t^{-2} dt = -3t^{-1}\Big|_{-1}^{-\frac{3}{4}} = -3(-\frac{4}{3}+1) = 1.$$

2. Вычислить: $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$.

Решение.

Пусть $\sin x = t$, тогда $\cos x dx = dt$. Найдём новые пределы интегрирования: $t_n = \sin\frac{\pi}{2} = 1; t_e = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \int\limits_{1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t^2} = \int\limits_{1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^{-2} dt = -t^{-1}\Big|_{1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1).$$

3 Вычислить : $\int\limits_{0}^{1} e^{x+1} dx$.

Решение.

Пусть $x + 1 = t$; тогда $dx = dt$. Найдём новые пределы интегрирования: $t_n = 0 + 1 = 1; t_e = 1 + 1 = 2$.

$$\int\limits_{0}^{1} e^{x+1} dx = \int\limits_{1}^{2} e^t dt = e^t\Big|_{1}^{2} = e^2 - e.$$

Приложения определённого интеграла.

1. Путь, пройденный точкой.

Путь, пройденный точкой за промежуток времени $t_1 \le t \le t_2$ вычисляется по формуле $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt$, где $f(t)$-скорость при прямолинейном движении.

2. Работа переменной силы.

Если переменная сила $F = F(x)$ действует в направлении оси OX , то работа силы на отрезке $a \le x \le b$ вычисляется по формуле: $A = \int\limits_a^b F(x)dx$

3. Площадь криволинейной трапеции.

Площадь криволинейной трапеции,
ограниченной линиями
$y = f(x); x = a; x = b; y = 0$
вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

4. Объём тела вращения.

Объём тела, образованного вращением
криволинейной трапеции вокруг
оси OX, вычисляется по формуле

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислить интегралы:

$$\int (x^2 - 2)^2 x dx; \quad \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}; \quad \int\limits_{2\sqrt{2}}^{4} x\sqrt{x^2 - 7}dx.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^3; x = -1; x = 2; y = 0.$$

3. Найти путь, пройденный телом от начала движения до остановки, если его скорость вычисляется по формуле $v = 6t - 2t^2$ (м/с).

4. Вычислить:

а. $\int (3x^5 - cjsx + 1)dx$; б. $\int \cos 3x dx$; в. $\int \frac{x^{-\frac{1}{2}} + 2}{\sqrt{x}} dx$; г. $\int x \cdot 2^{x^2} dx$; д. $\int \sqrt{\ln x} \frac{dx}{x}$;

е. $\int \frac{\sin t dt}{(2\cos t + 3)^2}$; ж. $\int \frac{3dx}{5\sin^2 x}$; з. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt[4]{2x^5 - 4}}$; и. $\int \frac{2\sqrt{x} + 5}{3\sqrt{x}} dx$.

Тема: «Решение дифференциальных уравнений»

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную **x**, искомую функцию **y** и её производную (или дифференциал).

Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если входящие в него функции зависят от одного аргумента.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок высшей производной, входящей в него.

Функция, обращающая дифференциальное уравнение в верное тождество, называется решением данного уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, уравнение первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Нахождение частного решения по начальным условиям называется решением задачи Коши.

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

Дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными называется уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$. Для его решения сначала необходимо разделить переменные, а затем обе части уравнения проинтегрировать.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1. $xyy' = 1 + x^2$.

Решение.

$xyy' = 1 + x^2$; заменим $y' = \frac{dy}{dx}$, $xy\frac{dy}{dx} = 1 + x^2$. После разделения переменных, получим: $ydy = \frac{1 + x^2}{x}dx$. Проинтегрируем полученное уравнение $\int ydy = \int \frac{1 + x^2}{x}dx = \int \frac{dx}{x} + \int xdx$. $\frac{y^2}{2} = \ln|x| + \frac{x^2}{2} + C$ -общее решение дифференциального уравнения.

2. $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$.

Решение.

$(1+y)dx-(1-x)dy=0$. После разделения переменных, получим: $\frac{dy}{1+y}=\frac{dx}{1+x}$.

Проинтегрируем это уравнение $\int\frac{dy}{1+y}=\int\frac{dx}{1+x}$, откуда $\ln|1+y|=\ln|1+x|+\ln|c|$.

Здесь произвольную постоянную удобнее представить $\ln|c|$. $1+y=(1+x)c$ - общее решение дифференциального уравнения.

3. $(1+x^2)dy-\sqrt{y}dx=0$.

Решение.

$(1+x^2)dy-\sqrt{y}dx=0$. После разделения переменных, получим: $y^{-\frac{1}{2}}dy=\frac{dx}{1+x^2}$.

Общее решение уравнения имеет вид $2\cdot\sqrt{y}=arctgx+c$.

4. $(1+x^2)y'-2xy=0$.

Решение.

$(1+x^2)y'-2xy=0$; $(1+x^2)\frac{dy}{dx}-2xy=0$; $\frac{dy}{y}=\frac{2xdx}{1+x^2}$. После интегрирования получим: $\ln|y|=\ln\left|1+x^2\right|+\ln|c|$. Общее решение данного уравнения имеет вид $y=(x^2+1)c$.

5. $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0$.

Решение.

$e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0$. Разделим переменные: $\frac{e^y dy}{1+e^y}=\frac{2xdx}{1+x^2}$. После интегрирования получим: $\ln\left|1+e^y\right|=\ln\left|1+x^2\right|+\ln|c|$. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $1+e^y=(1+x^2)c$.

Найти частное решение дифференциальных уравнений:

1. $y^2+x^2y'=0$; $y(-1)=1$.

Решение.

$y^2+x^2y'=0$; $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=0$; $-\frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{x^2}$. После интегрирования получим: $y^{-1}=-x^{-1}+c$ (общее решение). Найдём значение произвольной постоянной при заданных начальных условиях и подставим его в общее решение: $c=0$; $y^{-1}=-x^{-1}$, или $y=-x$ -частное решение.

2. $(x+1)^3dy-(y-2)^2dx=0$, $y(0)=4$.

Решение.

$(x+1)^3dy-(y-2)^2dx=0$; $\frac{dy}{(y-2)^2}=\frac{dx}{(x+1)^2}$; $-(y-2)^{-1}=-(x+1)^{-1}-c^{-1}$;

$\frac{1}{y-2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{c}$ -общее решение. Найдём значение произвольной постоянной и подставим его в общее решение: $c=-2$; $\frac{1}{y-2}=\frac{1}{x+1}-2$ - частное решение дифференциального уравнения.

3. $\left(\sqrt{y}+1\right)\cdot\sqrt{x}\cdot y'-y=0$; $y(1)=1$.

Решение.

$\left(\sqrt{y}+1\right)\cdot\sqrt{x}\cdot y'-y=0$; $\left(\sqrt{y}+1\right)\cdot\sqrt{x}\frac{dy}{dx}-y=0$; $\frac{\left(\sqrt{y}+1\right)dy}{y}=\frac{dx}{x}$;

$y^{-\frac{1}{2}}dy+\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$. После интегрирования получим общее решение:

$2\cdot\sqrt{y}+\ln|y|=\ln|x|+c$. Подставив начальные условия, найдём $c=2$. $2\cdot\sqrt{y}+\ln|y|=\ln|x|+2$ - частное решение.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Уравнения вида $\frac{dy}{dx}+f(x)y+\varphi(x)=0$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ функции от х, называются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка. В частном случае $f(x)$ и $\varphi(x)$ могут быть постоянными величинами. Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y=UZ$, где U и Z новые функции от х.

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1. $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$.

Решение.

$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$ - это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}-(x+1)^3=0$; здесь $f(x)=-\frac{2}{x+1}$; $\varphi(x)=-(x+1)^3$. Сделаем замену $y=UZ$ и продифференцируем $y'=Z'U+U'Z$, $\frac{dy}{dx}=\frac{dU}{dx}Z+\frac{dZ}{dx}U$ подставим выражение для y и $\frac{dy}{dx}$ в данное уравнение, получим: $\frac{dU}{dx}Z+\frac{dZ}{dx}U-\frac{2UZ}{x+1}=(x+1)^3$; сгруппируем $\frac{dZ}{dx}U+Z\left(\frac{dU}{dx}-\frac{2U}{x+1}\right)=(x+1)^3$. Одну из вспомогательных функций U или Z можно выбирать произвольно; в данном уравнении функцию U можно найти из частного решения дифференциального уравнения $\frac{dU}{dx}-\frac{2U}{x+1}=0$ (ищем одно из частных решений). $\int\frac{dU}{U}=\int\frac{2dx}{x+1}$, $U=(x+1)^2$, $(c=0)$., получим: $(x+1)^2\frac{dZ}{dx}=(x+1)^3$; $\frac{dZ}{dx}=x+1$;

$Z=\frac{(x+1)^2}{2}+C$. Зная U и Z, получим общее решение: $y=UZ=(x+1)^2\left(\frac{(x+1)^2}{2}+c\right)$.

2. $y'-y\cdot ctgx=\sin x$.

Решение.

$y'-y\cdot ctgx=\sin x$. Сделаем замену $y=UZ$ и $\frac{dy}{dx}=\frac{dU}{dx}Z+\frac{dZ}{dx}U$ $U\frac{dZ}{dx}+Z\frac{dU}{dx}-UZctgx=\sin x$; $U\frac{dZ}{dx}+Z\left(\frac{dU}{dx}-Uctgx\right)=\sin x$. Для нахождения U выберем частное решение уравнения $\frac{dU}{dx}-Uctgx=0$ при $C=0$: $U=\sin x$; $\sin x\frac{dZ}{dx}=\sin x$; $dZ=dx$; $Z=x+C$; $y=\sin x(x+C)$.

3. $y'+2xy=2x^2e^{-x^2}$.

Решение.

$y'+2xy=2x^2e^{-x^2}$. Сделаем замену $y=UZ$ и $\frac{dy}{dx}=\frac{dU}{dx}Z+\frac{dZ}{dx}U$: $\frac{dZ}{dx}U+\frac{dU}{dx}Z+2xUZ=2x^2e^{-x^2}$; $\frac{dZ}{dx}U+Z\left(\frac{dU}{dx}+2xU\right)=2x^2e^{-x^2}$; $\frac{dU}{dx}+2xU=0$; $\frac{dU}{U}=-2xdx$: $\ln|U|=-x^2$;

$U=e^{-x^2}$; $\frac{dZ}{dx}\cdot e^{-x^2}=2x^2e^{-x^2}$; $Z=\frac{2}{3}x^3+C$; $y=e^{-x^2}\left(\frac{2}{3}x^3+C\right)$.

4. $\cos xdy+y\sin xdx=dx; y=1; x=0$. Найти частное решение дифференциального уравнения.(разделить на $\cos xdx$).

Неполные дифференциальные уравнения второго порядка.

Общий вид дифференциального уравнения второго порядка $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x;y;\frac{dy}{dx})$. Общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две постоянные.

Найти общее решение дифференциальных уравнений второго порядка:

1. $\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x$.

Решение.

$\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x$. Сделаем замену $\frac{dy}{dx}=Z$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\sin x$; $\frac{dZ}{dx}=\sin x$; $dZ=\sin xdx$; $Z=-\cos x+C_1$; $\frac{dy}{dx}=-\cos x+C_1$; $dy=(-\cos x+C_1)dx$; $y=-\sin x+C_1x+C_2$.

Найти частное решение дифференциальных уравнений:

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x$; $y = 2; x = 0; \frac{dy}{dx} = 20$.

Решение.

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x$; $\frac{dy}{dx} = Z$; $\frac{dZ}{dx} = 12x$; $Z = 6x^2 + C_1$; $y = 2x^3 + C_1x + C_2$;

$\begin{cases} 20 = 6 \cdot 0 + C_1 \\ 2 = 2 \cdot 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \end{cases}$ $C_1 = 20; C_2 = 2$. $y = 2x^3 + 20x + 2$.

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx}$; $y = \frac{3}{2}; x = 0; \frac{dy}{dx} = 1$. $\left(y = \frac{1}{2}e^{2x} + 1\right)$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x+2}\frac{dy}{dx}$; $y = 2; x = 2; \frac{dy}{dx} = 8$. $\left(y = x^3 + 4x - 10\right)$

Задачи для самостоятельного решения.

1) $(1+x)ydx + (1-y)dy = 0; x = y = 1$; 2) $x^2dy - y^2dx = 0$; 3) $y' = -\frac{1}{x^3y^2}; x = y = 1$;

4) $xy' = x^4 - 1$; 5) $\frac{d^2y}{dx^2} = x; x = y = \frac{dy}{dx} = 2$. 6) $(x^2+1)dy = xydx; x = \sqrt{3}; y = 2$;

7) $x^3y' = y^3$; 8) $2y' - 1 + x^2; x = 0; y = 1$; 9) $\frac{dy}{dx} - x = 3^x$;

10) $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 4; x = 2; y = 5; \frac{dy}{dx} = 6$.

Тема: Элементы линейной алгебры.

1. Матрицы, виды матриц.

Прямоугольной матрицей порядка $m \times n$ называется таблица из mn чисел $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}$ с m строками, n столбцами. Сокращённо обозначают $A = \left(a_{ij}\right)_{mn}$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы А; $i; j$-индексы элемента a_{ij}, определяющие положение элемента в таблице: i-номер строки, j-номер столбца, на пересечении которых находится a_{ij}. Если $m = n$, то матрица называется квадратной, а число n называется порядком матрицы. Совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, ... a_{nn}$ образует главную диагональ матрицы, а элементы $a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{n1}$-побочную диагональ.

Нулевой матрицей называют матрицу все элементы, которой равны нулю.

Особую роль на множестве квадратных матриц играет единичная матрица **E**, все элементы которой, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, а на главной диагонали стоят единицы:

$$E = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{matrix} \quad .$$

Квадратная матрица B, под главной диагональю которой стоят нули, называется верхнетреугольной; соответственно определяется нижнетреугольная матрица.

$B = \begin{pmatrix} b_{11} b_{12} \dots b_{1n} \\ 0 .. b_{22} \dots b_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ 0 .. 0 \dots b_{nn} \end{pmatrix}$ – верхнетреугольная, а матрица $C = \begin{pmatrix} c_{11} 0 \dots\dots 0 \\ c_{21} c_{22} \dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ c_{n1} c_{n2} \dots c_{nn} \end{pmatrix}$ - нижнетреугольная .

Симметричной называется квадратная матрица A= $(a_{ij})_n$, у которой элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны $a_{ij} = a_{ji} = a_{ij} (i = \overrightarrow{1,n}; j = \overrightarrow{1,n})$. Частным случаем прямоугольной матрицы являются вектор-строка и вектор – столбец. Так, вектор $\vec{c} = (3,0,1,2) \in R^4$ является матрицей порядка 1x4, а вектор $\vec{a} \in R^5$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ - матрица порядка 5x1.

2. *Действия над матрицами.*

На множестве матриц определены следующие операции.

Сложение. Суммой двух матриц $A = (a_{ij})_{m,n}$ и $B = (b_{ij})_{m,n}$ одного порядка называется матрица $C = (c_{ij})_{m,n}$ того же порядка, C=A+B, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = 1,2,\dots,m; j = 1,2,\dots,n)$.

Из определения следует, что A+B=B+A (коммутативность сложения) и A+(B+C)=(A+B)+C (ассоциативность операции сложения).

Умножение на число. Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m,n}$ на число λ называется матрица $C = (c_{ij})_{m,n}$, где $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ (для всех i, j).

Отсюда следует, что общий множитель всех элементов матрицы можно вынести за знак матрицы:

$$A = \begin{matrix} 2 & 4 & -8 \\ -6 & 0 & -4 \end{matrix} = 2 \begin{matrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & -2 \end{matrix}$$

Операция умножения матрицы на число обладает свойствами: а) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; б) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, где $\alpha; \beta$ -числа.

Транспонирование матрицы. Пусть матрица А порядка 3х4

$$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{matrix}$$

Составим новую матрицу A' по правилу: первую строку матрицы А запишем в первый столбец матрицы A', вторую строку А – во второй столбец A', третью строку А – в третий столбец A', тогда

$$A' = \begin{matrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{matrix}$$ порядок A' равен 4х3.

Такая операция, называется транспонированием матрицы А. Транспонированную матрицу будем обозначать A' или A^T. Таким образом, матрица $A' = (a'_{ij})$ порядка $n \times m$ называется транспонированной к матрице А= (a_{ij}) порядка $m \times n$, если $a_{ij} = a'_{ji}$ для всех i, j.

Для квадратной матрицы операция транспонирования равносильна отражению элементов относительно главной диагонали. Очевидно, для симметричной матрицы $A = A'$.

Умножение матриц. а). Произведение матрицы на вектор.

Пусть матрица А имеет порядок $m \times n$ и вектор $\vec{x} \in R^n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

Произведение $A\vec{x}$ есть вектор $\vec{y} \in R^m$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix}$$

Для умножения матрицы А на вектор $\vec{x}$ число столбцов матрицы (число n) должно совпадать с числом координат вектора $\vec{x}$, а новый преобразованный вектор $\vec{y} = A\vec{x}$ имеет столько координат, сколько строк у матрицы А, т.е. m.

Пример. Найти произведение матрицы А на вектор $\vec{x}$.

$$A = \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \vec{x} = \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{matrix}$$

Решение.

Заметим, что $\vec{x} \in R^3$, а строки матрицы А – тоже трёхмерные векторы. Результатом $A\vec{x}$ будет вектор $\vec{y}$.

$$A\vec{x} = \vec{y}; \quad \bar{y} = \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{matrix} = \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}, \qquad \text{где}$$

$$y_1 = (\vec{a_1}, \vec{x}) = (1, -1, 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 4-2+0=2; \quad y_2 = (\vec{a_2}, \vec{x}) = (0, 2, 1) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0+4-4=0;$$

$$y_3 = (\vec{a_3}, \vec{x}) = (1,1,0) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 4+2+0 = 6; \quad y_4 = (\vec{a_4}, \vec{x}) = (-1,0,1) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -4+0-4= -8.$$

Итак, $\vec{y}$ =(2; 0; 6; -8)

б) Умножение квадратных матриц (одного порядка).

Произведением А х В называется квадратная матрица С того же порядка n:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}b_{12}...b_{1n} \\ b_{21}b_{22}...b_{2n} \\ .... \\ b_{n1}b_{n2}...b_{nn} \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} c_{11}c_{12}...c_{1n} \\ c_{21}c_{22}...c_{2n} \\ .... \\ c_{n1}c_{n2}...c_{nn} \end{pmatrix}$$

Для получения элемента c_{ij} необходимо:

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ ... \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \quad a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}; (i; j = 1,2..,n).$$

3. Ранг матрицы.

Важнейшей характеристикой матрицы является максимальное число её линейно независимых строк (оно равно максимальному числу линейно независимых столбцов). Это общее число называется **рангом** матрицы **А.** Таким образом, $r(A)$ -ранг матрицы **А** ($rangA$) совпадает с рангом системы векторов-строк (векторов-столбцов).

Пример. Определить ранг матрицы А= $\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}$.

Первая и вторая строки матрицы линейно независимы, т.к. векторы $\vec{a}_1 = (1,-1,2)$ и $\vec{a}_2 = (0,2,-3)$ не коллинеарны (их координаты не пропорциональны), третья строка матрицы является суммой второй и удвоенной первой: $\vec{a}_3 = (2,0,1)$; $\vec{a}_3 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$. Вектор $\vec{a}_3$- линейная комбинация векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, тройка векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ линейно зависима. Максимальное число линейно независимых строк матрицы **А** равно двум, ранг $r(A) = 2$.

4. Определители второго и третьего порядков.

Важной характеристикой квадратной матрицы А порядка n является её определитель.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix}$ -квадратная матрица второго порядка.

Определитель матрицы А- *число, которой ставится в соответствие матрице А и вычисляется по правилу:* $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Обозначение: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}$

Порядок определителя совпадает с порядком матрицы.

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix}$.

Её определитель есть число, вычисленное по правилу:

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} a_{23} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} a_{23} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} a_{22} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix}$$

Минором определителя M_{ij} *называется определитель, составленный из его элементов без перестановок, путём вычеркивания i-ой строки и j-го столбца определителя.*

Алгебраическим дополнением A_{ij} *называется минор*, *взятый со своим знаком, т.е.* $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Определителем матрицы А n-го порядка называется число, полученное разложением по i-ой строке: $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$.

Квадратная матрица называется невырожденной, если её определитель отличен от нуля.

Основные свойства определителей.

1. При умножении всех элементов некоторой строки (столбца) на число определитель исходной матрицы умножается на это число.

2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю, то и определитель равен нулю.

3. При перестановке местами двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

4. Если две строки (столбца) равны или пропорциональны, то определитель равен нулю.

5. Определитель не меняется при транспонировании матрицы (при замене строк столбцами).

6. Величина определителя не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой, умноженные на некоторое число (элементарное преобразование Гаусса).

7. Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Замечание 1. При элементарных преобразованиях Гаусса определитель матрицы может только изменить знак. Поэтому удобно считать определитель матрицы, предварительно приведя её к ступенчатому виду.

Замечание 2. Преобразования Гаусса сводит квадратную матрицу к верхнетреугольному виду, определитель которой равен произведению диагональных элементов. Такой определитель будет отличен от нуля, если все диагональные элементы угловые, т.е. $r(A) = n$, где n - порядок матрицы.

Замечание 3. Если ранг А равен её порядку, то строки матрицы линейно независимы. Таким образом, равенство нулю определителя есть признак линейной зависимости строк матрицы.

5. Обратная матрица.

Определение, вычисление обратной матрицы.

Матрица B *называется обратной* к матрице A, если выполняются условия $A \cdot B = B \cdot A = E$.

Обратную матрицу к A обозначают A^{-1}.

Ответим на вопрос: любая ли матрица имеет обратную и как вычислить A^{-1}, если она существует?

Теорема. *Матрица A имеет обратную A^{-1} тогда и только тогда, когда A - невырожденная, т.е.* $\det A \neq 0$.

Т.к. $A \cdot A^{-1} = E$, то $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$ и, если существует A^{-1}, то $\det A^{-1} \neq 0; \det A \neq 0$.

Обратная матрица вычисляется по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^{T}$.

Пример. Даны две матрицы:

$$A = \begin{matrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

Найти: $A^{-1}; A \cdot A^{-1}; A^{-1} \cdot A$.

Обратная матрица A^{-1} матрицы A имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{matrix} A_{11} A_{21} A_{22} \\ A_{12} A_{22} A_{32} \\ A_{13} A_{23} A_{33} \end{matrix}$$, где

$$\det A = \begin{matrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix} = 39 \neq 0$$, т.е. матрица A - невырожденная, и,

значит, существует обратная матрица.

После вычисления алгебраических дополнений, находим

$$A^{-1} = \frac{1}{39} \begin{matrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{-8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & \frac{-11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{matrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{matrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \frac{-8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & \frac{-11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} = E$$

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{39}\begin{matrix}-8 & 2 & 1\\ 5 & -11 & 14\\ 7 & 8 & 4\end{matrix}\quad\begin{matrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{matrix}=\begin{matrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}$$

Обратная матрица найдена верно.

Задачи для самостоятельного решения.

1). Даны две матрицы А и В. Найти: а) АВ; б) ВА; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

$$A=\begin{matrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{matrix}\qquad B=\begin{matrix}3 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 7\\ 1 & 3 & 2\end{matrix}$$

2). Даны две матрицы А и В. Найти: а) АВ; б) ВА; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

$$A=\begin{matrix}4 & 1 & -4\\ 2 & -4 & 6\\ 1 & 2 & -1\end{matrix}\qquad B=\begin{matrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{matrix}$$

3). Даны две матрицы А и В. Найти: а) АВ; б) ВА; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

$$A=\begin{matrix}-3 & 4 & 2\\ 1 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{matrix}\qquad B=\begin{matrix}1 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 2\\ -4 & 1 & 2\end{matrix}$$

5. *Решение систем линейных уравнений по правилам Крамера, матричным способом, методом Гаусса***.**

Метод Гаусса (последовательного исключения неизвестных).

Сначала немного систематизируем знания о системах линейных уравнений. Система линейных уравнений может:

1) Иметь единственное решение.
2) Иметь бесконечно много решений.
3) Не иметь решений (быть *несовместной*).

Метод Гаусса – наиболее мощный и универсальный инструмент для нахождения решения **любой** системы линейных

***Справка**: рекомендую запомнить **термины** линейной алгебры. **Матрица системы** – это матрица, составленная только из коэффициентов при неизвестных. **Расширенная матрица системы** – это та же матрица системы плюс столбец свободных членов, в данном случае. Любую из матриц можно для краткости называть просто матрицей.*

Существуют следующие элементарные преобразования:

1) **Строки** матрицы **можно переставлять** местами. Например, в рассматриваемой матрице можно безболезненно переставить первую и вторую строки: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & -5 \end{array}\right)$

2) Если в матрице есть (или появились) пропорциональные (как частный случай – одинаковые) строки, то следует **удалить** из матрицы все эти строки кроме одной. Рассмотрим, например матрицу $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right)$. В данной матрице последние три строки пропорциональны, поэтому достаточно оставить только одну из них: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$

3) Если в матрице в ходе преобразований появилась нулевая строка, то ее также следует **удалить**. Рисовать не буду, понятно, нулевая строка – это строка, в которой *одни нули*.

4) Строку матрицы можно **умножить (разделить)** на любое число, отличное от нуля. Рассмотрим, например, матрицу $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 9 & 15 \\ 0{,}5 & 0 & 2{,}5 \end{array}\right)$. Здесь целесообразно первую строку разделить на –3, а вторую строку – умножить на 2: $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 9 & 15 \\ 0{,}5 & 0 & 2{,}5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$. Данное действие очень полезно, поскольку упрощает дальнейшие преобразования матрицы.

5) Это преобразование вызывает наибольшие затруднения, но на самом деле ничего сложного тоже нет. К строке матрицы можно **прибавить другую строку, умноженную на число**, отличное от нуля. 2

Рассмотрим наиболее распространенную ситуацию, когда методом Гаусса требуется решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пример 1

Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Сначала смотрим на левое верхнее число:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Почти всегда здесь должна находиться **единица**. Вообще говоря, устроит и –1 (а иногда и другие числа), но как-то так традиционно сложилось, что туда обычно помещают единицу. Как организовать единицу? Смотрим на первый столбец – готовая единица у нас есть! Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Теперь первая строка у нас останется неизменной до конца решения. Уже легче. Единица в левом верхнем углу организована. Теперь нужно получить нули вот на этих местах:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Нули получаем как раз с помощью «трудного» преобразования. Сначала разбираемся со второй строкой (2, –1, 3, 13). Что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль? Нужно **ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на –2**. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –2: (–2, –4, 2, –18). И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике) сложение, **ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на –2**:

Результат записываем во вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Аналогично разбираемся с третьей строкой (3, 2, –5, –1). Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно **к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на –3**. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –3: (–3, –6, 3, –27). И **к третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на –3**:
Результат записываем в третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на –5 (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на –2, ведь чем меньше числа, тем проще решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль здесь:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

Для этого **к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на –2**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Последнее выполненное действие – причёска результата, делим третью строку на 3.В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ \qquad y - z = 1 \\ \qquad\quad z = 4 \end{cases}$$

Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу вверх.

В третьем уравнении у нас уже готовый результат: $z = 4$

Смотрим на второе уравнение: $y-z=1$. Значение «зет» уже известно, таким образом:

$y-4=1$

$y=5$

И, наконец, первое уравнение: $x+2y-z=9$. «Игрек» и «зет» известны, дело за малым:

$x+2\cdot 5-4=9$

$x+6=9$

$x=3$

Ответ: $x=3, y=5, z=4$

Как уже неоднократно отмечалось, для любой системы уравнений можно и нужно сделать проверку найденного решения, благо, это несложно и быстро.

Пример 2

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-y+2z=6 \\ x+y+5z=-1 \end{cases}$$

Это пример для самостоятельного решения, образец чистового оформления и ответ в конце урока.

Следует отметить, что ваш **ход решения** может не совпасть с моим ходом решения, **и это – особенность метода Гаусса**. Но вот ответы обязательно должны получиться одинаковыми!

Пример 3

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=1 \\ 5x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Смотрим на левую верхнюю «ступеньку». Там у нас должна быть единица. Проблема состоит в том, что в первом столбце единиц нет вообще, поэтому перестановкой строк ничего не решить. В таких случаях единицу нужно организовать с помощью элементарного преобразования. Обычно это можно сделать несколькими способами. Я поступил так:

(1) **К первой строке прибавляем вторую строку, умноженную на –1**. То есть, мысленно умножили вторую строку на –1 и выполнили сложение первой и второй строки, при этом вторая строка у нас не изменилась.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь слева вверху «минус один», что нас вполне устроит. Кто хочет получить +1, может выполнить дополнительное телодвижение: умножить первую строку на –1 (сменить у неё знак).

Дальше алгоритм работает уже по накатанной колее:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 5. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 3.

(3) Первую строку умножили на –1, в принципе, это для красоты. У третьей строки также сменили знак и переставили её на второе место, таким образом, на второй «ступеньке у нас появилась нужная единица.

(4) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 2.

(5) Третью строку разделили на 3.

Скверным признаком, который свидетельствует об ошибке в вычислениях (реже – об опечатке), является «плохая» нижняя строка. То есть, если бы у нас внизу получилось что-нибудь вроде $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 & 23 \end{pmatrix}$, и, соответственно, $11x_3 = 23 \Rightarrow x_3 = \frac{23}{11}$, то с большой долей вероятности можно утверждать, что допущена ошибка в ходе элементарных преобразований.

Заряжаем обратный ход, в оформлении примеров часто не переписывают саму систему, а уравнения «берут прямо из приведенной матрицы». Обратный ход, напоминаю, работает, снизу вверх. Да тут подарок получился:

$x_3 = 1$

$x_2 = 3$

$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1$.

<u>Пример 4</u>

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 18 \\ -7x_1 - 4x_2 - 4x_3 = -11 \\ -6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -15 \end{cases}$$

В последней части рассмотрим некоторые особенности алгоритма Гаусса. Первая особенность состоит в том, что иногда в уравнениях системы отсутствуют некоторые переменные, например:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 + 6 = 0 \\ \quad x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Как правильно записать расширенную матрицу системы?. В расширенной матрице системы на месте отсутствующих переменных ставим нули:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Вторая особенность состоит вот в чём. Во всех рассмотренных примерах на «ступеньки» мы помещали либо –1, либо +1. Могут ли там быть другие числа? В ряде случаев могут. Рассмотрим систему: $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = 9 \\ 6x - 5y + 2z = 17 \end{cases}$.

Здесь на левой верхней «ступеньке» у нас двойка. Но замечаем тот факт, что все числа в первом столбце делятся на 2 без остатка – и другая двойка и шестерка. И двойка слева вверху нас устроит! На первом шаге нужно выполнить следующие преобразования: ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на –1; к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на –3. Таким образом, мы получим нужные нули в первом столбце.

Или еще такой условный пример: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 17 \\ 0 & 12 & 2 & 1 \end{array}\right)$. Здесь тройка на второй «ступеньке» тоже нас устраивает, поскольку 12 (место, где нам нужно получить ноль) делится на 3 без остатка. Необходимо провести следующее преобразование: к третьей строке прибавить вторую строку, умноженную на –4, в результате чего и будет получен нужный нам ноль.

Правило Крамера

А сейчас мы разберём правило Крамера,

Для того чтобы освоить данный параграф Вы должны уметь раскрывать определители «два на два» и «три на три». Сначала мы подробно рассмотрим правило Крамера для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.Дело в том, что пусть иногда, но встречается такое задание – решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными по формулам Крамера. Во-вторых, более простой пример поможет понять, как использовать правило Крамера для более сложного случая – системы трех уравнений с тремя неизвестными.

Кроме того, существуют системы линейных уравнений с двумя переменными, которые целесообразно решать именно по правилу Крамера!

Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = s_1 \\ a_2x + b_2y = s_2 \end{cases}$

На первом шаге вычислим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, его называют *главным определителем системы.*

Если $\Delta = 0$, то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать **метод Гаусса**.

Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, и для нахождения корней мы должны вычислить еще два определителя:

$\Delta_x = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 \\ s_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 \\ a_2 & s_2 \end{vmatrix}$

На практике вышеуказанные определители также могут обозначаться латинской буквой D.

Корни уравнения находим по формулам:

$x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$

Переходим к рассмотрению правила Крамера для системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = s_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = s_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = s_3 \end{cases}$$

Находим главный определитель системы:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Если $D = 0$, то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать **метод Гаусса**.

Если $D \neq 0$, то система имеет единственное решение и для нахождения корней мы должны вычислить еще три определителя:

$$D_1 = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 & c_1 \\ a_2 & s_2 & c_2 \\ a_3 & s_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & s_2 \\ a_3 & b_3 & s_3 \end{vmatrix}$$

И, наконец, ответ рассчитывается по формулам:

$x_1 = \dfrac{D_1}{D}$, $x_2 = \dfrac{D_2}{D}$, $x_3 = \dfrac{D_3}{D}$

Как видите, случай «три на три» принципиально ничем не отличается от случая «два на два», столбец свободных членов $\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}$ последовательно «прогуливается» слева направо по столбцам главного определителя.

<u>Пример 9</u>

Решить систему по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение: Решим систему по формулам Крамера.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= 3 \cdot (-4-2) + 2 \cdot (-3+4) + 4 \cdot (-3-8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0$, значит, система имеет единственное решение.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 21 \cdot (-4-2) + 2 \cdot (-9+20) + 4 \cdot (-9-40) = -126 + 22 - 196 = -300$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-300}{-60} = 5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} - 21 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-9+20) - 21 \cdot (-3+4) + 4 \cdot (30-18) = 33 - 21 + 48 = 60$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{60}{-60} = -1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (40+9) - 3 \cdot (-20+21) + 2 \cdot (-18-84) = 147 - 3 - 204 = -60$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-60}{-60} = 1$$

Ответ: $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = 1$.

Время от времени встречаются системы в уравнениях которых отсутствуют некоторые переменные, например:

$$\begin{cases} 3x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Здесь в первом уравнении отсутствует переменная x_1, во втором – переменная x_3. В таких случаях очень важно правильно и ВНИМАТЕЛЬНО записать главный определитель:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$ – на месте отсутствующих переменных ставятся нули.

Тема: «Решение задач на определение вероятности события с использованием теорем сложения и умножения вероятностей».

Формулы комбинаторики.

- $P_n = n!$ - формула для вычисления числа перестановок, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$;
- а) $A_n^m = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}_{m-\text{сомножителей}}$;
- б) $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ - формулы для вычисления числа размещений, где n-число

  всех элементов, m-число элементов в каждой комбинации, $m \le n$.
- $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ - формула для вычисления числа сочетаний, $m \le n$.

<u>Вероятностью</u> события А называется отношение числа m исходов, благоприятствующих наступлению события А, к числу n всех исходов. P(A)=$\dfrac{m}{n}$. По определению $0 \le P(A) \le 1$.

Теоремы сложения и умножения вероятностей.

1. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий : $P(A+B) = P(A) + P(B)$.
2. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.
3. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.
4. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий

равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$.

Пример 1.

Вычислить: $C_{15}^{13}+A_6^3-P_4$.

Решение.

$$\frac{15!}{13!(15-13)!}+\frac{6!}{(6-3)!}-4!=\frac{15\cdot14\cdot13!}{13!\cdot2!}+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!}-1\cdot2\cdot3\cdot4=105+120-24=201$$

Пример 2.

Решить уравнение: $A_n^5=30A_{n-2}^4$

Решение.

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=30(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$;

$n^2-n=30n-150$; $n_1=6$; $n_2=25$

Задача 1.

Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятности попадания в круг и кольца соответственно равны 0,2; 0,15; 0,1. Найти вероятность промаха.

Решение.

Пусть $A_1;A_2;A_3$-попадания в круг и кольца, события несовместны. Событие $A=A_1+A_2+A_3$-попадание в мишень, $P(A)=0,2+0,15+0,1=0,45$. Событие $\overline{A}$ - промах (противоположное событию A). Вероятность промаха: $P(\overline{A})=1-0,45=0,55$

Задача 2.

Два стрелка для которых вероятности попадания в мишень соответственно равны 0,7 и 0,8, производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

Решение.

События попадания A_1 и A_2 соответственно первым и вторым стрелком независимы и совместны. Вероятность попадания хотя бы одного из них определится: $P(A)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$=0,7+0,8-0,7$\cdot$0,8=0,94

Задача3.

В группе 25 студентов, из них отлично учатся 5 человек, хорошо – 12, удовлетворительно -6, слабо- 2. Преподаватель, не знакомый с группой, вызывает по списку одного из студентов, найти вероятность того, что он окажется или отличником, или хорошистом.

Решение.

Вероятность того, что вызванный студент окажется отличником равна $P(A_1)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$. Вероятность того, что он хорошист $P(A_2)=\frac{12}{25}$. Вероятность того, что он либо отличник, либо хорошист $P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{1}{5}+\frac{12}{25}=\frac{17}{25}$.

Задача 4.

Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 5, либо и тому и другому одновременно. [0,4]

Задача 5.

Три стрелка стреляют по мишени, вероятности попадания в цель для первого, второго и третьего стрелков соответственно равны 0,75; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что все они одновременно попадут в цель. [0,54]

Задача 6.

В ящике 12 деталей, из них 8 стандартных. Рабочий берёт наудачу одну за другой две детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными. [0,424]

Тема: Дискретная случайная величина, закон её распределения. Дисперсия, математическое ожидание.

Случайной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, но обязательно одно. При многократном проведении опыта в неизменных условиях в общем случае будут получены различные значения случайной величины. Случайные величины делятся на прерывные (или дискретные) и непрерывные.

Дискретной случайной величиной называют такую случайную величину, множество возможных значений которой либо конечное, либо счётное (число студентов, число пасмурных дней в году).

Закон распределения дискретной случайной величины - это соответствие между значениями случайной величины и их вероятностями (закон распределения ДСВ- это функция, связывающая значения случайной величины с соответствующими ей вероятностями). Задаётся в виде таблицы.

x_i	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_{n-1}	p_n

Понятие *математического ожидания и дисперсии* относятся к числовым характеристикам случайной величины.

Математическое ожидание дискретной случайной величины находится как сумма произведений всех её возможных значений x_i на их вероятности p_i: $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n$

Разность $x - M(X)$ называют отклонением случайной величины от её математического ожидания.

Дисперсия- это мера рассеяния (отклонение от среднего) значений случайной величины относительно её математического ожидания.

Дисперсией $D(X)$ дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания: $D(X) = M(X - M(X))^2$.

Средне квадратичным отклонением случайной величины называется величина, вычисляемая по формуле: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Пример 1. Задан закон распределения дискретной случайной величины X.

x_i	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. 1) $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4$; $M(X) = 0,9$

2) Вычислим отклонения и их квадраты.

x_i	-1	0	1	2
$x_i - M(X)$	-1,9	-0,9	0,1	1,1
$(x_i - M(X))^2$	3,61	0,81	0,01	1,21
p_i	0,2	0,1	0,3	0,4

$D(X) = 3,61 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,81 + 0,3 \cdot 0,01 + 0,4 \cdot 1,21 = 1,29$

Пример 2. Дискретная случайная величина задана законом распределения

x_i	6,5	7,2	8,4	9,1
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

Найти : $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$.

Пример 3. Найти $M(X)$ и $D(X)$, если

x_i	-3	-7	1	2
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Демонстрационный вариант экзаменационного билета

Экзаменационный билет №   по математике.

1. Матрицы, виды матриц. Действия над матрицами. Транспонированная матрица, обратная матрица.
2. Задан закон распределения дискретной случайной величины X. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение.

X	6	10	16	20	26	30
P	0,2	0,2	0,1	0,3	0,1	0,1

3. Найти частное решение дифференциального уравнения:

$y' = 1 + \cos x$, $x = \pi; y = 0$

Преподаватель:

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ГОСТ 2.105-95 ЕСКД. Общие требования к текстовым документам.

Основные источники:

1. Богомолов, Н. В. Математика [Электронный ресурс] : учебник для СПО / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 396 с. — (Серия : Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-02325-1. - Режим доступа : https://biblio-online.ru/book/D4B1DE57-5DCA-464F-9D73-2B57AACBD299 , по паролю

2. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1[Электронный ресурс] : учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 285 с. — (Серия : Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01899-8. – Режим доступа: https://biblio-online.ru/book/B07366AD-07E3-4D69-BC1F-0F55B6C1A25F , по паролю

3. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 2[Электронный ресурс] : учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 217 с. — (Серия : Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01901-8. https://biblio-online.ru/book/A5018513-898C-467C-8AA8-B6A7FF2F5548

Дополнительные источники:

1. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 частях. Ч.1. Учебное пособие для ВУЗов . /П.Е. Данко; А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова.-
7-е изд-М.: Издательский дом "ОНИКС 21 век": Мир и Образование, 2017 . Интернет-сайт: http://for-um.ru.

2.Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 частях. Ч.2. Учебное пособие для ВУЗов . /П.Е. Данко; А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова.-
7-е изд-М.: Издательский дом "ОНИКС 21 век": Мир и Образование, 2017. Интернет-сайт http://for-um.ru.

Интернет-источники:

1. Электронный читальный зал “БИБЛИОТЕХ” : учебники авторов ТулГУ по всем дисциплинам.- Режим доступа: https://tsutula.bibliotech.ru/, по паролю.- Загл. С экрана.

2. ЭБС IPRBooks универсальная базовая коллекция изданий.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/, по паролю.- .- Загл. с экрана.

3. Научная Электронная Библиотека eLibrary – библиотека электронной периодики, режим доступа: http://elibrary.ru/ , по паролю.- Загл. с экрана.

4. НЭБ КиберЛенинка научная электронная библиотека открытого доступа, режим доступа http://cyberleninka.ru/ ,свободный.- Загл. с экрана.

5. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа :http: //window.edu.ru. -Загл. с экрана.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО
«ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИМ. С.И.МОСИНА

МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА»

Для специальности

«Организация перевозок и управление на транспорте (по видам)»

ТУЛА
2022

Утверждено:
на заседании цикловой комиссии
общепрофессиональных дисциплин
Председатель цикловой комиссии
______________ Овчинникова А.Я.
«13» января 2022 г. протокол № 6

Практические работы по инженерной графике развивают пространственное воображение студентов. Наибольший эффект изучения курса может быть достигнуто при выполнении студентами индивидуальных заданий, которые способствуют развитию у студентов самостоятельной работы с использованием учебной и справочной литературы.

Графическое оформление заданий направлено на развитие у студентов образного мышления. Основную работу по выполнению индивидуальных заданий необходимо проводить в аудитории под контролем преподавателя. Это ускорит усвоение изучаемого материала и повысит качество выполняемых графических работ.

К выполнению задания студенты должны приступить после предварительной проработки соответствующего материала по учебной литературе, методическим рекомендациям или после объяснений преподавателем особенностей изучаемого материала. Для четкого выполнения графического задания можно воспользоваться методическими указаниями, поясняющими содержание и выполнение задания.

Далее предложены методические указания к графическим работам по разделам.

СОДЕРЖАНИЕ

Практическая работа № 9
Выполнение рабочих чертежей деталей по сборочному чертежу.
Практическая работа № 10
Построение диаграмм и графиков.

Практическая работа (Упражнение)

Тема 1.1 Системы автоматизированного проектирования на персональных компьютерах	Системы автоматизированного проектирования на персональных компьютерах
Цель работы:	*уметь:* использовать САПР для выполнения графических работ *знать*: преимущества использовании САПР для выполнения чертежей. *формировать общие и профессиональные компетенции:* стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства; использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

Для создания нового чертежа открыть в Строке меню:

1.Файл–Создать–Лист или нажать кнопку Новый лист на Панели управления.

2.Щелчком на кнопке Показать все на Панели управления изменить масштаб отображения документа, чтобы увидеть его целиком.

3.Меню Настройка–Параметры текущего листа–Параметры листа–Формат

Выбрать нужный формат.

4.Для стиля основной надписи щёлкнуть на команде Оформление.

5.Щёлкнуть на кнопке раскрытия списка стилей. Найти и выбрать из списка нужный стиль Чертёж конструкторский...

6.Настройка параметров документа закончена. Щелчком ОК закрыть диалоговое окно.

7.Файл –Сохранить как. В диалоговом окне набрать имя файла Проба и Сохранить.

8.В диалоговом окне Информация о документе заполнить 2 текстовых окна: Автор

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Методические указания		
Разраб.		БондарьР.В.			Проба	Лит.	Лист 1 / Листов 5
Пров.						ТАКТС	
Н.контр.							
Утв.							

Копировал Формат А4

и Комментарий.

9.Нажать кнопку Сохранить документ.

10.Меню Компоновка-Создать вид.
В диалоговом окне создать вид 1, масштаб 1:1 имя файла Главный вид. Нажать ОК.

11.На эране появился курсор в виде символа начала координат. Щелчком ЛКМ ближе к левой стороне формата расположим точку начала координат.

12.На экране появился системный символ начала координат.

13.Подключить сетку.

14.Меню Увеличить масштаб. Теперь можно приступать к вычерчиванию чертежа детали.

15.На странице Геометрические построения включить кноку Отрезок.

16.Изменить стиль линии на Осевую.

17.Зафиксируем точку +1 командой <Ctrl>+0 +<Enter>. Клавишей Вправо строим осевую на 105мм +<Enter>. Команда Stop.

18.Установим стиль линии на Основную.

19.На странице Геометрия включить кнопку Непрерывный контур.

20.Зафиксируем точку +1 командой<Ctrl>+0

Инв. № подл. | Подп. и дата | Взам. инв. № | Инв. № дубл. | Подп. и дата

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Методические указания	Лист 2

+<Enter>.

21.Строим контур детали.

22.Клавишей Вверх ведём на 25 +<Enter>.

23.Клавишей Вправо ведём на 50 +<Enter>.

24.Клавишей Вверх ведём на 25 +<Enter>

25.Клавишей Вправо ведём на 50 +<Enter>.

26.Клавишей Вниз ведём на 50 +<Enter> до осевой линии.

27.Строим фаски. Включить команду Фаски Ввести значения 2,5. Мишенью щёлкнуть на линиях ближе к месту построения фасок. Команда Stop.

28.Достраваем вертикальные линии.Включить команду Отрезок, зафиксировать точку +1 +<Enter> Клавишей Вниз строим вертикальные линии до осевой. Команда Stop.

29.Верхняя половина детали полностью построена. Нижнюю половину получим с помощью команды Симметрия.

30.Команда Выделить–Секущей рамкой выделить верхнюю половину детали за исключением осевой линии. Команда Stop.

31.На странице Редактирование Инструментальной панели нажать кнопку Симметрия.

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Методические указания	Лист 3

Инв. № подл. | Подп. и дата | Взам. инв. № | Инв. № дубл. | Подп. и дата

32.Нажать кнопку Выбор объекта на Панели специального управления.

33.Указать мишенью на горизонтальную ось симметрии детали в любой её точке – система выполнила построение симметричного изображения. Щёлкнуть на кнопку Stop. Снять выделение с объектов, щёлкнув ЛКМ на свободном поле чертежа.

34.Нажать кнопку Обновить изображение.

35.Кнопка Сохранить документ.

36.На странице Размеры и технологические обозначения включить кнопку Линейный размер.

37.На чертеже нанести размеры. В конце команда Stop.

38.Удлиним осевую. Щелчком мыши выделить осевую. Подвести мышкой к краю осевой, образуется крест, нажать <Enter> и клавишей вправо удлинить осевую на 3мм. Затем также влево.

39.Снять выделение щелчком мыши на свободном поле чертежа. Команда Обновить изображение.

40.Команда Сохранить документ.

41.Команда Компоновка–Шероховатость

Подп. и дата | Инв. № дубл. | Взам. инв. № | Подп. и дата | Инв. № подл.

поверхности.Ввод.

4.2.Команда Компоновка–Технические требования. Ввод.

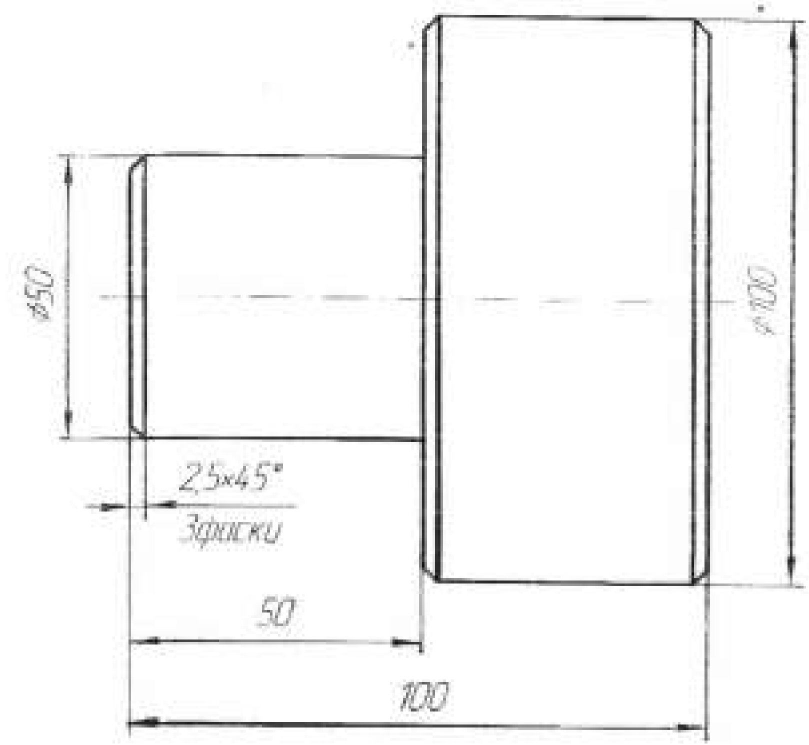
4.3.Команда Компоновка–Основная надпись.

4.4.Включить кнопку Просмотр для печати.

4.5.Вывод на принтер.

ТМКЧ 010101000

6,3



$H14,\ h14,\ \pm\frac{IT14}{2}$

Перв. примен. | Справ. № | Подп. и дата | Инв. № дубл. | Взам. инв. № | Подп. и дата | Инв. № подл.

Изм	Лист	№ докум	Подп	Дата	ТМКЧ 01.01.01.000
Разраб		Бондарь Р.В			Проба
Пров					Лит: У · Масса: 0,25 · Масштаб: 1:1
Т.контр					Лист 1 · Листов 1
Н.контр					Ст.3 ГОСТ380-94
Утв					ТАКТС

Копировал   Формат А4

Практическая работа (Упражнение)

Тема 1.2 Общие сведения о Чертежно-графическом Редакторе «КОМПАС»	Общие сведения о чертежно-графическом редакторе «КОМПАС»
Цель работы:	*уметь:* использовать элементы интерфейса *знать:* назначение основных элементов интерфейса: заголовок окна, главного меню, инструментальной и компактной панелей, панели свойств, строки сообщений, дерева построений. *формировать общие и профессиональные компетенции:* стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства; использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

Для создания нового чертежа открыть в **Строке меню**:
1.**Файл–Создать–Лист** или кнопку **Новый лист** на Панели управления.
2.Щелчком на кнопке **Показать всё** на Панели управления изменить масштаб отображения документа , чтобы увидеть его целиком.
3.Меню **Настройка–Параметры текущего листа–Параметры листа–Формат**. Выбрать нужный формат.
4.Для стиля основной надписи щелкнуть на команде **Оформление**.
5.Щелкнуть на кнопке раскрытия списка стилей. Найти и выбрать из списка нужный стиль **Чертёж конструкторский**...
6.Настройка параметров документа закончена.Щелчком **ОК** закрыть диалоговое окно.
7.**Файл–Сохранить как**. В диалоговом окне набрать имя файла **Пластина** и Сохранить.
8.В диалоговом окне **Информация о документе** заполнить 2 текстовых окна: **Автор и Комментарий**.
9.Нажать кнопку **Сохранить документ**.

Создание нового вида.

10.Меню **Компоновка–Создать вид**. В диалоговом окне создать вид 1, масштаб 1:1 , имя файла **Главный вид**.
11.На экране появился курсор в виде символа начала координат. Щелчком ЛКМ ближе к левой стороне формата расположим **точку** начала координат.
12.На экране появился **системный символ начала координат**.
13.Подключить сетку.
14.Меню **Увеличить масштаб**. Теперь можно приступать

Перв. примен. | Справ. № | Подп. и дата | Инв. № дубл. | Взам. инв. № | Подп. и дата | Инв. № подл.

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Методические указания к выполнению детали
Разраб.	Бондарь Р.В.				Пластина
Пров.					Лит. у; Лист 1; Листов 3
Н.контр.					ТАМКТС
Утв.					

Копировал Формат А4

к вычерчиванию чертежа детали.
15.На странице **Геометрические построения** включить кнопку **Непрерывный ввод объектов**.
16.Стиль линии **Основная**.
17.Зафиксируем точку+1 командой <Ctrl>+0 выполним команду +<Enter> появилась точка +2. Мышку не трогаем.
18.Для построения контура детали применим глобальную привязку **Ближайшая точка**.
19.Клавишей вверх ведём на 50мм +<Enter>.
20.Клавишей вправо ведём на 20мм +<Enter>.
21.Клавишей вверх ведём на 40мм +<Enter>.
22.Клавишей вправо ведём на 80мм +<Enter>.
23.Клавишей вниз ведём на 90мм +<Enter>.
24.Клавишей влево ведём на 20мм +<Enter>.
25.Клавишей вверх ведём на 20мм +<Enter>.
26.Клавишей влево ведём на 60мм +<Enter>.
27.Клавишей вниз ведём на 20мм +<Enter>.
28.Клавишей влево ведём на 20мм +<Enter>.
29.Команда **Stop**.
30.Контур детали выполнен.
31.Команда **Ввод горизонтальной линии**. Подвести курсор и нажать **Shift+5**. Клавишей вверх на 50мм +<Enter>.
32.Команда **Ввод вертикальной линии**. Нажать **Shift+5**. Клавишей вправо на 40мм +<Enter>.
33.Команда **Stop**.
34.Команда **Ввод окружности**. Вводим rad 15мм , включить отрисовку осей.
35.С помощью привязки **Пересечение** строим окружность, зафиксировать ЛКМ.
36.Команда **Stop**.
37.Команда **Удалить вспомогательные кривые в текущем виде**.
38.Команда **Обновить изображение**.
39.Команда **Размеры и технологические обозначения–Линейный размер** и проставить размеры.

4.0.**Компоновка–Технические требования–Ввод.**
4.1.**Компоновка–Основная надпись.**
Набрать **Лист** далее команда **Вставить Дробь–Полной Высоты** набрать **Б–ПН–10ГОСТ19903–74.** Далее нажать клавишу **Вниз** и **Влево** и набрать **Ст.3пс–4ГОСТ14637–89.**
4.2.Команда **Показать всё.**
4.3.Команда **Просмотр для печати.**
4.4.**Вывод на печать.**

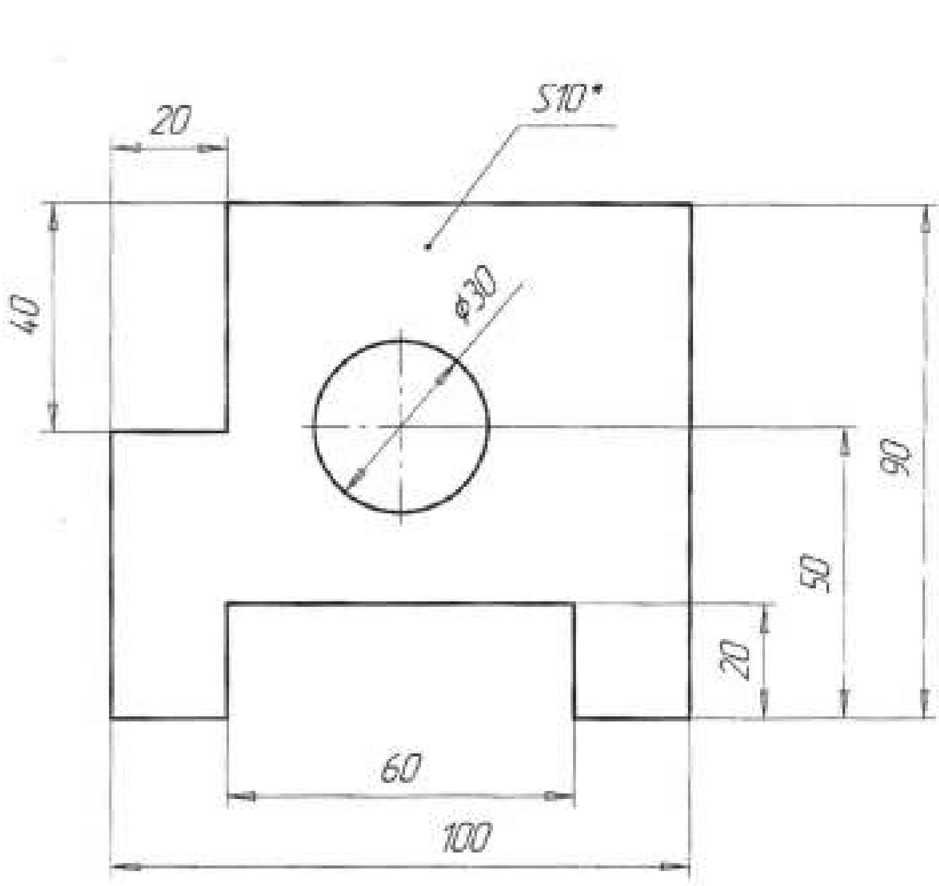
Инв. № подл. | Подп. и дата | Взам. инв. № | Инв. № дубл. | Подп. и дата

					Методические указания к выполнению детали	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		3

ТМК4 02.01.05.000

Перв. примен.

Справ. №



1.Масса заготовки 0,650 кг не более.
2.*Размер для справок.

Подп. и дата

Инв. № дубл.

Взам. инв. №

Подп. и дата

Инв. № подл.

ТМК4 02.01.05.000

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
Разраб.		Бомбарь		
Пров.				
Т.контр.				
Н.контр.				
Утв.				

Пластина

Лит.	Масса	Масштаб
У		1:1
Лист 1	Листов 1	

Лист $\dfrac{\text{Б-ПН-10 ГОСТ 19903-74}}{\text{Ст3пс-4 ГОСТ 14637-89}}$

ТАМКТС

Копировал Формат А4

Практическая работа (Упражнение)

Тема 1.3

Работа в «КОМПАС»	Работа в «КОМПАС»
Цель работы:	*уметь:* вводить необходимые в компьютер выполнять чертежи на компьютере *знать:* порядок создания новых документов последовательность разработки нового чертежа. *формировать общие и профессиональные компетенции:* стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства; использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

Создание нового чертежа.

1.Файл–Создать–Лист.
На экране появиться новый лист в масштабе 1:1. В окне документа будет показана его основная надпись.
2.Щелкнуть на кнопку **Показать все** на Панели управления.Изменится масштаб отображения документа. Увидим его целиком.
По умолчанию система создает лист формата А4 вертикальной ориентации и с типом основной надписи **Чертеж Конструкторский,первый лист**.Изменим параметры документа.
3.Выполнить команды **Настройка–Параметры текущего листа–Параметры листа–Формат.**
После этого в правой части окна появятся все параметры,относящиеся к формату листа.
4.Щелкнуть на кнопке **Список фоматов** в правой части листа.
В раскрывшемся списке щелкнуть на строке **А3**.
В группе **Ориентация** включить кнопку **Горизонтальная**.
Для смены стиля основной надписи щелкнуть на команде **Оформление**.
5.Щелкнуть на кнопке раскрытия списка стилей.Найти и выбрать из списка стиль **Чертеж конструкторский.Посл. Листы.ГОСТ2.104–68.**
Настройка параметров докумета закончена.Закрыть диалоговое окно щелчком на кнопке **ОК**.
6.Щелкнуть на кнопке **Показать все** на Панели управления для изменения масштаба отображения документа.
Получили лист заданного формата, ориентации и стиля.
В таком состоянии новый документ готов к вводу геометрической информации и объектов оформления.

Перв. примен.
Справ. №
Подп. и дата
Инв. № дубл.
Взам. инв. №
Подп. и дата
Инв. № подл.

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата				
Разраб.		Бондарь Р.В.			Методические указания к детали ВАЛ	Лит.	Лист	Листов
Пров.							1	11
Н.контр.						ТАМКТС Инженерная графика		
Утв.								

Копировал Формат А4

Сразу после создания документа рекомендуется записать его на диск в нужную папку и присвоить документу Имя.

7.Файл-Сохранить как.

На экране появится диалоговое окно **Укажите имя файла для записи**. Теперь осталось присвоить документу имя. Щелкнуть мышью в поле **Имя файла**. После этого в нем появится вертикальная мигающая черта-текстовый курср. Введите с клавиатуры имя документа **Вал** и нажмите кнопку **Сохранить**.

8.После этого на экране появится диалоговое окно **Информация о документе**. В этом окне 2 текстовых поля **Автор и Комментарий**. Оба они являются необязательными. В любом случае закроем диалоговое окно щелчком на кнопке ОК. После небольшой паузы документ будет записан на жесткий диск.

9.Нажать кнопку **Сохранить документ** на Панели управления.

Посмотрите, как изменился заголовок программного окна. Теперь в нем отображается полное имя документа. Обратите внимание на расширение .CDW, автоматически добавленное системой к имени файла.

Инв. № подл. | Подп. и дата | Взам. инв. № | Инв. № дубл. | Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		Лист
						2

Создание нового вида

Любой чертеж в КОМПАС-ГРАФИК состоит из одного или нескольких видов. При этом один из видов является **текущим**. Текущий вид обладает важной особенностью: все вновь создаваемые объекты располагаются в текущем виде и логически принадлежат именно ему. В каждый момент времени текущим может быть только один вид на чертеже.

Посмотрите на Строку текущего состояния. В левой ее части находиться поле **Текущий вид**. В этом поле отображается номер вида , который в данный момент является текущим. В настоящий момент текущим являетя вид с номером 0. Это тот самый нулевой системный вид,автоматически создаваемый при создании нового чертежа.

10.Открыть меню **Компоновка** и выполнить команду **Создать вид**.

11.На экране появилось диалоговое окно **Параметры нового вида**. В нем отображаются параметры нового вида, предлагаемые системой по умолчанию. Каждый новый вид получает свой номер в порядке возрастания номеров.

12.Щелкнуть на кнопке раскрытия стандартных масштабов и выбрать из списка значение 1,0000.

13.Щелчком мыши в текстовом поле **Имя** сделать его текущим и ввести имя вида **Главный вид**. Щелчком на кнопке ОК закрыть диалоговое окно.

14.Обратить внимание на Строку сообщений – система запрашивает **координаты точки привязки вида**. Изменился и вид курсора – он превратился в **символ начала координат**.

Точка привязки вида –это точка на листе чертежа, в которой будет находиться **начало координат нового вида**.За начало координат обычно принимается какая-либо **характерная**

Изм	Лист	№ докум	Подп	Дата

Инв. № подл. | Подп. и дата | Взам. инв. № | Инв. № дубл. | Подп. и дата

точка вида. Чаще всего это точка, относительно которой задана основная часть размеров вида или относительно которой удобно выполнять его построение.

В нашем случае расположим **Символ начала координат** ближе к левой стороне формата и щелкнуть мышкой на глаз в нужной точке чертеж.

На этом процесс создания нового вида закончен. Обратите внимание на экран, там произошли изменения:

– в указанной нами точке появился **Системный символ начала** координат – это начало координат вида 1.

– исчез системный символ начала координат листа – системный вид с номером 0 не является текущим.

–в поле **Текущий вид** в Строке параметров появилась цифра 1 – номер текущего вида.Также иизменился Заголовок окна – .> **Главный вид**.

Теперь можно приступать к вычерчиванию и оформлению детали.

14.Подключить сетку.

15.На Панели управления нажать кнопку **Увеличить масштаб**.

16.На странице **Геометрия** включить кнопку **Отрезок**.

Изменилась Строка параметров.

17.Установить в качестве текущего стиль линии **Осевая**.

18.Для указания начальной точки отрезка в точке начала координат выполним клавиатурную команду <Ctrl>+<0> и нажать клавишу <Enter>.

Смотрим слева координаты курсора, они равны 0,0 и 0,0.

Клавишей – строим **Осевую на** 185мм +<Enter> Проверить шаг курсора.

19. Установить стиль линии **Основная**.

20.На странице **Геометрические построения** включить кнопку **Непрерывный ввод объектов**. Для деталей цилиндрической формы применяют в основном эту кнопку.

21.Для построения контура детали применяем глобальную

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

привязку **Ближайшая точка**

22.На осевой линии фиксируем точку 1 +<Enter>,появилась точка 2

23.Клавишей **Вверх** ведем на 20 +<Enter>

24.Клавишей **Вправо** ведем на 50 + <Enter>

25.Клавишей **Вверх** ведем на 10 +<Enter>

26.Клавишей **Вправо** ведем на 80 +<Enter>

27.Клавишей **Вниз** ведем на 10+<Enter>

28.Клавишей **Вправо** ведем на 50 +<Enter>

29.Клавишей **Вниз** ведем на 20 +<Enter>

30.Построили половина вала без фасок

31. Щелчком на кнопке **Прервать команду** прекратить работу команды [Stop]

32.Включить кнопку **Отрезок**, достроить недостающие линии Точку +1 к контуру детали +<Enter> ведем клавишей **Вниз** до осевой. Также второй отрезок.

33.**Строим фаски**. Нажать кнопку **Фаска**

34.Двойным щелчком мыши активизируйте поле **Длина фаски на первом объекте** и введите значение 2,5. Или щелчком на кнопке с правой стороны поля раскройте список стандартных длин и выберите из него значение 2,5

35.В ответ на запрос системы **Укажите первую кривую для построения фаски** укажите мишенью на отрезок ,но ближе к тому его концу ,где предполагается выполнить построение фаски

36.В ответ на запрос системы **Укажите вторую кривую для построения фаски** укажите мишенью на горизонтальный отрезок –**Фаска построена**

37.Аналогичным образом строим остальные фаски

38.Щелчком на кнопке **Фаска** завершите выполнение команды.

39.С помощью команды **Ввод отрезка** постройте недостающие отрезки фаски стилем линии **Основная**

40. Верхняя половина детали полностью построена. Нижнюю половину получим с помощью команды **Симметрия**

Инв. № подл. | Подп. и дата | Взам. инв. № | Инв. № дубл. | Подп. и дата

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Копировал Формат А4

41. С помощью команды **Выделить-Секущей рамкой** выделить верхнюю половину детали за исключением осевой линии.

42.Вызовите на экран страницу **Редактирование** Инструментальной панели и нажмите кнопку **Симметрия**.

43.Поскольку ось симметрии присутствует на чертеже в явном виде, нажмите кнопку **Выбор объекта** на Панели специального управления.

44.Укажите мишенью на горизонтальную ось симметрии детали в любой ее точке-система выполнила построение симметричного изображения.

45.Щелчком на кнопке **Прервать команду** прекратите работу команды и снимите выделение с объектов щелчком мыши на свободном поле чертежа.

46. На Панели управления щелкнуть **Обновить изображение**.

47.Щелкнуть **Сохранить документ**.

РАБОТА С ПРИКЛАДНЫМИ БИБЛИОТЕКАМИ

48.Любой элемент в библиотеках имеет свою точку привязки, то есть базовую точку, относительно которой элемент выгружается из библиотеки. До выгрузки элемента должны определить точку на чертеже, к которой будет привязываться базовая точка элемента. Если такая точка отсутствует в явном виде, ее необходимо построить с помощью вспомогательных построений.

49.Строим **базовую точку** для расположения шпоночного паза. Команда **Ввод точки**, выбираем стиль Крест X.

50. В **Строке текущего состояния** вводим координаты 90 и 0,0. Построили **базовую точку**.

51. Меню **Сервис-Прикладная библиотека**.

52.В диалоговом окне **Прикладная библиотека** открыть раздел **Геометрические фигуры** и сделать текущим элемент **Паз,вид сверху**. Для выбора элемента нажать ОК.

53.Щелкнуть 2 раза на **Паз,вид сверху** и ввести значения

Инв. № подл. | Подп. и дата | Взам. инв. № | Инв. № дубл. | Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		Лист
						6

Копировал Формат А4

L=65 B=18 и нажать кнопку **ОК**.

54. На экране появился **Фантом паза**. Подвести фантом к базовой точке. Ввести угол ап=0.0 и нажать <Enter>

55.На детали построили **Шпоночный паз**.

56.Щелкнуть **Сохранить документ**.

ПРОСТАНОВКА РАЗМЕРОВ.

КОМПАС-ГРАФИК поддерживает все предусмотренные ЕСКД типы размеров: линейные, диаметральные, угловые и радиальные. Кнопки вызова команд расположены на странице **Размеры и технологические обозначения**.

57. На странице **Размеры и технологические обозначения** Инструментальной панели включить кнопку **Линейный размер**. Данная команда позволяет ввести один или несколько размеров. При активизации команды простановки линейных размеров в Строке параметров отображаются различные поля и кнопки, с помощью которых можно вводить характерные точки размера, управлять его ориентацией и содержимым размерной надписи.

Содержимое Панели специального управления также меняется. С мпомощью 3-х дополнительных кнопок **Параметры размера**, **Наклонить размер и Выбор базового объекта** можно изменить индивидуальную настройку каждого создаваемого размера.

58.**Размеры на детали нанести по чертежу.**

59.На странице **Рамеры и технологические обозначения** включить кнопку **Обозначение разреза**. Подвести к чертежу и щелкнуть вверху и внизу. Нажать Stop. На чертеже будет обозначение сечения.

60. Меню **Компоновка-Создать вид**

61.В диалоговом окне создаем вид 2, масштаб1:1, вводим имя

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

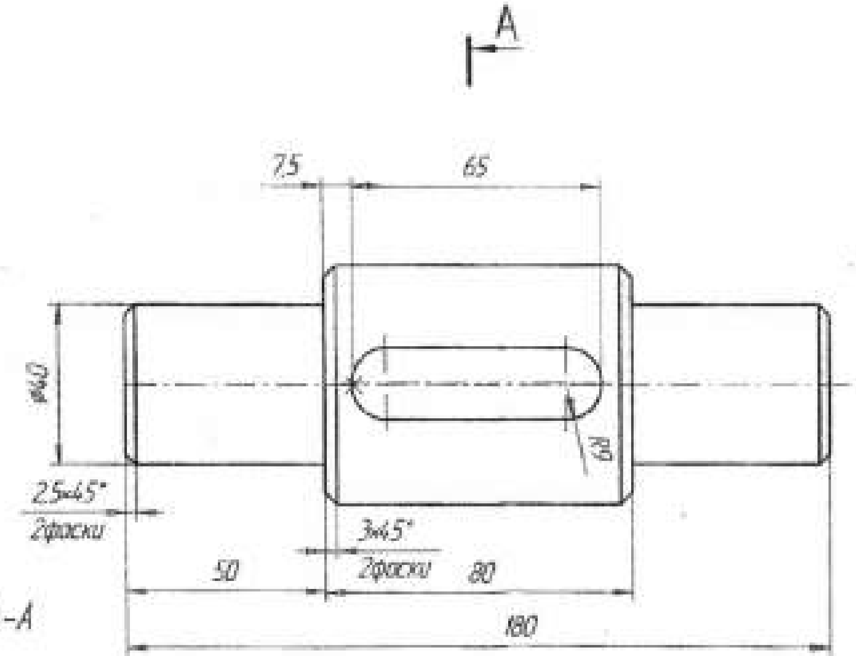
Лист

Инв. № подл. | Подп. и дата | Взам. инв. № | Инв. № дубл. | Подп. и дата

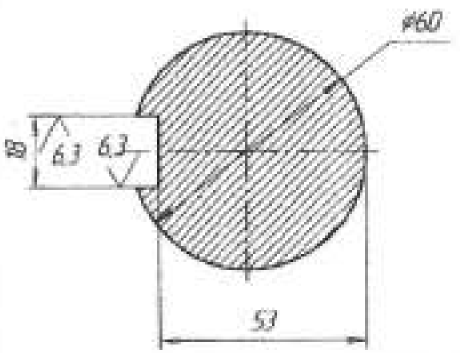
Копировал Формат А4

ТМКЧ 02.07.05.000

12,5 √ (√)



А–А



Неуказанные предельные отклонения размеров: отв.по H14, валов по h14, ост.±IT14/2.

Изм. Лист	№ докум.	Подп.	Дата	ТМКЧ 02.07.05.000	
Разраб.	Бондарь			Вал	Лит. у · Масса 0,52 · Масштаб 1:1
Пров.					Лист 1 · Листов 1
Т.контр.					
Н.контр.				Сталь45 ГОСТ1050-88	ТАМКТС
Утв.					

Копировал Формат А3

Практическая работа № 1а

Тема 2.1 **Основные сведения по оформлению чертежей**	
	Линии чертежа по ГОСТ 2.303-2006, их назначение и применение Форматы, основная надпись на чертеже Масштабы
Цель работы:	*уметь:* выполнять различные типы линий на чертежах, обозначать стандартные масштабы на чертежах и в основной надписи *знать*; размеры основных форматов, типы линий, масштабы, форму основной надписи *формировать общие и профессиональные компетенции:* стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства; использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

Методические указания по выполнению графического задания

по теме «Основные сведения по оформлению чертежей»

Графическое задание №1а «Линии чертежа» выполняется в одном варианте и посвящено проведению линий по ГОСТ 2.303-. Задание выполняется на формате А4. Выполнение задания удобнее начинать с проведения через середину внутренней рамки чертежа тонкой вертикальной линии, на которой делают пометки в соответствии с размерами, приведенными в задании. Через намеченные точки проводят тонкие вспомогательные горизонтальные линии, облегчающие выполнение графической части задания. На вертикальных осях, предназначенных для окружностей, наносят точки, через которые проводят окружности указанными в задании линиями. На учебных чертежах сплошную линию выполняют обычно толщиной S=0, 8...1мм, а толщины всех остальных линий устанавливают по табл. 1. На выполненном задании приведенные размеры наносится недолжны.

Порядок выполнения задания.

1. Выбрать формат
2. Провести вспомогательные линии (сверху, справа и слева на расстоянии 15 мм от основной рамки)
3. Построить предложенные линии
4. Найти середину формата (92,5мм)
5. По заданию построить вертикальные линии (высотой 50мм)
6. Построить заданные окружности разными типами линий
7. Построить контур технической детали
8. На контуре детали нанести штриховку
9. Заполнить основную надпись

Введение в курс дисциплины «Инженерная графика»

Чертежом называют документ, содержащий изображение предмета и другие данные для его изготовления и контроля.

Стандарт- документ, который устанавливает единые правила оформления чертежей и других технических документов. Государственные стандарты (ГОСТ) обязательны для всех. Государственным стандартам присваиваются определённые значения.

РАЗДЕЛ «ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ЧЕРЧЕНИЕ»

Тема Основные сведения по оформлению чертежей

ЛИНИИ ЧЕРТЕЖА.

Чтобы чертёж был более выразителен и понятен для чтения, его выполнят разными линиями, начертание и назначение которых для всех отраслей промышленности и строительства установлены ГОСТ 2.303-2006.

МАСШТАБЫ

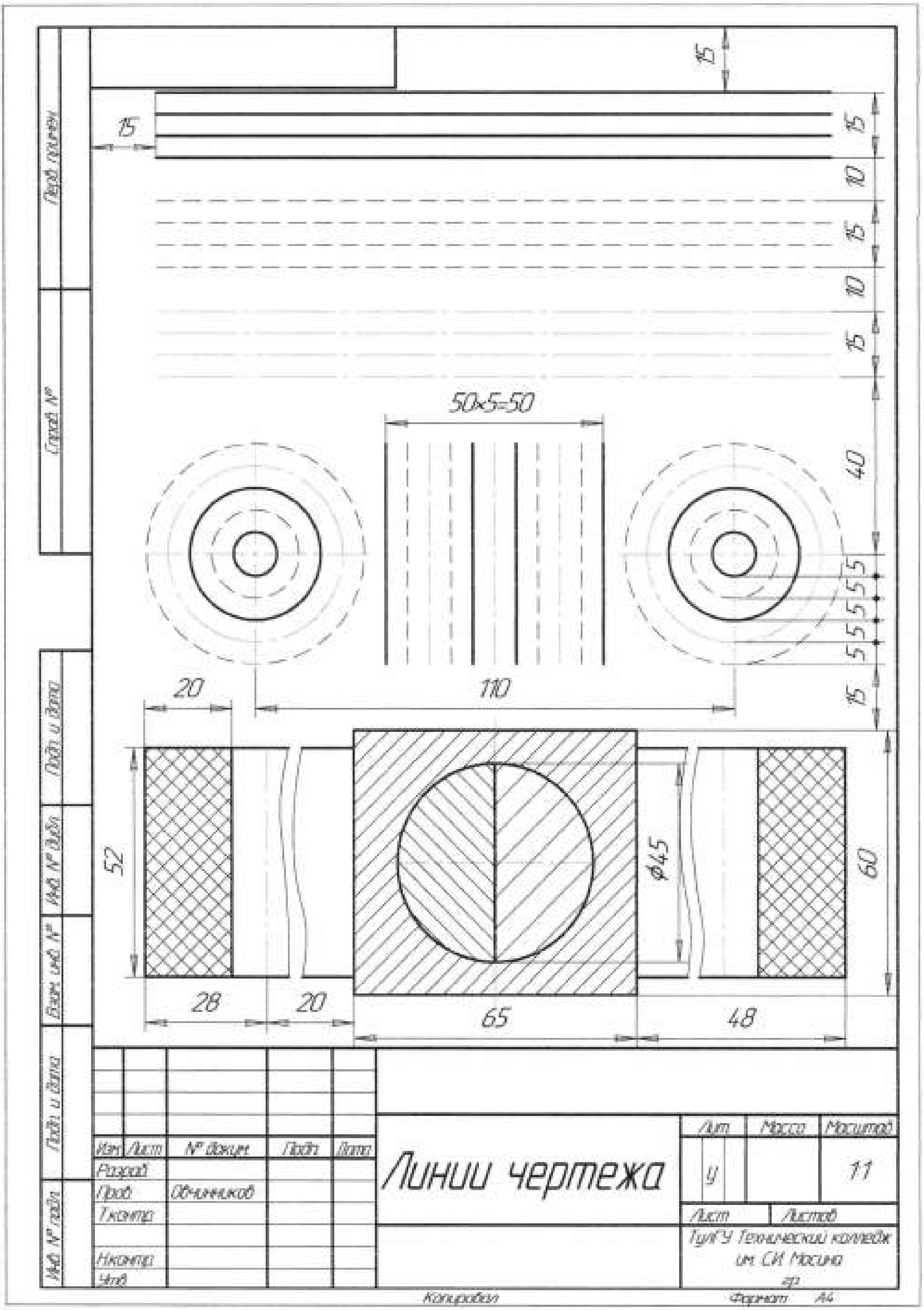
Масштабом называют отношение линейных размеров изображения предмет^ на чертеже к действительным размерам этого предмета.
ГОСТ 2.302-2006 устанавливает следующие масштабы:
Масштабы уменьшения 1:2; 1:2,5; 1:4; 1:5; 1:10 и т.д.
Натуральная величина 1:1
Масштабы увеличения 2:1; 2,5:1; 4:1; 5:1; 10:1 и т.д.
Непредусмотренные стандартом масштабы не применяют.
Какой бы масштаб ни был, на чертеже всегда проставляют действительные размеры.

ФОРМАТЫ

Чертежи выполняют на листах определённых размеров, установленных ГОСТ 2.301-2006. Форматы бывают основные и дополнительные. Основные форматы:

АО	841*1189
А1	594*841
А2	420*594
А3	297*420
А4	210*297

Графическая работа №1а. Линии чертежа.



Практическая работа № 16

Тема 2.2 Чертежный шрифт и выполнение надписей на чертежах	Сведения о стандартных шрифтах и конструкции букв, цифр, знаков по ГОСТ2.301-81
Цель работы:	*уметь:* наносить слова и предложения чертежным шрифтом *знать*: размеры и конструкцию прописных и строчных букв русского алфавита, цифр, знаков. *формировать общие и профессиональные компетенции:* стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства; использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

Методические указания по выполнению графического задания по теме «Чертежный шрифт и выполнение основных надписей на чертежах»

Графическое задание №1б по теме Чертежный шрифт» выполняется на формате А3 в форме титульного листа. Задание предусмотрено в одном варианте, должно привить студентам навыки выполнения на чертежах надписей. В задании требуется написать текст титульного листа шрифтом типа Б с наклоном 75 разными размерами №7, №10, №14. Для облегчения написания букв и цифр наносится вспомогательная сетка сплошными тонкими линиями с учетом основных параметров шрифта.

Последовательность выполнения задания

1. На формате А3 на определенном расстоянии по заданию проводят вспомогательные тонкие горизонтальные линии, определяющие границы строчек шрифта и расстояние между строками.
2. На основании полученных строк следует отложить отрезки, равные ширине каждой буквы и плюс расстояние между буквами.
3. Написать на каждой строке предложенный текст (Размеры букв и цифр следует брать по ГОСТ 2.304-81*) тонкими линиями.
4. Обвести текст.
5. Заполнить основную надпись.

ОСНОВНЫЕ НАДПИСИ.

На чертежах помещают основную надпись, содержащую сведения об изображенном изделии. Основная надпись размещается вплотную к рамке чертежа в правом нижнем её углу. Допускается как «вертикальное», так и «горизонтальное» расположение форматов, за исключением формата А4, который всегда располагают «вертикально». На основную надпись установлен ГОСТ 2.104-2006

Тема «Чертёжный шрифт и выполнение надписей на чертежах»

ШРИФТЫ ЧЕРТЁЖНЫЕ

Чертежи и прочие конструкторские документы содержат необходимые надписи: название изделий, размеры, данные о материале, спецификации и другие надписи. ГОСТ 2.304-2006 устанавливает шрифты для надписей, которые наносят от руки на чертежи и другие конструкторские документы.
Шрифты бывают типа А и Б, прямые и наклонные (угол наклона 75). ГОСТ устанавливает размеры шрифта: 1,8; 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14; 20; 28; 40.

Основные параметры шрифта

h - высота прописных букв
c = 0,7h - высота строчных букв
a = 0.2h - расстояние между буквами

e = 0.6h - минимальное расстояние между словами
d = 0.1h - толщина линий шрифта

Ширина прописных букв:

1. Г, Е, З, С   123456890 -0,5h
2. А, Д, М, Х, Ы, Ю -0,7h
3. Ж, Ш, Щ, Ф, Ъ -0,8h
4. Все остальные -0,5h

Ширина строчных букв:

1. ж, т, ф, ш, щ, м -0,7h
2. ы, ю -0,8h
3. все остальные -0,5h

Графическая работа №16. Титульный лист.

Практическая работа (Упражнение)

Тема 2.3
Основные правила нанесения размеров на чертежах

Правила нанесения линейных, угловых, диаметральных, радиальных размеров
Упрощения при нанесении размеров.

Цель работы:

уметь: располагать размерные числа по отношению к размерным линиям
знать: правила проведения размерных, выносных линий и угловых размеров
общие требования к размерам по ГОСТ 2.307-68
упрощения при нанесении размеров
формировать общие и профессиональные компетенции:
стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства;
использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

Методические указания по выполнению графического задания по теме «Основные правила нанесения размеров»

Графическое упражнение «Нанесение размеров» выполняется на формате А3 по индивидуальным заданиям. Предлагается выполнить изображения 2-х контуров технических деталей в масштабе1:1 и нанести размеры согласно ГОСТ 2.307-2011.

Порядок выполнения задания.

1. Выбрать формат
2. В тонких линиях построить предложенные контуры технических деталей.
3. Провести осевые линии
4. Нанести размерную сетку, затем размерные числа
5. Обвести контуры деталей
6. Заполнить основную надпись

Нанесение размеров - это совокупность размерных, выносных линий и размерного числа. ГОСТ 2.307-68 устанавливает правила нанесения размеров и предельных отклонений на чертежах и других технических документов. Размеры бывают линейные — длина, высота, величина диаметра, радиуса, дуги и угловые - размеры углов.

Линейные размеры указывают на чертеже в миллиметрах, единицу измерения на чертеже не указывают.

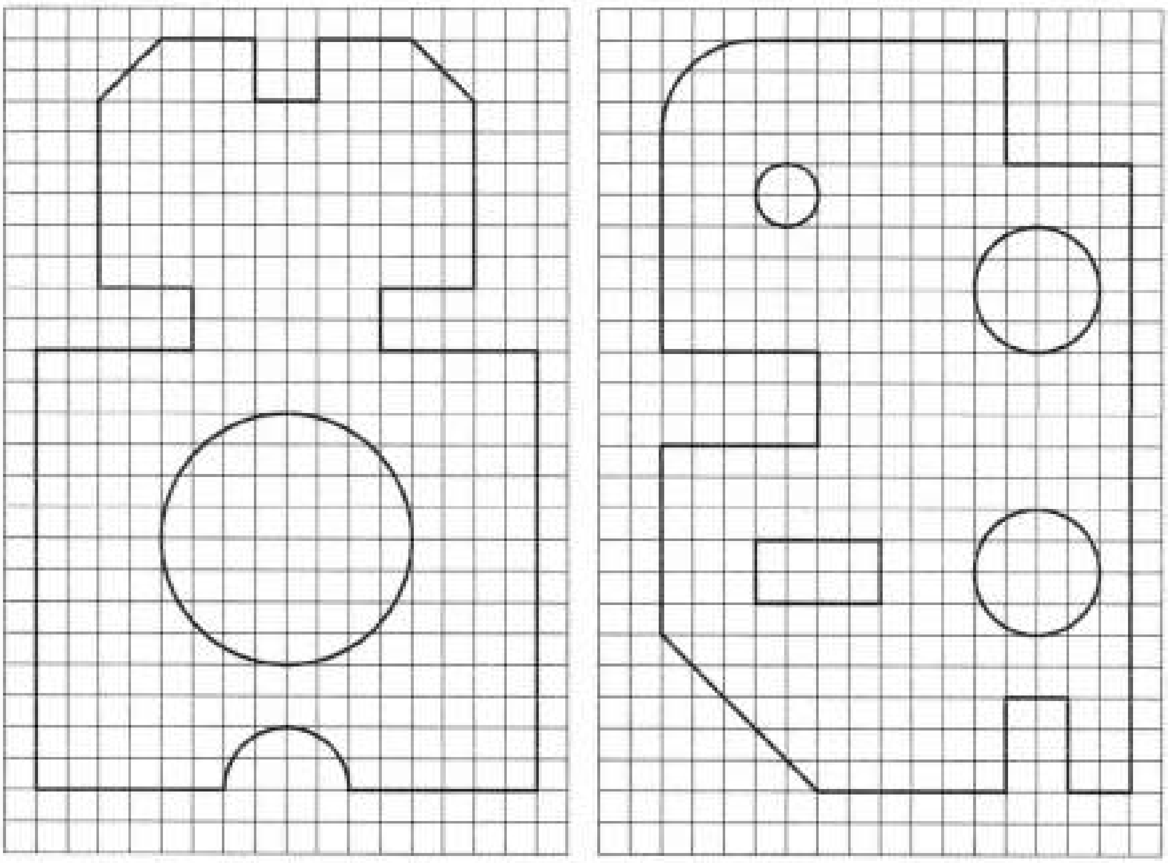
1. Выносные и размерные линии выполняются сплошными тонкими линиями.
2. Размерное число наносят строго над размерной линией. (шрифт№5)
3. Размерные числа наносят в шахматном порядке.
4. Расстояние от контура детали до 1-ой размерной линии до 10мм и между размерными линиями от 7-10мм.
5. Штриховка прерывается, если имеется размерное число.
6. Размерные линии не пересекаются между собой.
7. Выносная линия выходит за размерную линию от 2-5мм.

Упражнение. Нанесение размеров на чертежах.

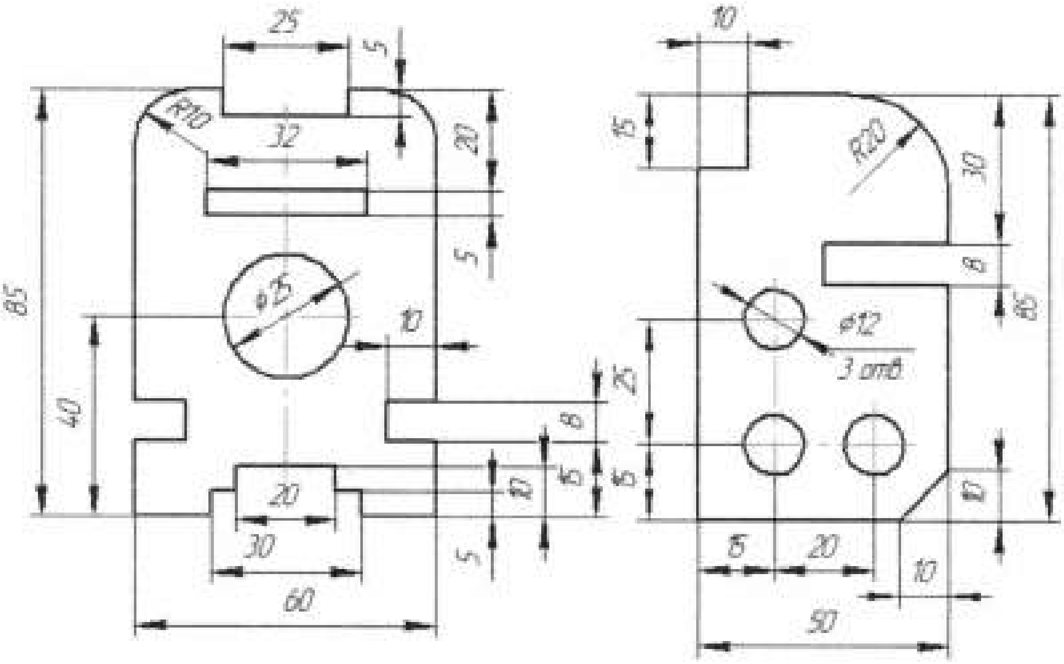
1

Перечертить детали(фомат А3), определяя размеры по клеткам.

Нанести размеры.



Пример выполнения упражнения.



Практическая работа № 2

Тема 2.4
Геометрические построения и приемы вычерчивания контура технических деталей.

Деление окружности на равные части Сопряжения Уклони конусность.

Цель работы:

уметь: строить перпендикулярные и параллельные линии, уклон и конусность строить лекальные кривые, строить сопряжения
знать: деление отрезка прямой,
деление углов,
построение вписанных многоугольников
формировать общие и профессиональные компетенции:
стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства;
использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

Методические указания по выполнению графического задания по теме «Геометрические построения и приемы вычерчивания контуров технических деталей»

Графическое задание №2 «Деление окружности на равные части. Построение сопряжений» выполняется на формате А3. Задание выдается индивидуально каждому студенту.

Порядок выполнения задания.

1. Выбрать формат

2. По предложенному заданию построить в тонких линиях контуры технических деталей

3. На одной из деталей разделить окружность на равные части (деление производить по правилам деления окружности на равные части)

4. Построить на деталях различные сопряжения (предварительно находя центр сопряжения, точки сопряжения)

5. Все вспомогательные элементы для построения сопряжения оставить на чертеже

6. Нанести размерную сетку и затем размерные числа 7. Обвести контуры деталей

8. На контуре одной из деталей нанести штриховку

9. Заполнить основную надпись

Введение

В этой методической работе будут рассмотрены основные виды сопряжений, и Вы узнаете о том, как построить сопряжение углов, прямых линий, окружностей и дуг, окружностей с прямой.

Сопряжением называют плавный переход одной линии в другую. Для того чтобы построить сопряжение, нужно найти центр сопряжения и точки сопряжений.

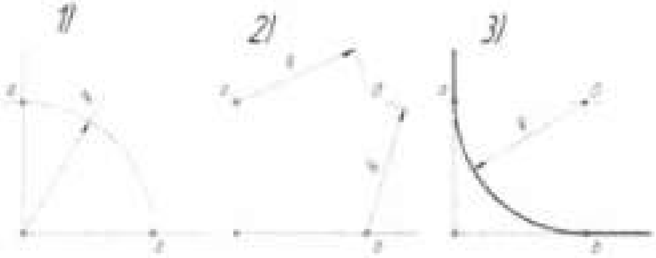
Точка сопряжения – это общая точка для сопрягаемых линий. Точку сопряжения также называют точкой перехода.

Ниже будут рассмотрены основные типы сопряжений, упражнения по теме «Сопряжения».

Сопряжение углов (Сопряжение пересекающихся прямых)

Сопряжение прямого угла. (Сопряжение пересекающихся прямых под прямым углом)

В данном примере будет рассмотрено построение сопряжения прямого угла заданным радиусом сопряжения R. Первым делом найдём точки сопряжения. Для нахождения точек сопряжения, нужно поставить циркуль в вершину прямого угла и провести дугу радиусом R до пересечения со сторонами угла. Полученные точки и будут являться точками сопряжения. Далее нужно найти центр сопряжения. Центром сопряжения будет точка равноудалённая от сторон угла. Проведём из точек a и b две дуги радиусом сопряжения R до пересечения друг с другом. Полученная на пересечении точка O и будет центром сопряжения. Теперь из центра сопряжения точки O описываем дугу радиусом сопряжения R от точки a до точки b. Сопряжение прямого угла построено.



Сопряжение острого угла. (Сопряжение пересекающихся прямых под острым углом)

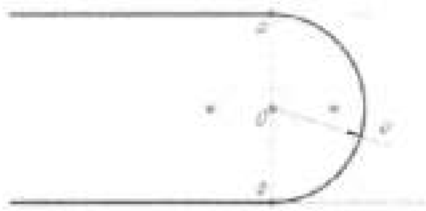
Ещё один пример сопряжения угла. В этом примере будет построено сопряжение острого угла. Для построения сопряжения острого угла раствором циркуля, равным радиусу сопряжения R, проведём из двух произвольных точек на каждой стороне угла по две дуги. Затем проведём касательные к дугам до пересечения в точке O, центре сопряжения. Из полученного центра сопряжения опустим перпендикуляр к каждой из сторон угла. Так мы получим точки сопряжения a и b. Затем проведём из центра сопряжения, точки O, дугу радиусом сопряжения R, соединив точки сопряжения a и b. Сопряжение острого угла построено.

Сопряжение тупого угла. (Сопряжение пересекающихся прямых под тупым углом)

Сопряжение тупого угла строится по аналогии с сопряжением острого угла. Мы также, сначала радиусом сопряжения R проводим по две дуги из двух произвольно взятых точек на каждой из сторон, а затем проводим касательные к этим дугам до пересечения в точке О, центре сопряжения. Затем опускаем перпендикуляры из центра сопряжения к каждой из сторон и соединяем дугой, равной радиусу сопряжения тупого угла R, полученные точки а и b.

Сопряжение параллельных прямых линий

Построим сопряжение двух параллельных прямых. Нам задана точка сопряжения а, лежащая на одной прямой. Из точки а проведём перпендикуляр до пересечения его с другой прямой в точке b. Точки а и b являются точками сопряжения прямых линий. Проведя из каждой точки дугу, радиусом больше отрезка ab, найдём центр сопряжения - точку О. Из центра сопряжения проведём дугу заданного радиуса сопряжения R.



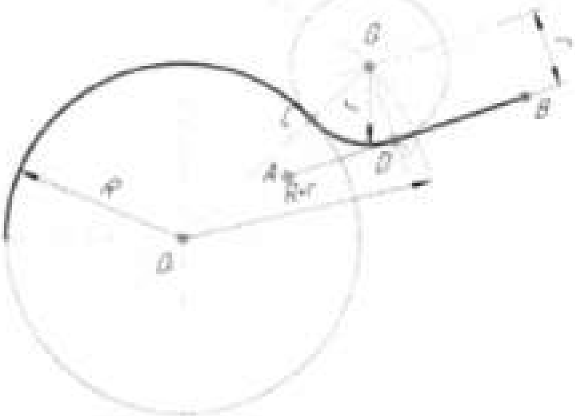
Сопряжение окружностей (дуг) с прямой линией

Внешнее сопряжение дуги и прямой линии

В этом примере будет построено сопряжение заданным радиусом r прямой линии, заданной отрезком АВ, и дуги окружности радиусом R.

Сначала найдём центр сопряжения. Для этого проведём прямую, параллельную отрезку АВ и отстоящую от него на расстояние радиуса сопряжения r, и дугу, из центра окружности OR радиусом R+r. Точка пересечения дуги и прямой и будет центром сопряжения – точкой Or.

Из центра сопряжения, точки Or, опустим перпендикуляр на прямую АВ. Точка D, полученная на пересечении перпендикуляра и отрезка АВ, и будет точкой сопряжения. Найдём вторую точку сопряжения на дуге окружности. Для этого соединим центр окружности OR и центр сопряжения Or линией. Получим вторую точку сопряжения – точку С. Из центра сопряжения проведём дугу сопряжения радиусом r, соединив точки сопряжения.

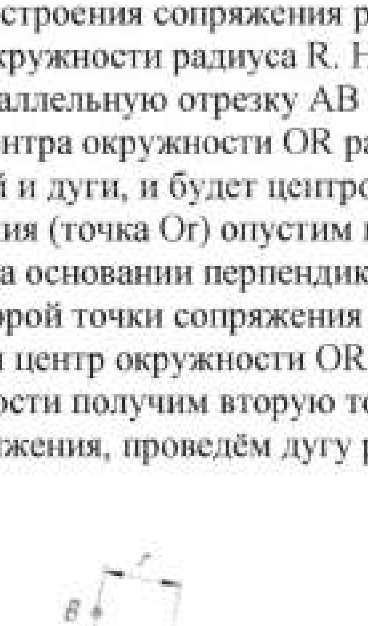


Внутреннее сопряжение прямой линии с дугой

По аналогии строится внутреннее сопряжение прямой линии с дугой. Рассмотрим пример построения сопряжения радиусом r прямой линии, заданной отрезком AB, и дуги окружности радиуса R. Найдём центр сопряжения. Для этого построим прямую, параллельную отрезку AB и отстоящую от него на расстояние радиуса r, и дугу, из центра окружности OR радиусом R-r. Точка Or, полученная на пересечении прямой и дуги, и будет центром сопряжения.

Из центра сопряжения (точка Or) опустим перпендикуляр на прямую AB. Точка D, полученная на основании перпендикуляра, и будет точкой сопряжения.

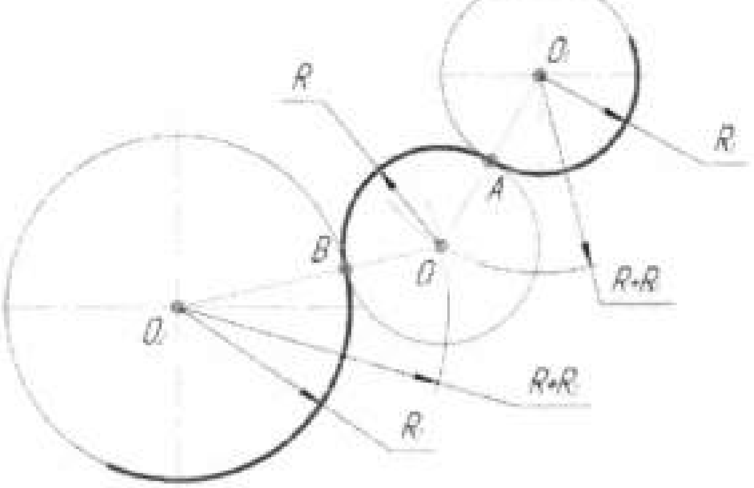
Для нахождения второй точки сопряжения на дуге окружности, соединим центр сопряжения Or и центр окружности OR прямой линией. На пересечении линии с дугой окружности получим вторую точку сопряжения – точку C. Из точки Or, центра сопряжения, проведём дугу радиусом r, соединив точки сопряжения.



Сопряжение окружностей (дуг)

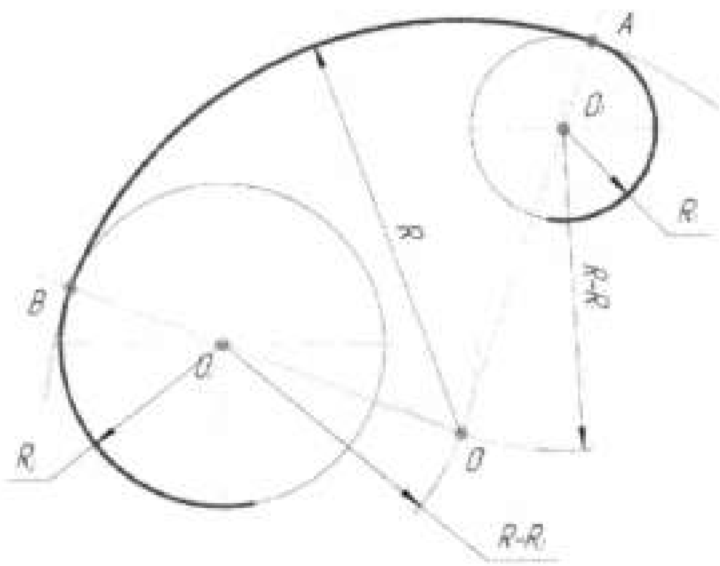
Внешнее сопряжение дуг окружностей

Внешним сопряжением считается сопряжение, при котором центры сопрягаемых окружностей(дуг) O1 (радиус R1) и O2 (радиус R2) располагаются за сопрягающей дугой радиуса R. На примере рассмотрено внешнее сопряжение дуг. Сначала находим центр сопряжения. Центром сопряжения является точка пересечения дуг окружностей с радиусами R+R1 и R+R2, построенных из центров окружностей O1(R1) и O2(R2) соответственно. Затем центры окружностей O1 и O2 соединяем прямыми с центром сопряжения, точкой O, и на пересечении линий с окружностями O1 и O2 получаем точки сопряжения A и B. После этого, из центра сопряжения строим дугу заданного радиуса сопряжения R и соединяем ей точки A и B.



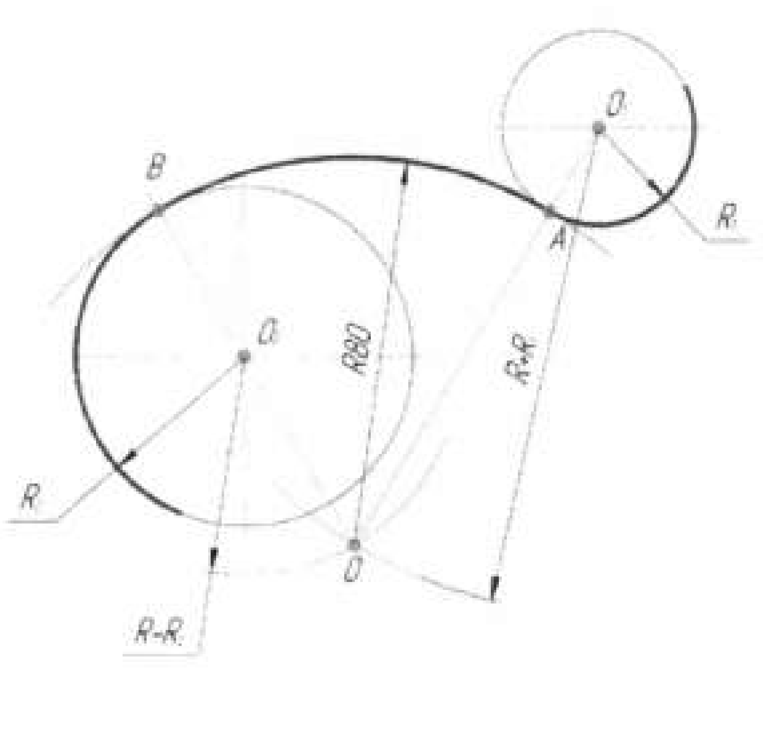
Внутреннее сопряжение дуг окружностей

Внутренним сопряжением называется сопряжение, при котором центры сопрягаемых дуг O1, радиуса R1, и O2, радиус R2, располагаются внутри сопрягающей их дуги заданного радиуса R. На картинке ниже приведён пример построения внутреннего сопряжения окружностей(дуг). Вначале мы находим центр сопряжения, которым является точка O, точка пересечения дуг окружностей с радиусами R-R1 и R-R2 проведённых из центров окружностей O1и O2 соответственно. После чего соединяем центры окружностей O1 и O2 прямыми линиями с центром сопряжения и на пересечении линий с окружностями O1 и O2 получаем точки сопряжения A и B. Затем из центра сопряжения строим дугу сопряжения радиуса R и строим сопряжение.



Смешанное сопряжение дуг окружностей

Смешанным сопряжением дуг является сопряжение, при котором центр одной из сопрягаемых дуг (O1) лежит за пределами сопрягающей их дуги радиуса R, а центр другой окружности(O2) – внутри её. На иллюстрации ниже приведён пример смешанного сопряжения окружностей. Сначала находим центр сопряжения, точку O. Для нахождения центра сопряжения строим дуги окружностей с радиусами R+R1, из центра окружности радиуса R1 точки O1, и R-R2, из центра окружности радиуса R2 точки O2. После чего соединяем центр сопряжения точку O с центрами окружностей O1 и O2 прямыми и на пересечении с линиями соответствующих окружностей получаем точки сопряжения A и B. Затем строим сопряжение.



Различные случаи сопряжений при черчении чертежей.

Анализ чертежа

Пусть требуется построить чертеж прокладки (рис. 1, а). Как видно из чертежа, контур прокладки образуется в результате построения сопряжения окружностей, имеющих радиус 20 мм, дугой окружности R112. Изобразив в стороне этот случай сопряжения (рис. 1, б), замечают, что центр дуги сопряжения О должен находиться от центров малых окружностей на расстояниях, равных сумме радиусов окружностей: 20 + 112 = 132 мм. Для построения центра О из центров малых окружностей дугой радиуса 132 мм делают засечки. Соединив точку О с центрами малых дуг, получают точки сопряжения Л и В, между которыми и проводят дугу R 112. В рассматриваемом примере имеет место внешнее касание дуг, при котором центры находятся по разные стороны от точек сопряжения.

Сопряжение прямых; линий с окружностями часто встречается в таких деталях, как гаечные ключи, шатуны, различные рычаги.

Пусть требуется начертить контур головки шатуна (рис. 2, а). В чертеже имеет место сопряжение окружности R 20 с прямой, идущей параллельно оси шатуна на расстоянии 11 мм от нее, дугой радиуса R 15.

Центре (рис. 2, б) должен находиться от окружности на расстоянии 15 мм, а от центра окружности на расстоянии 20 + 15 = 35 мм; в то же самое время он должен находиться на расстоянии 11 + 15 = 26 мм от оси шатуна.

Для нахождения центра О проводят дугу радиусом 35 мм и прямую, - параллельную оси шатуна на расстоянии 26 мм от этой оси. Точка пересечения дуги и прямой определит искомый центр.

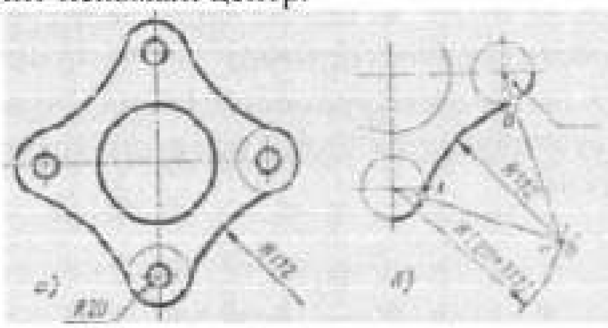


Рис. 1. Сопряжение окружностей

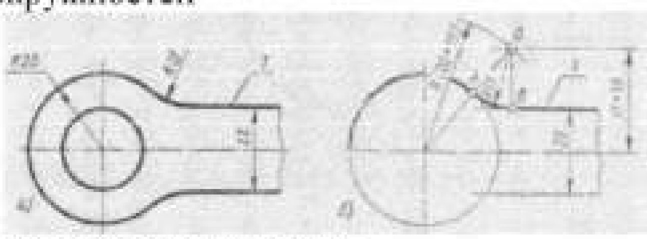


Рис. 2. Сопряжение прямой с окружностью

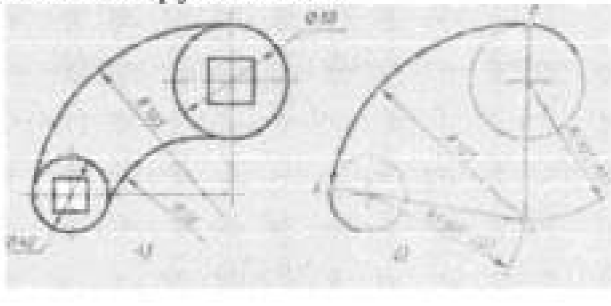


Рис. 3. Практический пример сопряжения

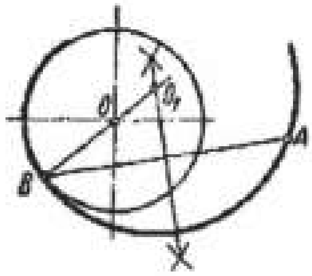
Соединяют центр дуги сопряжения О с центром окружности, находят первую точку сопряжения Л; опускают перпендикуляр из точки С на прямую, находят вторую точку сопряжения Б. Между точками сопряжения А и В проводят дугу сопряжения R 15.

Пусть требуется начертить рычаг криволинейной формы (рис. 3, а). Предполагают, что задача решена: центр дуги R 105 найден (рис. 3, б). Определяют, чему будет равно расстояние от центра дуги сопряжения О до центра окружности 0 40. Очевидно, что оно будет равно разности радиусов 105— 20 = 85 мм. Таким же путем находят расстояние от центра дуги сопряжения О до центра окружности 0 60 (105 — 30 = 75 мм). Пользуясь найденными величинами, из центров окружностей делают засечки, пересечение которых определит точку О. Соединяя найденный центр О с центрами окружностей 0 40 и 0 60, на продолжении линий находят точки сопряжения А и В. В примере имеет место внутреннее касание дуг, при котором центры находятся по одну сторону от точек касания.

Центр Ох для проведения дуги R 58 предлагается найти самостоятельно. Подобный случай сопряжения уже рассматривался на рис. 1. Точки сопряжения находят по общему правилу, известному из геометрии: центры касающихся дуг и точки их касания (сопряжения) всегда лежат на одной прямой.

Построение окружности, проходящей через заданную точку А и касающейся данной окружности в заданной точке В.

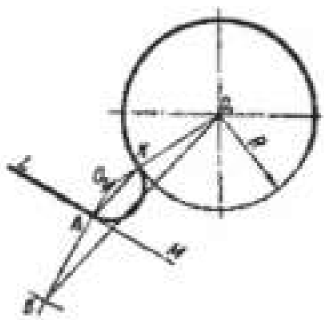
Находим середину прямой линии АВ. Через середину линии АВ поводим перпендикуляр. Пересечение продолжения линии ОВ и перпендикуляра дает точку О1. О1 - центр искомой окружности с радиусом R = O1B = O1A.



Внутреннее касание окружности и дуги.

Построение сопряжения окружности с прямой линией в заданной на прямой точке А.

Из заданной точки А линии LM восстанавливаем перпендикуляр к прямой линии LM. На продолжении перпендикуляра откладываем отрезок АВ. АВ = R. Соединяем точку В с центром окружности О1 прямой.
Из точки А проводим прямую линию параллельно ВО1 до пересечения с окружностью. Получим точку К – точку касания. Соединим точку К с центром окружности О1. Продлим линии О1К и АВ до пересечения. Получим точку О2, которая является центром дуги сопряжения с радиусом О2А = О2К.



Сопряжение окружности с прямой в заданной точке.

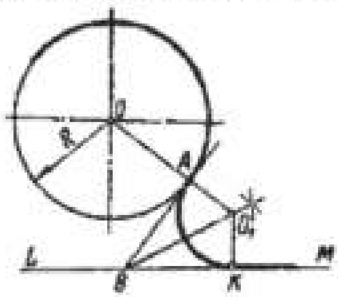
<u>Построение сопряжения окружности с прямой линией в заданной на окружности точке А.</u>

Внешнее касание.

Проводим касательную к окружности через точку А. Пересечение касательной с прямой линией LM даст точку В.

Делим угол, образованный касательной и прямой линией LM, пополам.

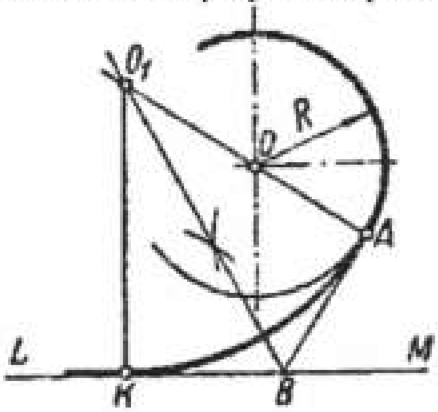
Пересечение биссектрисы угла и продолжения радиуса ОА даст точку О1. О1 - центр дуги сопряжения с радиусом О1А = О1К.



Сопряжение окружности с прямой в заданной точке на окружности.

Внутреннее касание.

Проводим касательную к окружности через точку А. Пересечение касательной с прямой LM даст точку В. Делим угол, образованный касательной и прямой линией LM, пополам. Пересечение биссектрисы угла и продолжения радиуса ОА даст точку О1. О1 - центр дуги сопряжения с радиусом О1А = О1К.



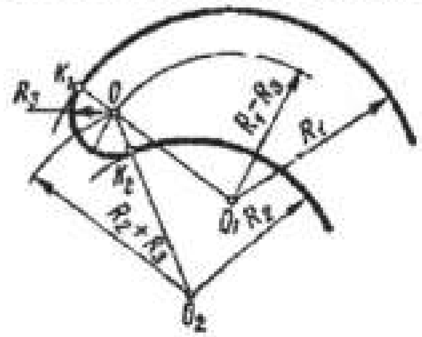
Сопряжение окружности с прямой в заданной точке на окружности.

<u>Построение сопряжения двух неконцентрических дуг окружностей дугой заданного радиуса.</u>

Проводим из центра дуги О1 вспомогательную дугу радиусом R1-R3.

Проводим из центра дуги О2 вспомогательную дугу радиусом R2+R3.

Пересечение дуг даст точку О. О - центр дуги сопряжения с радиусом R3. Точки касания К1 и К2 лежат на линиях ОО1 и ОО2.



Сопряжение 2-х неконцентрических дуг окружностей дугой.

Построение лекальной кривой подбором дуг.

Подбирая центры дуг, совпадающих с участками кривой, можно циркулем вычертить любую лекальную кривую.

Для того чтобы дуги плавно переходили одна в другую, необходимо, чтобы точки их сопряжения (касания) находились на прямых линиях, соединяющих центры этих дуг.

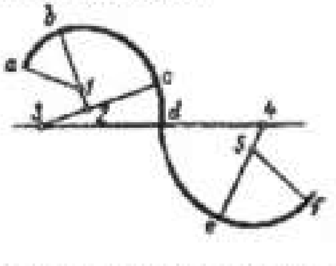
Последовательность построений.

Подбираем центр 1 дуги произвольного участка аb.

На продолжении первого радиуса подбираем центр 2 радиуса дуги участка bс.

На продолжении второго радиуса подбираем центр 3 радиуса дуги участка cd и т. д.

Так строим всю кривую.



Подбор дуг.

Построение сопряжения двух параллельных прямых двумя дугами.

Заданные на прямых параллельных линиях точки А и В соединяем линией АВ.

Выбираем на прямой АВ произвольную точку М.

Делим отрезки АМ и ВМ пополам.

Восстанавливаем в серединах отрезков перпендикуляры.

В точках А и В, заданных прямых, восстанавливаем перпендикуляры к прямым.

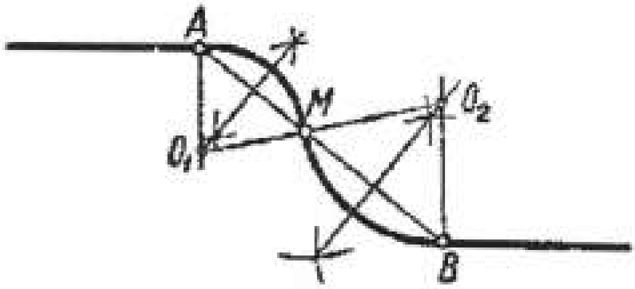
Пересечение соответствующих перпендикуляров даст точки О1 и О2.

О1 центр дуги сопряжения с радиусом О1А = О1М.

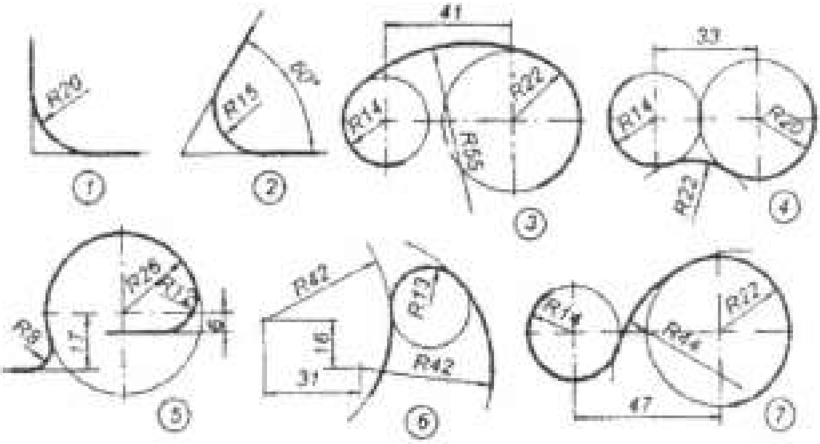
О2 центр дуги сопряжения с радиусом О2В = О2М.

Если точку М выбрать на середине линии АВ, то радиусы дуг сопряжения будут равны.

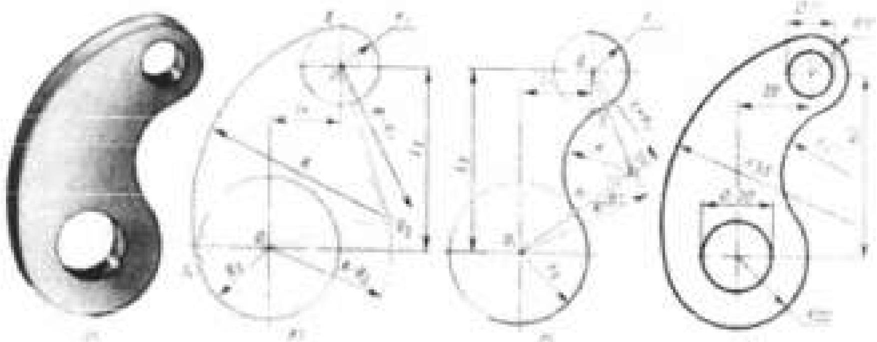
Касание дуг в точке М, находящейся на линии О1О2.

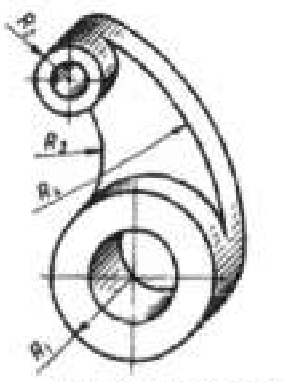


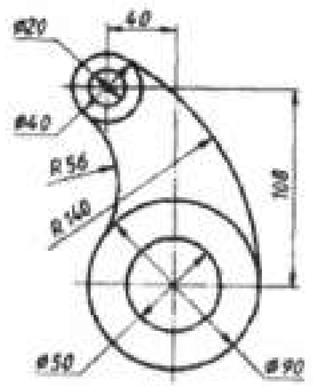
Сопряжение параллельных прямых двумя дугами.

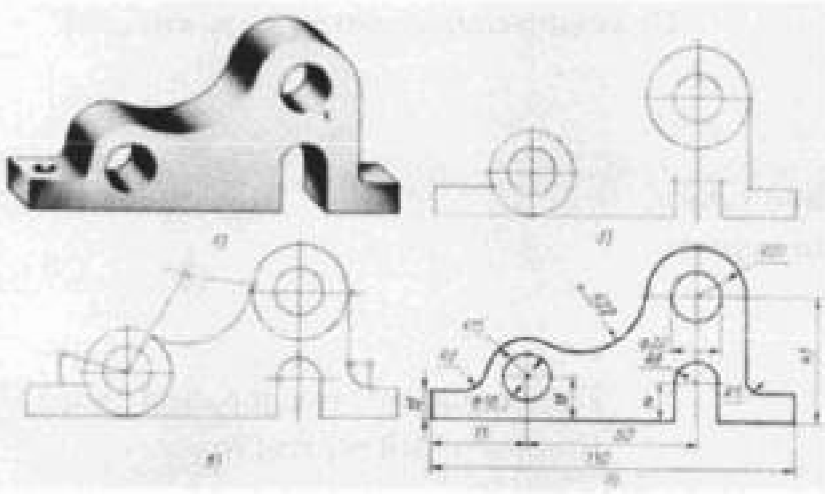


Выполнить упражнения.

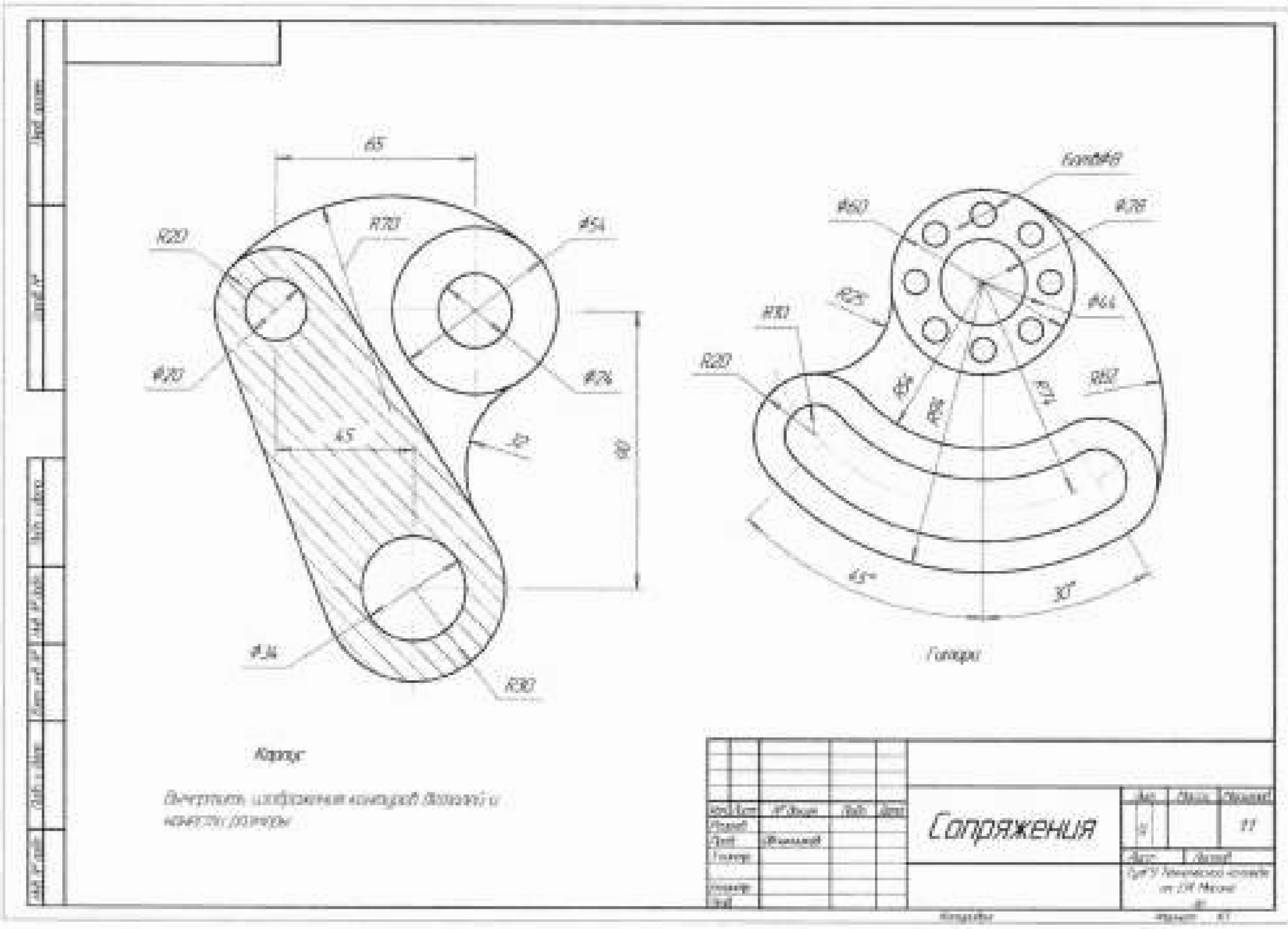








Графическая работа №2. Сопряжения.



Практическая работа (Упражнение)

Тема 3.1
Проецирование точки.
Комплексный чертеж
точки.

Проецирование точки на три плоскости проекций. Комплексный чертеж точки

Цель работы:

уметь: измерять координаты точки
читать комплексные чертежи проекций точек
строить третью проекцию по двум заданным
знать: проецирование точки на три плоскости проекций
комплексный чертеж точки
расположение точек относительно плоскостей проекций
формировать общие и профессиональные компетенции:
стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства;
использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

РАЗДЕЛ «ПРОЕКЦИОННОЕ ЧЕРЧЕНИЕ» (основы начертательной геометрии)

Проецирование точки. Комплексный чертёж точки

Метод проекции. Центральное и параллельное проецирование.

Метод проекций предполагает наличие объекта проецирования, проецирующих лучей и плоскости проекций, на которую осуществляется проецирование. На рис. 2.1 представлены: простейший геометрический образ - точка А, плоскость проекций $\pi 0$ и проецирующий луч Р, проходящий через точку А.

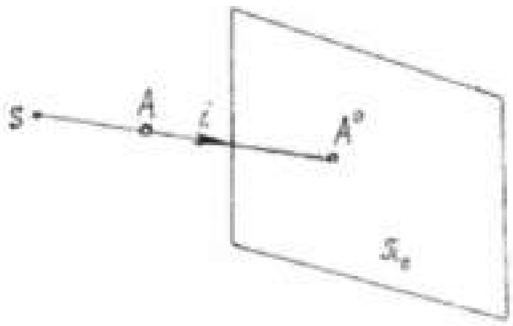


Рис. 2.1.

Проекцией точки А0 на плоскость проекций $\pi 0$ является точка пересечения с плоскостью проекций проецирующего луча, проходящего через заданную точку. Так как любой геометрический образ можно рассматривать как множество точек, то построение проекции этого образа сводится к построениям проекций отдельных его точек. Существуют центральные и параллельные проекции. При центральном проецировании все проецирующие лучи исходят из одной точки пространства, называемой центром проецирования. На рис. 2.2 приведены плоскость проекций π, центр проецирования Р и объекты проецирования - точки А, В, С. Для построения проекций этих точек на плоскости проекций проводим из центра проекций через точки проецирующие лучи. Пересечение этих лучей с плоскостью проекций дает центральные проекции точек А, В, С.

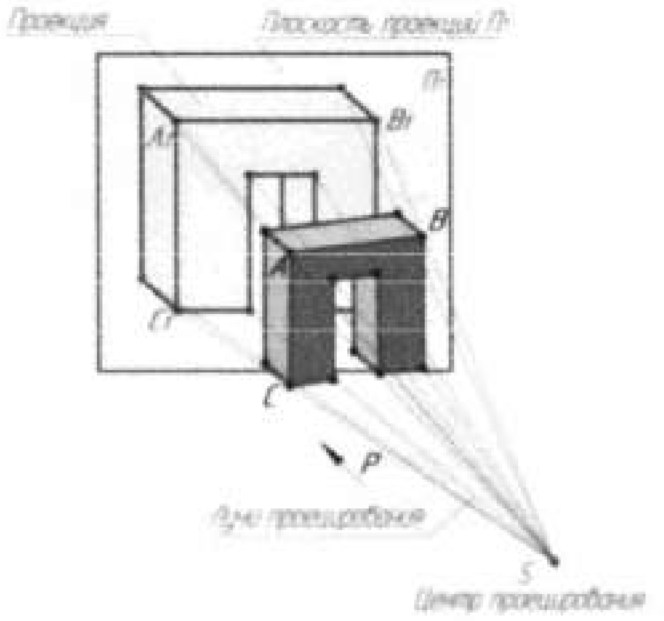


Рис. 2.2.

Если центр проецирования удалить в бесконечность, то проецирующие лучи будут проходить параллельно друг другу. При этом считают, что направление проецирования задано. На рис. 2.3 дана плоскость проекций π, объект проецирования - линии AB, AC и направление проецирования P. Для получения параллельной проекции линии AB, через точки A и B, определяющие эту линию проводим проецирующие лучи параллельно заданному направлению проецирования P. Пересечение этих лучей с плоскостью проекции π и даст нам решение данной задачи.

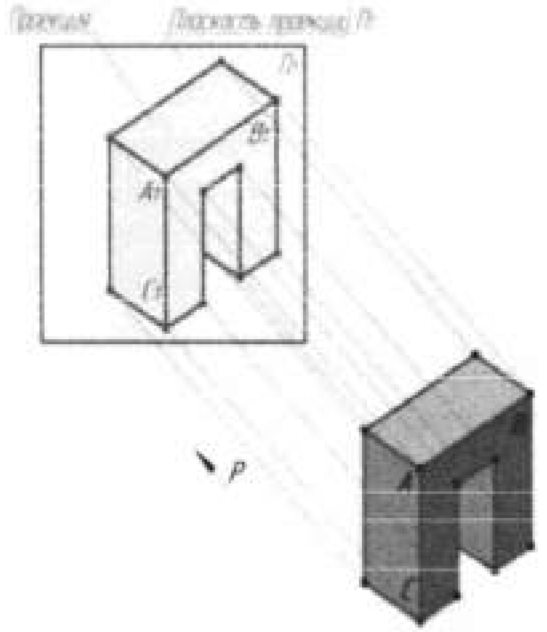


Рис. 2.3.

В зависимости от направления проецирующих лучей по отношению к плоскости проекций различают косоугольные ($\alpha \neq 90o$) прямоугольные (ортогональные) ($\alpha = 90o$) параллельные проекции. Свойства центрального проецирования:

1. Проекцией точки является точка;
2. Прямая, не проходящая через центр проецирования, проецируется прямой (проецирующая прямая – точка);
3. Плоская (двумерная) фигура, не принадлежащая проецирующей плоскости, проецируется двумерной фигурой (фигуры, принадлежащие проецирующей плоскости, проецируются вместе с ней в виде прямой);
4. Трехмерная фигура отображается двумерной;
5. При заданном центре проецирования фигуры на параллельных плоскостях подобны;
6. Центральное проецирование устанавливает однозначное соответствие между фигурой и ее изображением (кинофильм, фотопленка).

При параллельном проецировании сохраняются все свойства центрального проецирования, а также появляются новые:

1. Если отрезок прямой делится точкой в определенном отношении, то и длина проекции отрезка делится проекцией этой точки в том же отношении; 2. Проекции равных по длине отрезков взаимно параллельных прямых взаимно параллельны и равны по длине;
3. Плоская фигура, параллельная плоскости проекции, проецируется на эту плоскость в такую же фигуру;
4. Параллельный перенос фигуры в пространстве или плоскости проекций не изменяет вида и размера проекции фигуры.

2.2. Образование чертежа на двух и трех плоскостях проекции.

Рассмотренные выше методы проецирования позволяют построить проекционный чертеж заданного геометрического образа, но не позволяют решить обратную задачу - представить образ по его проекции, т.е. нет обратимости чертежа. Наиболее полное представление о геометрическом образе дает проецирование на две и три взаимно перпендикулярные плоскости проекций, которые затем совмещают с плоскостью чертежа. Этот способ получения комплексного чертежа был предложен французским геометром Гаспаром Монжем (рис. 2.4). На рис. 2.4, а изображены две взаимно перпендикулярные плоскости: горизонтальная плоскость проекций $\pi 1$ и фронтальная плоскость проекций $\pi 2$. Линия пересечения двух плоскостей проекций называется осью проекций (x, $\pi 1/\pi 2$). При совмещении плоскости проекций $\pi 1$ с плоскостью чертежа, в которой расположена плоскость проекций $\pi 2$, получаем комплексный чертеж (эпюр Монжа) точки А (рис. 2.4, б). Линия А"А' называется вертикальной линией связи. Отрезок А"АХ характеризует удаление точки А от плоскости $\pi 1$ и является координатой Z (аппликатой), А'АХ характеризует удаление точки А от плоскости $\pi 2$ - координата Y (ордината).

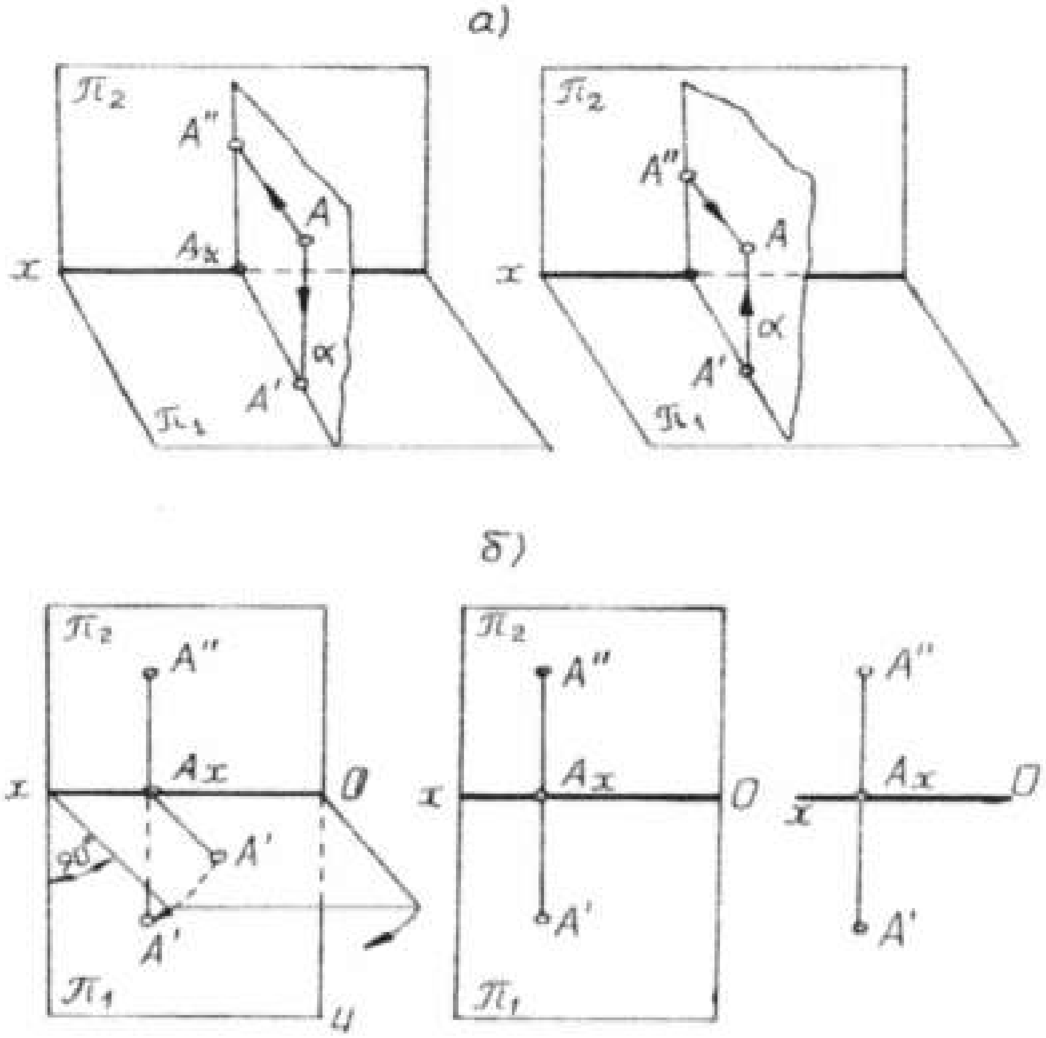
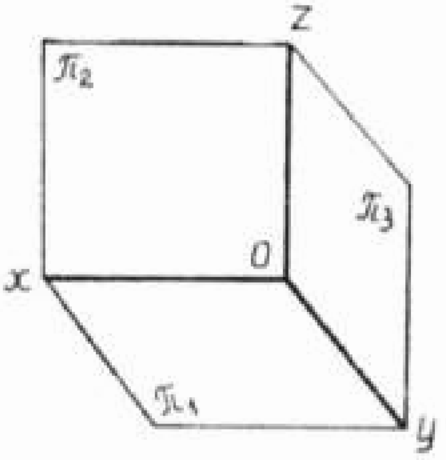
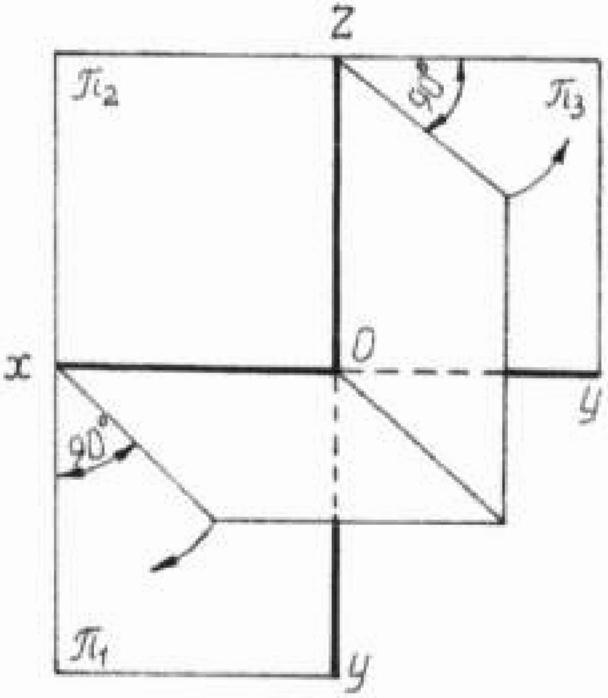


Рис. 2.4.

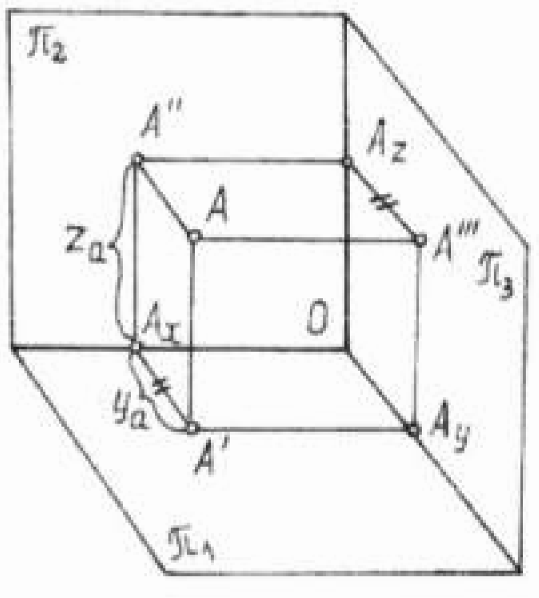
Несмотря на то, что проецирования на две взаимно перпендикулярные плоскости проекции дает нам обратимость чертежа во многих случаях для решения задач необходимо три и более проекции. Поэтому вводят три и более плоскостей проекций. Введем в систему π1/π2 третью вертикальную плоскость проекций, перпендикулярную к плоскостям проекций π1 и π2 рис.2. 5. Эта плоскость проекций называется профильной и обозначается π3. В этой системе оси проекций z или π2/π3, y или π1/π3 являются линиями пересечения фронтальной и горизонтальной плоскостей проекций с профильной соответственно. Пересечение всех трех осей проекций - точка О. (рис. 2.5.)



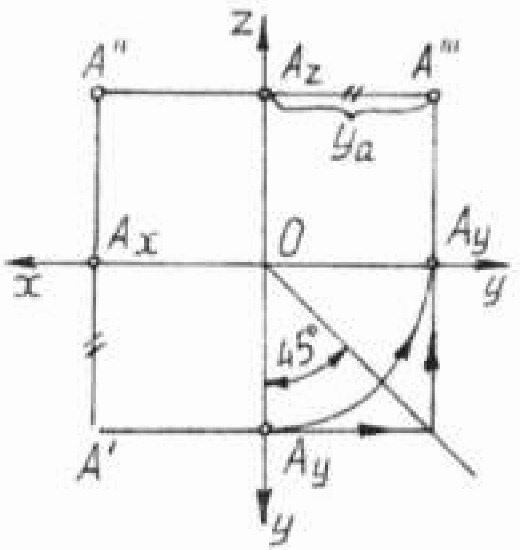
z
π_2
π_3
x
0
π_1
y



Z
π_2
90°
π_3
x
0
y
90°
π_1
y



π_2
A''
A_z
A
z_a
A'''
π_3
A_x
0
y_a
A'
A_y
π_1



z
A''
A_z
A'''
y_a
A_x
0
A_y
x
y
45°
A'
A_y
y

Практическая работа (Упражнение)

Тема 3.2 Проецирование отрезка прямой

Просцирование отрезка прямой линии на три плоскости проекций. Комплексный чертеж прямой линии.

Цель работы:

уметь: читать комплексные чертежи проекций отрезка прямой
строить третью проекцию отрезка прямой по двум заданным
знать: проецирование отрезка прямой линии на три плоскости проекций
комплексный чертеж отрезка прямой
расположение прямой относительно плоскостей проекций
формировать общие и профессиональные компетенции:
стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства;
использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

Прямая линия.

Для того чтобы построить проекцию прямой линии, достаточно построить проекции двух ее точек и одноименные проекции соединить. Относительно плоскостей проекций прямая может занимать различные положения. Если прямая непараллельная и (или) неперпендикулярная ни одной плоскости проекций ее называют прямой общего положения (рис. 2.6.).

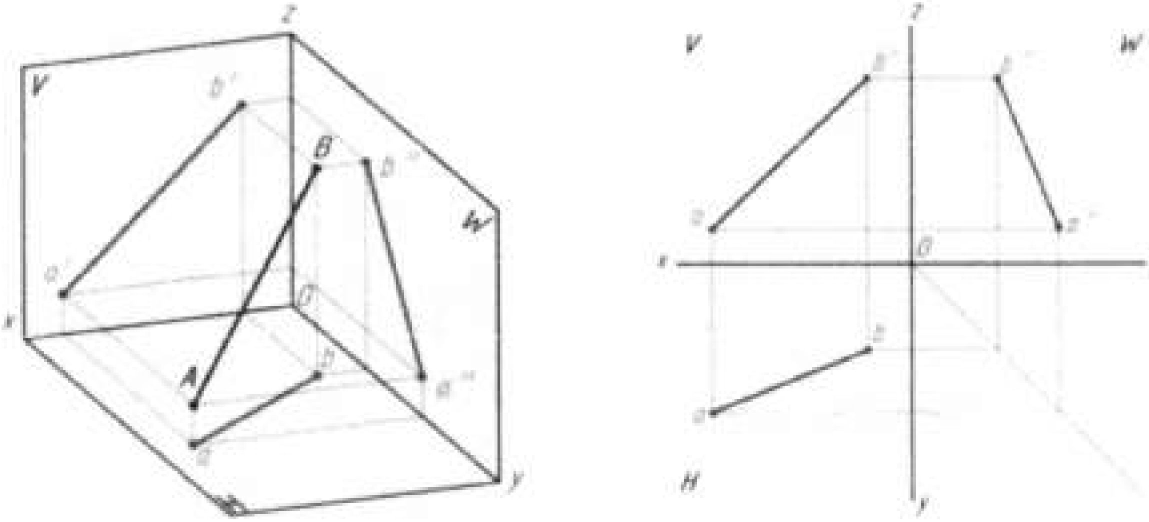


Рис. 2.6.

Если прямая параллельна одной из плоскости проекций, ее называют прямой уровня (рис. 2.7а, б, в). Проекция прямой, которая непараллельная оси проекций, представляет натуральную величину отрезка прямой.
Прямая, которая параллельна горизонтальной плоскости проекций называется горизонтальной прямой (рис. 2.7, а).
Прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций, называется фронтальной прямой (рис. 2.7, б).
Прямая, параллельная профильной плоскости проекций, называется профильной прямой (рис. 2.7, в). Прямая, перпендикулярная плоскости проекций, называется проецирующей прямой. На рис. 2.7, г приведена горизонтально - проецирующая прямая, рис. 2.7, д - фронтально - проецирующая прямая, рис. 2.7, е – профильно - проецирующая прямая.
Две прямые в пространстве могут пересекаться, быть параллельными и скрещиваться (рис. 2.8).
Если прямые АВ и СД параллельны, то их одноименные проекции параллельны (рис. 2.8а).
Если прямые АВ и СД пересекаются в некоторой точке Е, то проекции этой точки лежат на одной линии связи Е' Е'' (рис. 2.8, б).

Если прямые АВ и СД скрещиваются, то точки пересечения 1-2 и 3-4 одноименных проекций не лежат на одной линии связи (рис. 2.8, в). При этом представляет интерес, какая из изображенных на чертеже прямых выше другой или ближе другой к наблюдателю. Это определяется рассмотрением конкурирующих точек скрещивающихся прямых, проекции которых на одной из плоскостей проекций совпадают. Из рис. 2.8, в видно, что при взгляде сверху, по стрелке М, на плоскости проекций π1 точка 3 прямой СД закрывает точку 4 прямой АВ, поэтому- 4I показано в скобках. При взгляде спереди, по стрелке N точка 1 прямой СД закрывает на плоскости π2 точку 2 прямой АВ, поэтому 2II показано в скобках.

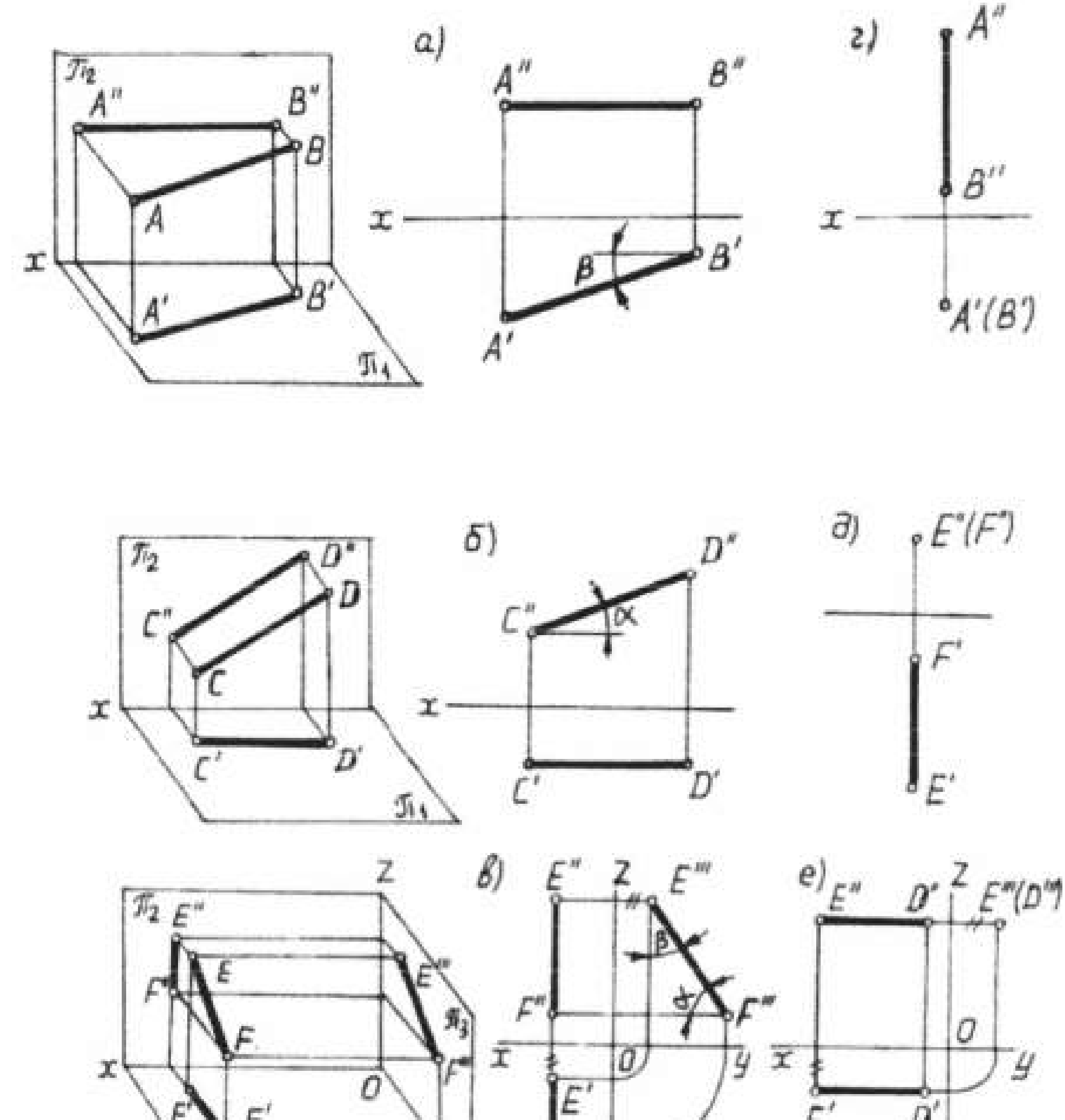


Рис. 2.7.

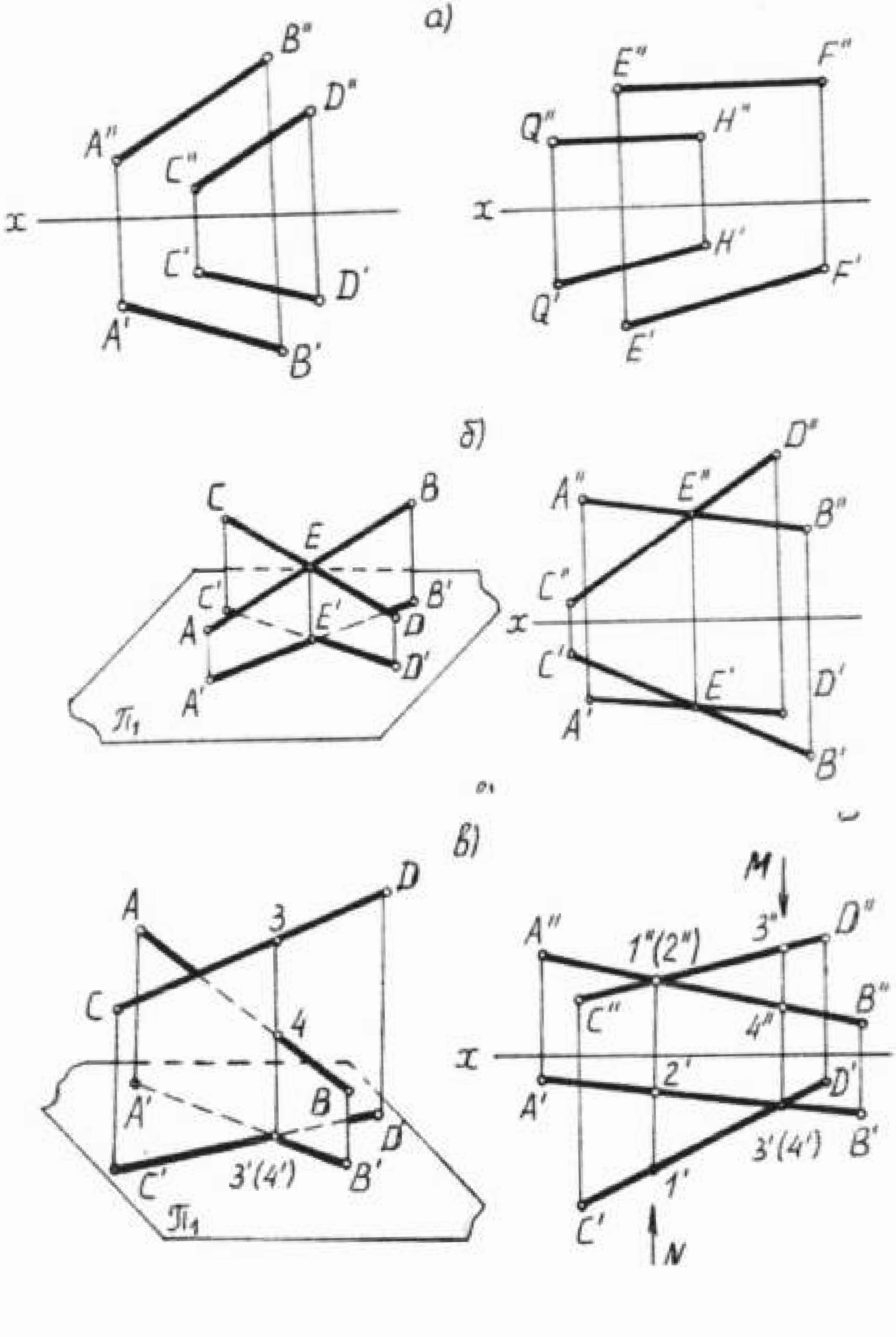

а)
A''
B''
C''
D''
x
C'
D'
A'
B'
E''
F''
Q''
H''
H'
F'
Q'
E'
б)
C
B
E
C'
B'
A
E'
D
D'
A'
π_1
D''
A''
E''
B''
C''
C'
E'
D'
A'
B'
в)
D
A
3
C
4
A'
B
D'
C'
3'(4')
B'
π_1
M
A''
1''(2'')
3''
D''
B''
C''
4''
2'
A'
D'
3'(4')
B'
1'
C'
N

Рис.2.8

Практическая работа (Упражнение)

Тема 3.3 Проецирование плоскости	Расположение плоскости относительно плоскостей проекций. Расположение плоскости на комплексном чертеже.
Цель работы:	*уметь:* читать комплексные чертежи плоскости *знать:* проецирование плоскости на комплексном чертеже расположение плоскости относительно плоскостей проекций взаимное расположение плоскостей *формировать общие и профессиональные компетенции:* стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства; использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

Плоскость.

Плоскость на чертеже (рис. 2.9) может быть задана проекциями трех точек, не лежащими на одной прямой (а), прямой и точкой, взятой вне прямой (б), двумя пересекающимися прямыми (в), двумя параллельными прямыми (г), плоской фигурой, например, треугольником (д). следами плоскости, т.е. линиями, по которым плоскость пересекает плоскость проекций (е). Плоскости относительно плоскостей проекций могут занимать общее и частное положение, Плоскость, не перпендикулярная ни к одной из плоскостей проекций называется плоскостью общего положения (рис. 2.10) Плоскости частного положения разделяются: на плоскости, проецирующие – перпендикулярные одной из плоскостей проекций, и на плоскости уровня – параллельные одной из плоскостей проекций. Проецирующие плоскости различают: а) горизонтально-проецирующие (плоскость перпендикулярна π 1); (рис. 2.11). б) фронтально-проецирующие (плоскость перпендикулярна π 2); (рис. 2.12). в) профильно-проецирующие (плоскость перпендикулярна π 3); (рис. 2.13). Плоскости уровня различают: а) горизонтальные (плоскость параллельная π 1) (рис. 2.14, а); б) фронтальные (плоскость параллельная π 2) (рис. 2.14, б); в) профильные (плоскость параллельная π 3) (рис. 2.14, в); Линию пересечения плоскости с плоскостью проекций называют следом (рис. 2.13). Линию пересечения плоскости с плоскостью проекции π 1 называют горизонтальным следом (π'), с плоскостью проекции π 2 – фронтальным следом (π "), с плоскостью проекции π 3 – профильным следом (π "'). В плоскости можно провести множество прямых. К прямым, занимающим особое положение в плоскости, относятся горизонтали, фронтали (рис. 2.15) и линии наибольшего наклона (линии ската) к плоскости проекций. Горизонталь - прямая, лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций (π 1). На рис. 2.16, а проекции горизонтали проведены через проекции C", C' точки C и 1", 1' точки 1 прямой AB плоскости, заданной проекциями точки C и прямой AB. Фронтальная проекция C"1" горизонтали параллельна оси x. Фронталь - прямая лежащая в плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций (π 2). На рис. 2.16, б проекции фронтали проведены через проекции 1", 1' и 2", 2' точек 1 и 2 проекций A"B", A'B', C"D", C'D' параллельных прямых AB и CD заданной плоскости. Горизонтальная проекция 1'2' фронтали параллельна оси x.

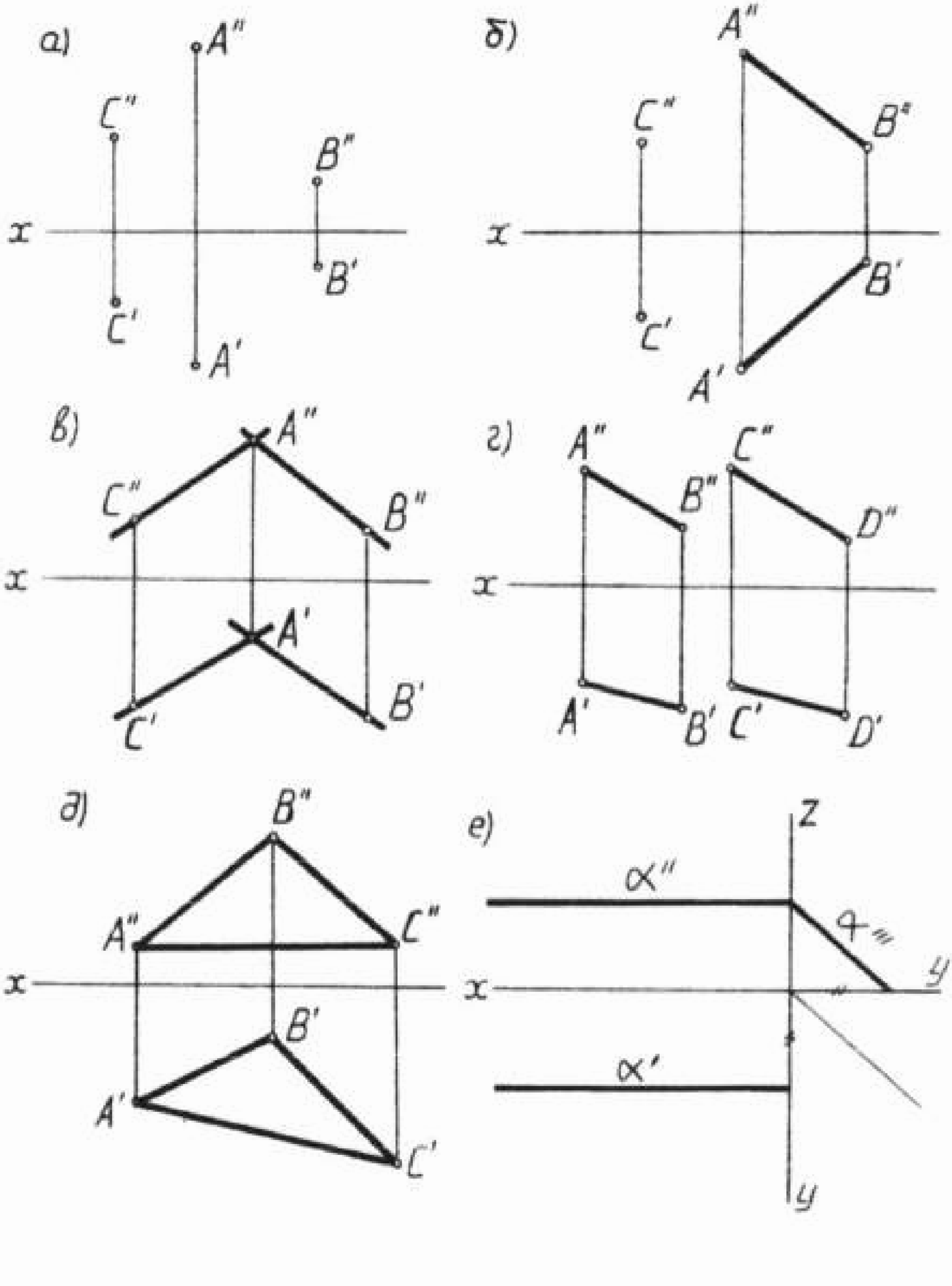

а)
A''
C''
B''
x
B'
C'
A'
б)
A''
C''
B''
x
B'
C'
A'
в)
A''
C''
B''
x
A'
B'
C'
г)
A''
C''
B''
D''
x
A'
B'
C'
D'
д)
B''
A''
C''
x
B'
A'
C'
е)
Z
α''
α'''
x
y
α'
y

Рис. 2. 9

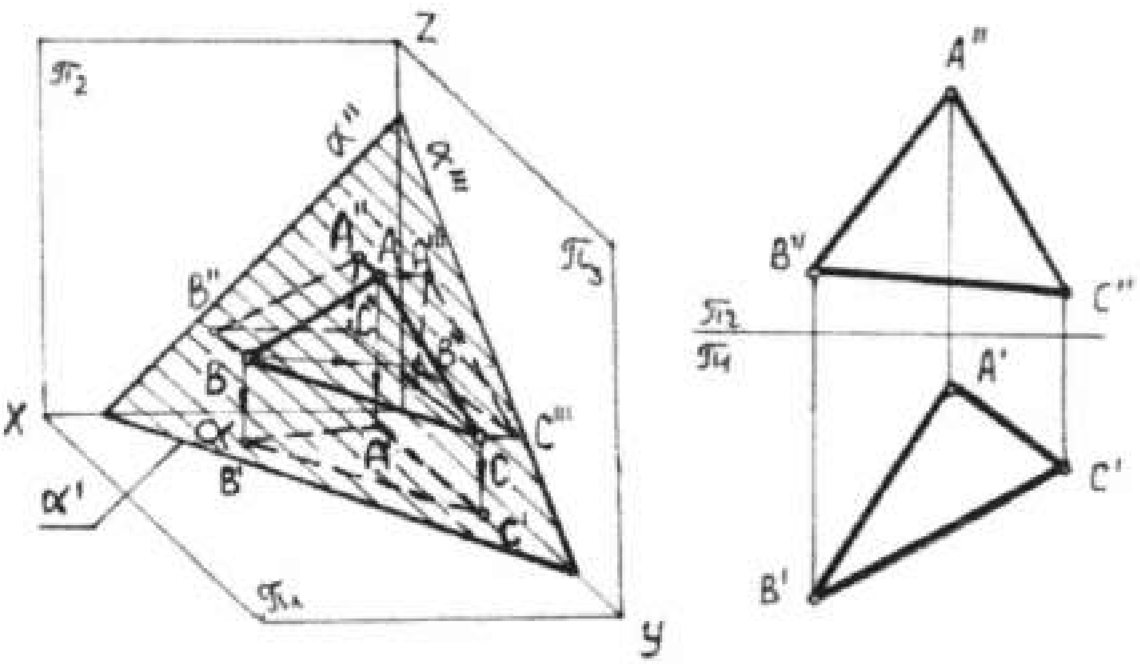


Рис. 2.10

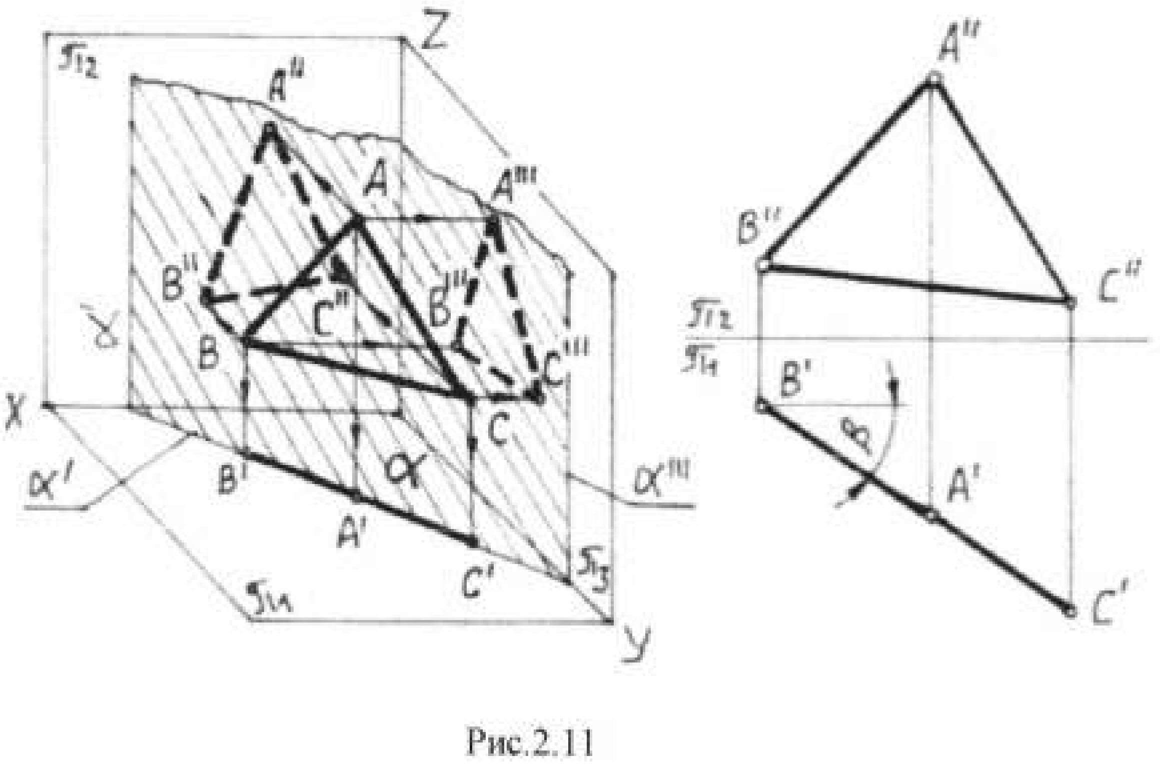


Рис.2.11

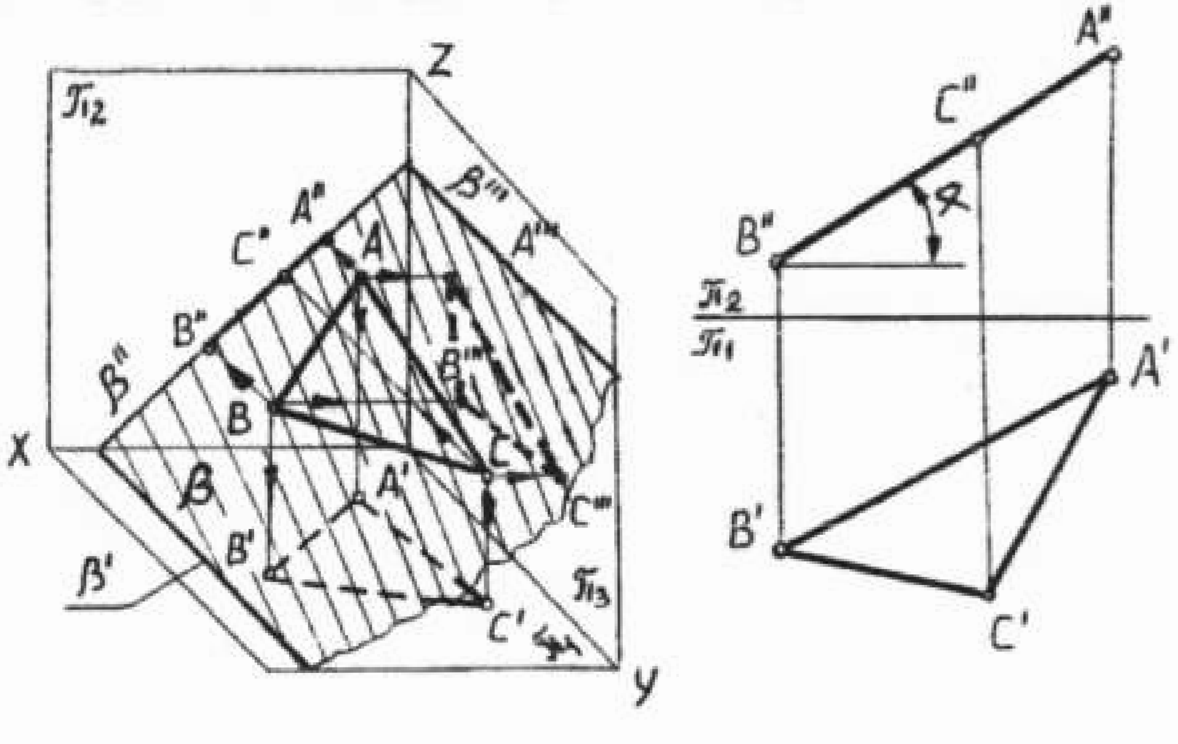


Рис.2.12

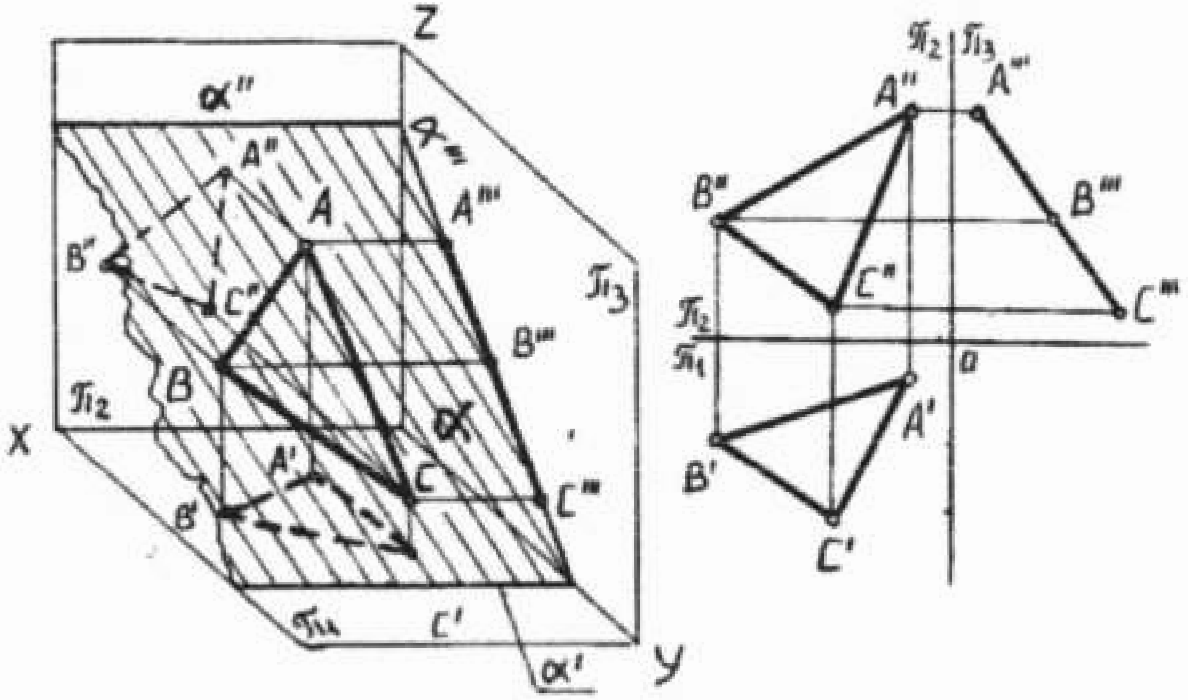


Рис.2.13

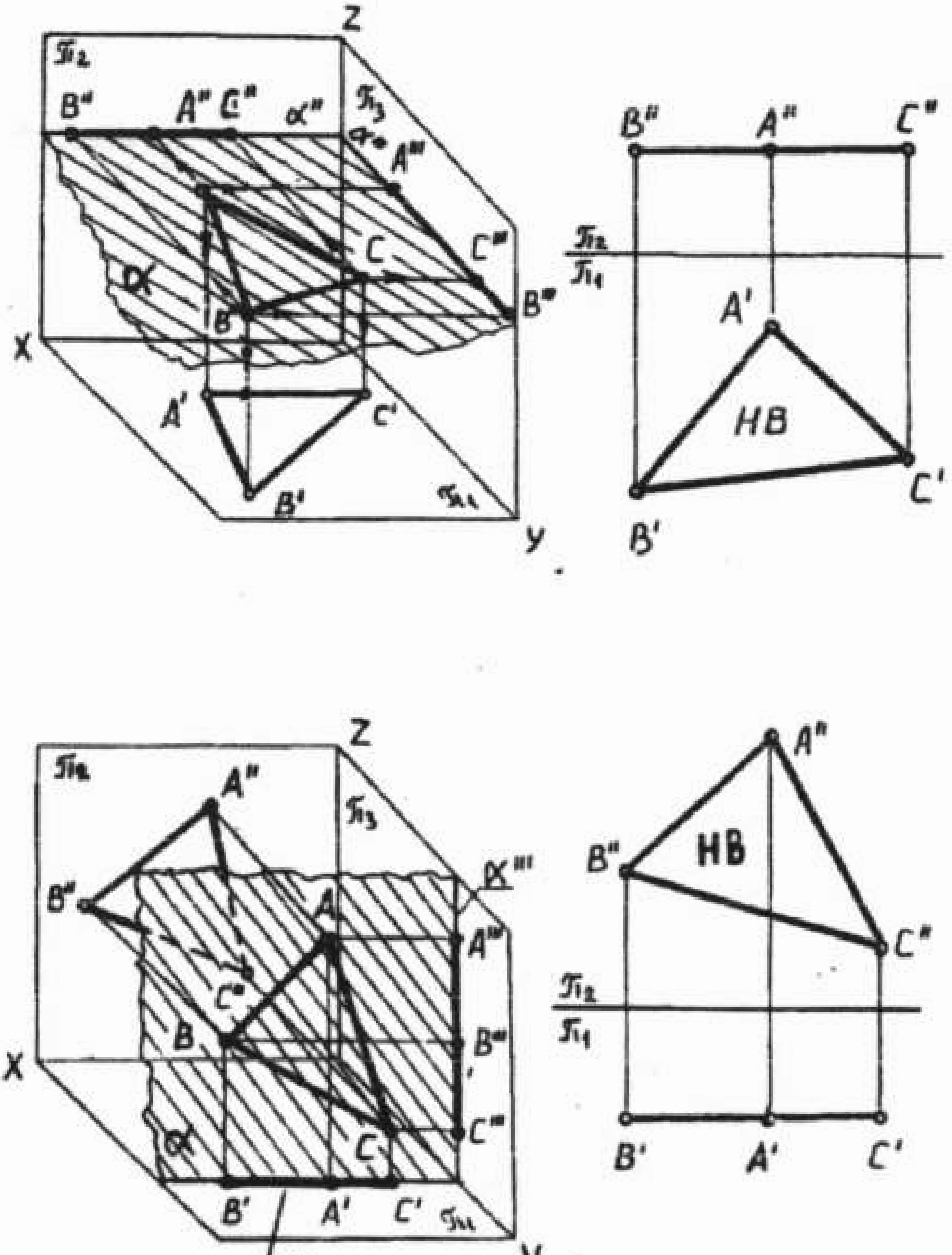

Z
π2
B" A" C" α"
π3
α≡ A'''
C C'''
α B'''
X B
A' C'
B' π1
Y
B" A" C"
π2
π1
A'
HB
B' C'
Z
π2
A"
π3
α'''
B" A A'''
C"
B B'''
C'''
X
α C
B' A' C' π1
Y
α'
A"
B" HB
C"
π2
π1
B' A' C'

Рис.2.14

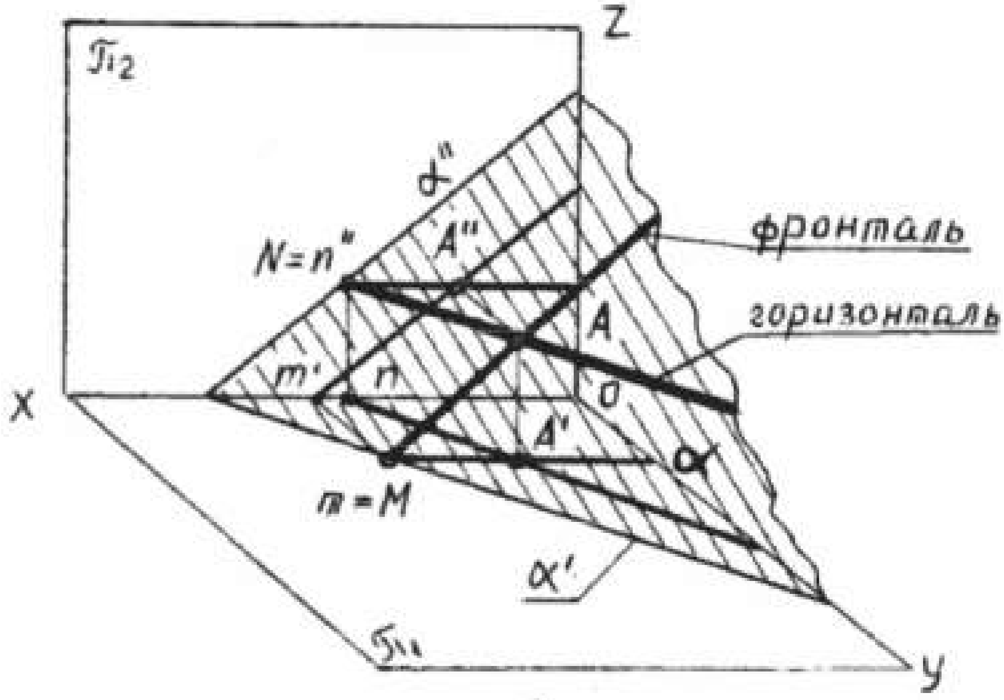


Рис. 2.15

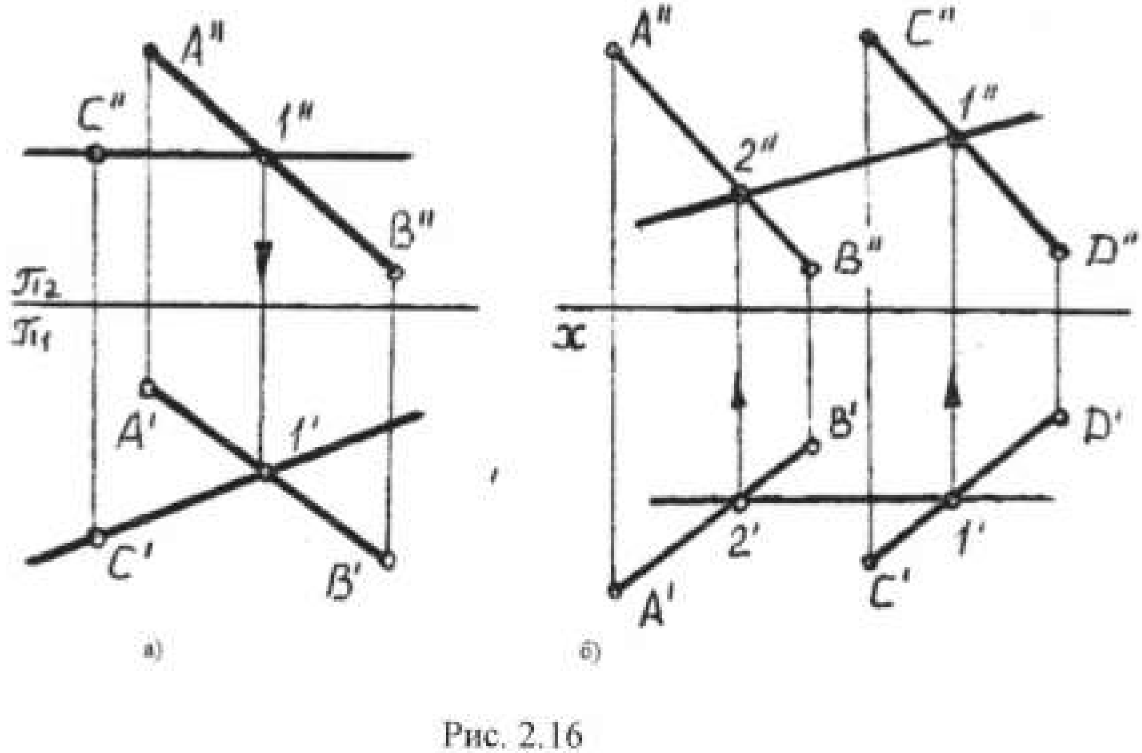
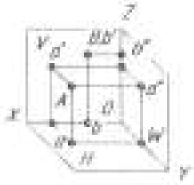
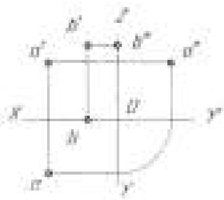


Рис. 2.16

Упражнение. Точка, отрезок, плоскость.
Построить наглядное изображение и комплексный чертеж точек A и B, отрезка AB, плоскости ABC.

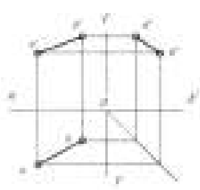
Проецирование точки





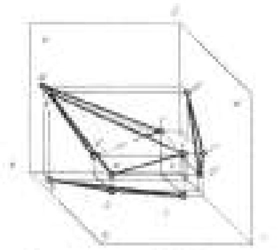
	X	Y	Z
A	30	20	10
B	35	0	30

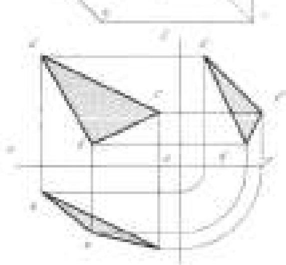
Проецирование отрезка



	X	Y	Z
A	40	10	10
B	10	20	20

Проецирование плоскости





	X	Y	Z
A	47	35	15
B	15	8	35
C	5	18	6

Практическая работа (Упражнение)

Тема 3.4 Аксонометрические проекции	Виды аксонометрических проекций: прямоугольные и косоугольные, Аксонометрические оси. Показатели искажения. Изображения геометрических фигур в аксонометрической проекции.
Цель работы:	*уметь:* изображать плоские фигуры, окружности и модели в аксонометрических проекциях; *знать*: виды аксонометрических проекций: прямоугольные и косоугольные; показатели искажения; *формировать общие и профессиональные компетенции:* стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства; использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЯХ

При составлении технических чертежей иногда возникает необходимость наряду с изображениями предметов в системе ортогональных проекций иметь более наглядные изображения. Для таких изображений применяют метод аксонометрического проецирования (аксонометрия — греческое слово, в дословном переводе оно означает измерение по осям; аксон — ось, метрео — измеряю).

Государственный стандарт устанавливает несколько видов аксонометрических проекций. Для построения наиболее наглядных изображений применяется прямоугольная изометрическая проекция (кратко - изометрия, от греч изо - равный, одинаковый). Положение аксонометрических осей этой проекции приведено на рисунке 1, а. Как видно из чертежа, оси проекции в изометрии располагаются под углом 120° друг к другу. При построении фигур размеры отрезков по осям x0 y0 z0 откладывают без изменения, т. е. действительные.

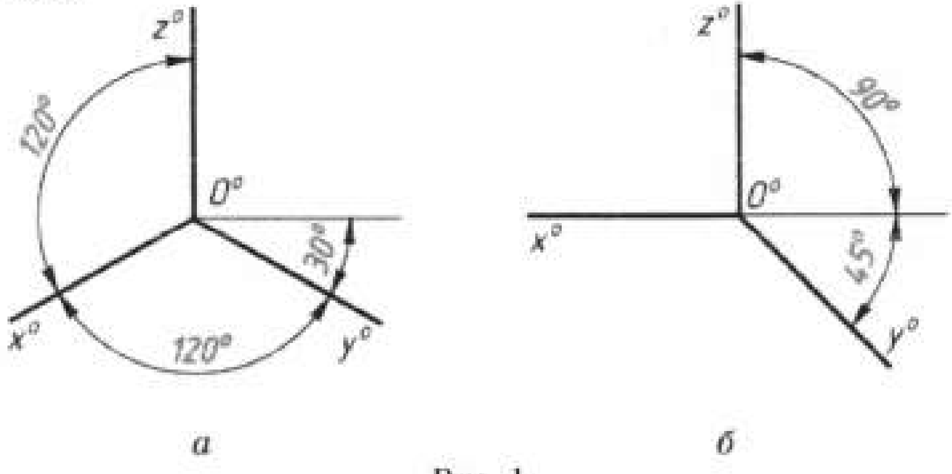


Рис. 1

В том случае, когда действительные размеры берут только по двум осям (x0, z0), проекцию называют диметрической (от греч. ди - дважды). Положение осей диметрической проекции дано на рисунке 1, б.

Сущность метода аксонометрического проецирования: предмет вместе с осями прямоугольных координат, к которым он отнесен в пространстве, проецируется на некоторую плоскость так, что ни одна из его координатных осей не проецируется на нее в точку, а значит сам предмет проецируется на эту плоскость проекций в трех измерениях.

На рис. 2 на некоторую плоскость проекций *P* спроецирована находящаяся в пространстве система координат *x, y, z*. Проекции *xp, yp, zp* осей координат на плоскость *P* называются *аксонометрическими осями.*

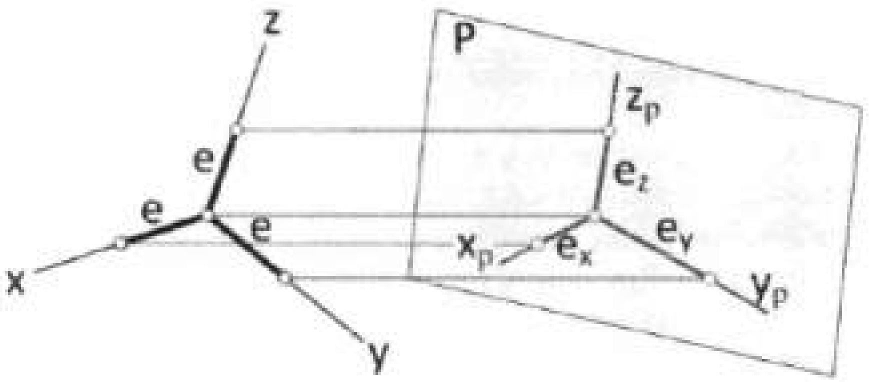


Рис. 2

На осях координат в пространстве отложены равные отрезки *e*. Как видно из чертежа, их проекции *ex, ey, ez* на плоскость *P* в общем случае не равны отрезку *e* и не равны между собой. Это значит, что размеры предмета в аксонометрических проекциях по всем трем осям искажаются. Изменение линейных размеров вдоль осей характеризуется показателями (коэффициентами) искажения вдоль осей.

Показателем искажения называется отношение длины отрезка на аксонометрической оси к длине такого же отрезка на соответствующей оси прямоугольной системы координат в пространстве.

Показателем искажения вдоль оси *x* обозначим буквой *k*,
по оси y – буквой *m*, по оси *z* – буквой *n*,
тогда: *k=ex/e; m=ey/e; n=ez/e*.

Величина показателей искажения и соотношение между ними зависят от расположения плоскости проекций и от направления проецирования.

В практике построения аксонометрических проекций обычно пользуются не самими коэффициентами искажения, а некоторыми величинами, пропорциональными величинам коэффициентов искажения: *K: M: N = k: m: n*. Эти величины называют **приведенными коэффициентами искажения.**

КЛАССИФИКАЦИЯ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Все множество аксонометрических проекций подразделяется на две группы:

1 Прямоугольные проекции – получены при направлении проецирования, перпендикулярном аксонометрической плоскости.

2 Косоугольные проекции – получены при направлении проецирования, выбранном под острым углом к аксонометрической плоскости.

Кроме того, каждая из указанных групп делится еще и по признаку соотношения аксонометрических масштабов или показателей (коэффициентов) искажения. По этому признаку аксонометрические проекции можно разделить на следующие виды:

а) **Изометрические** - показатели искажения по всем трем осям одинаковы (изос — одинаковый).

б) **Диметрические** - показатели искажения по двум осям равны между собой, а третий не равен (ди — двойной).

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Прямоугольная изометрическая проекция

В прямоугольной изометрии все коэффициенты равны между собой: $k = m = n$, $k2 + m2 + n2=2$,

тогда это равенство можно записать в виде $3k2=2$, откуда $k = \sqrt{2/3} \approx 0{,}82$.
Таким образом, в изометрии показатель искажения равен ~ 0,82. Это означает, что в прямоугольной изометрии все размеры изображаемого предмета сокращаются в 0,82 раза. Для упрощения построений используют приведенные коэффициенты искажения $k=m=n=1$, что соответствует увеличению размеров изображения по сравнению с действительными в 1,22 раза (1:0,82 ~1,22).
Расположение осей изометрической проекции показано на рис. 3.

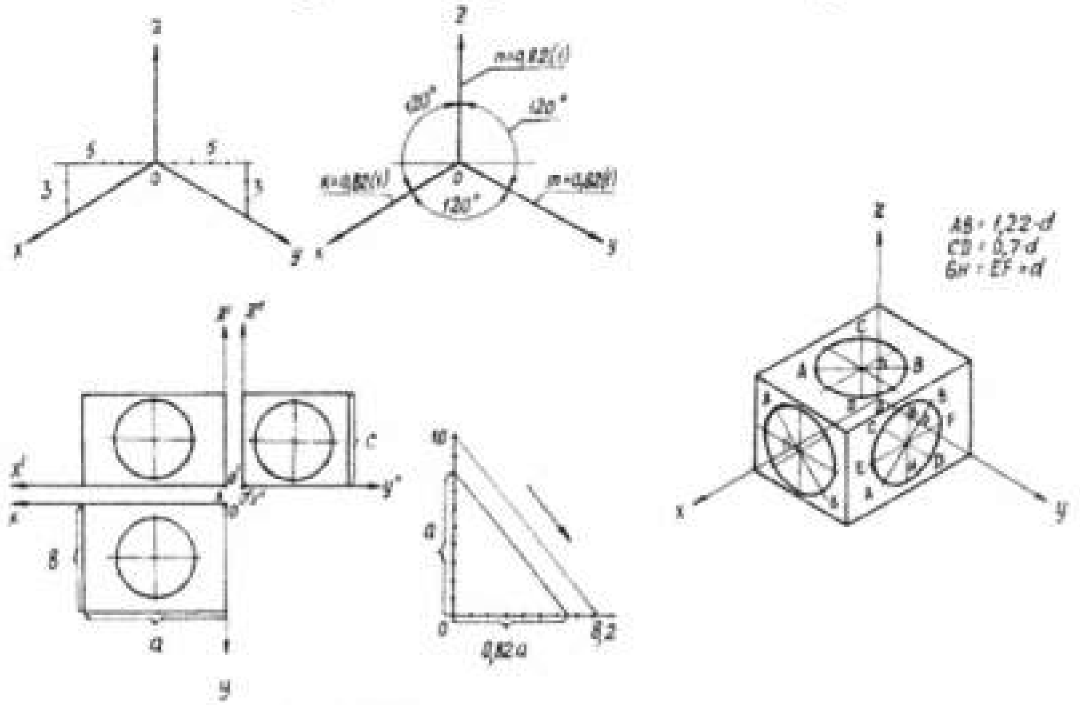


Рис. 3. Прямоугольная изометрия.

Прямоугольная диметрическая проекция

В прямоугольной диметрии показатели искажения по двум осям одинаковы, т. е. $k = n$. Третий показатель искажения выбираем вдвое меньше двух других, т. е. $m =1/2k$. Тогда равенство$k2+m2+n2= 2$ примет такой вид: $2k2+1/4k2=2$; откуда $k= \sqrt{8/9}=0{,}94$;
$m = 0{,}47$.
В целях упрощения построений используем приведенные коэффициенты искажения: $k=n=1$; $m=0{,}5$. Увеличение в этом случае составляет 6% (выражается числом Рисунок 4 1,06=1:0,94).
Расположение осей диметрической проекции показано на рис. 4.

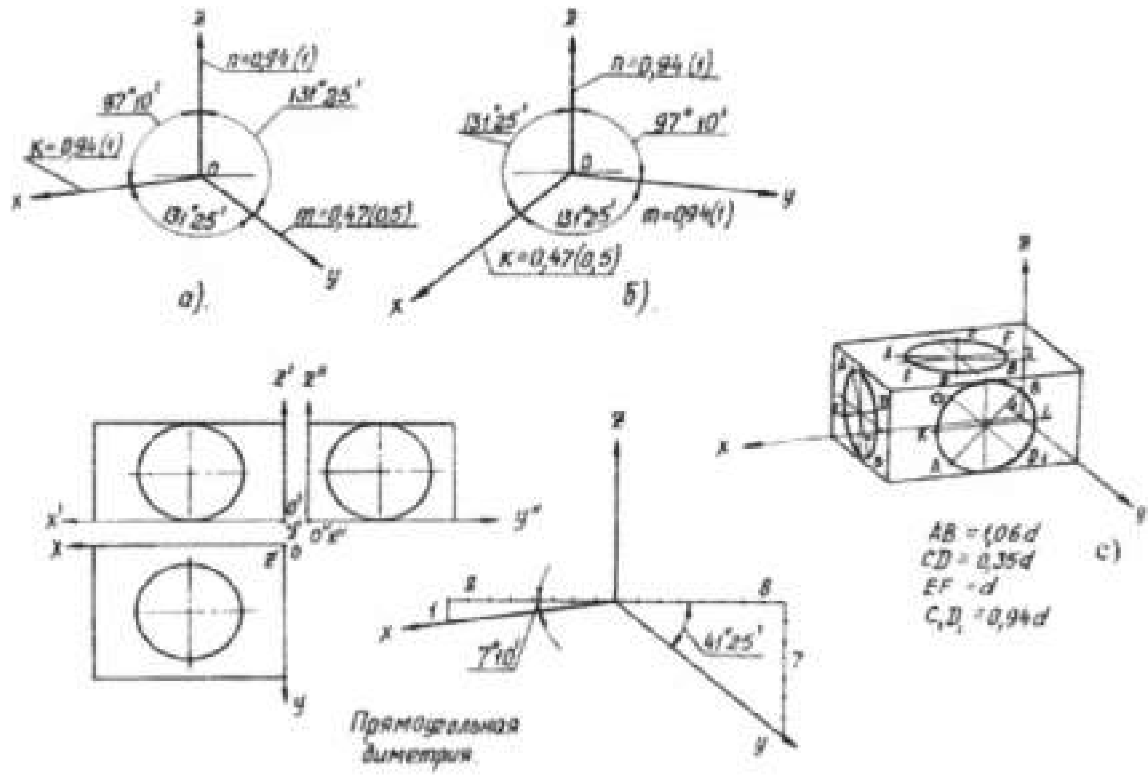


Рис. 4. Прямоугольная диметрия.

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ.

Построение аксонометрических проекций начинают с проведения осей. Параллельно им откладывают размеры отрезков.

Рассмотрим построение аксонометрических проекций плоских геометрических фигур, расположенных в горизонтальной плоскости. Построения даны в изометрической проекции.

Треугольник. Симметрично точке 0^0 (рис. 5) по оси x^0 откладывают отрезки C^0A^0 и 0^0E^0, равные половине стороны треугольника, а по оси y^0 - его высоту 0^0C^0. Полученные точки A^0, B^0 и C^0 соединяют отрезками прямых.

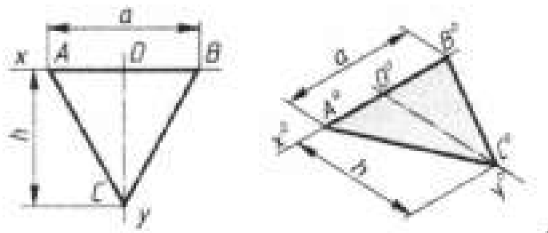


рис. 5

КВАДРАТ. По оси x^0 от точки 0^0 (рис. 6) откладывают отрезок а, равный стороне квадрата, вдоль оси y^0 - также отрезок а. Затем проводят отрезки, параллельные отложенным.

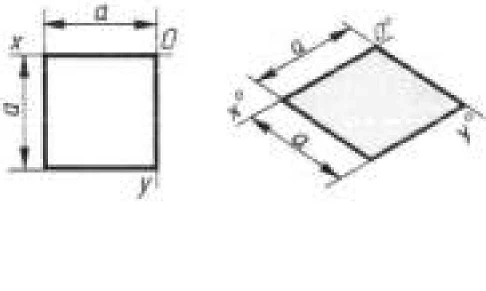


рис. 6

ШЕСТИУГОЛЬНИК. По оси x^0 вправо и влево от точки 0^0 (рис. 7) откладывают отрезки, равные стороне шестиугольника. По оси y^0 симметрично точке 0^0откладывают отрезки, равные половине расстояния L между противоположными сторонами шестиугольника, т. е. L/2

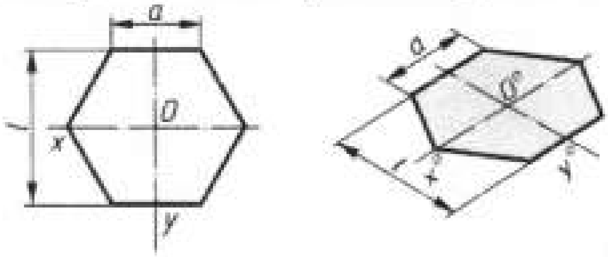


рис. 7

АКСОНОМЕТРИЯ ОКРУЖНОСТИ

В общем случае окружность в асонометрии изображается в виде эллипса. В прямоугольной аксонометрии большая ось этого эллипса перпендикулярна координатной оси, отсутствующей в плоскости проекций, которой параллельна плоскость окружности (рис. 8 а, б).
На этом рисунке показаны положения осей эллипсов и их размеры в прямоугольной изометрии (рис. 8 а) и в прямоугольной диметрии (рис. 8 б).

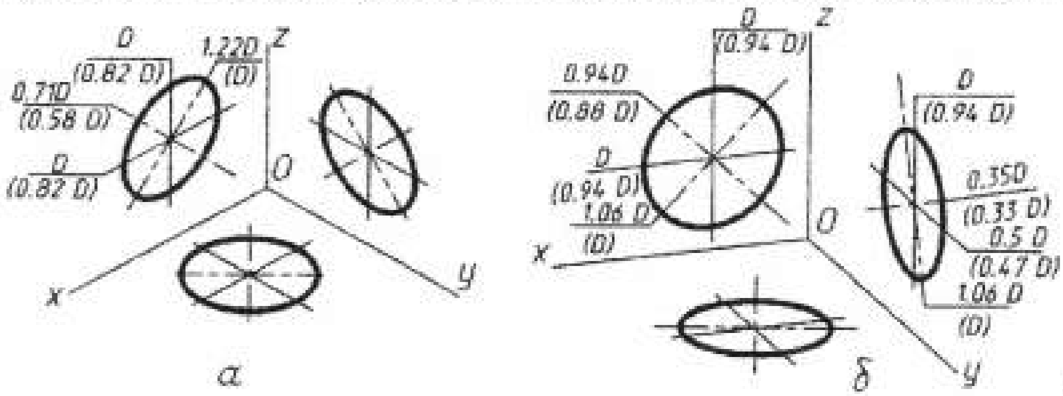


Рис. 8.

Задание №1

Выполните прямоугольные и изометрические проекции геометрических фигур: квадрата со стороной 50 мм; правильного треугольника, вписанного в окружность Ø50 мм; правильного шестиугольника, вписанного в окружность Ø50 мм и круга Ø50 мм.

Рис.9. Прямоугольная и изометрические проекции квадрата

Для выполнения изометрической проекции любой детали необходимо знать правила построения изометрических проекций плоских и объемных геометрических фигур.

Правила построения изометрических проекций геометрических фигур. Построение любой плоской фигуры следует начинать с проведения осей изометрических проекций.

При построении изометрической проекции квадрата (рис. 1) из точки О по аксонометрическим осям откладывают в обе стороны половину длины стороны квадрата. Через полученные засечки проводят прямые, параллельные осям.

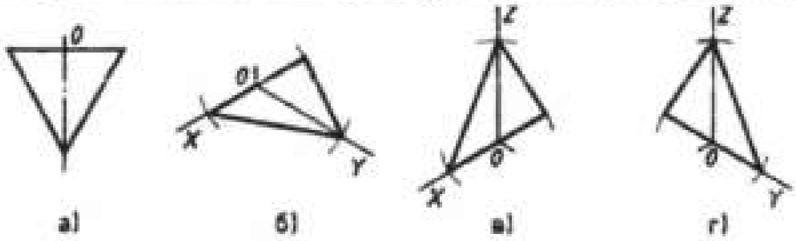


Рис.10. Прямоугольная и изометрические проекции треугольника

При построении изометрической проекции шестиугольника (рис. 3) из точки О по одной из осей откладывают (в обе стороны) радиус описанной окружности, а по другой — Н/2. Через полученные засечки проводят прямые, параллельные одной из осей, и на них откладывают длину стороны шестиугольника. Соединяют полученные засечки отрезками прямых.

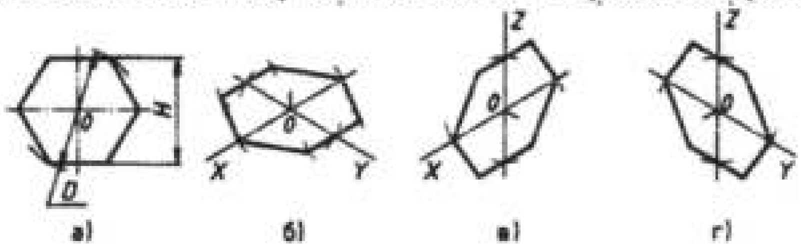


Рис.11 Прямоугольная и изометрические проекции шестиугольника

При построении изометрической проекции круга (рис. 4) из точки О по осям координат откладывают отрезки, равные его радиусу. Через полученные засечки проводят прямые, параллельные осям, получая аксонометрическую проекцию квадрата. Из вершин 1, 3 проводят дуги CD и KL радиусом 3С. Соединяют точки 2 с 4, 3 с С и 3 с D. В пересечениях прямых получаются центры, а и б малых дуг, проведя которые получают овал, заменяющий аксонометрическую проекцию круга.

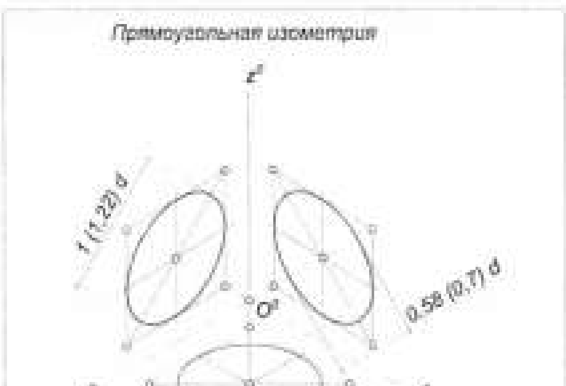
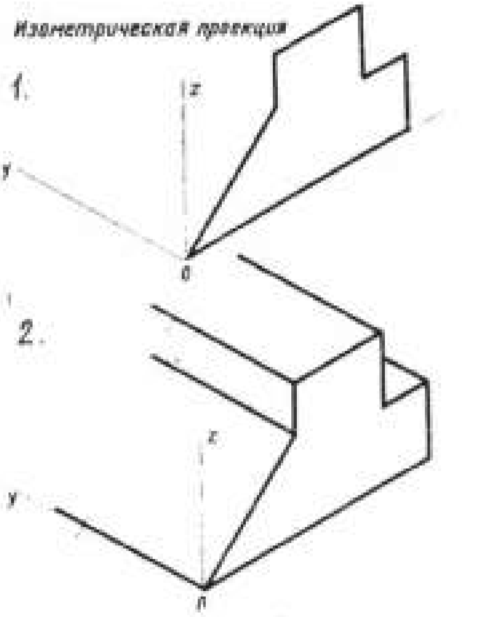


Рис.12. Прямоугольная изометрия, проекции окружности

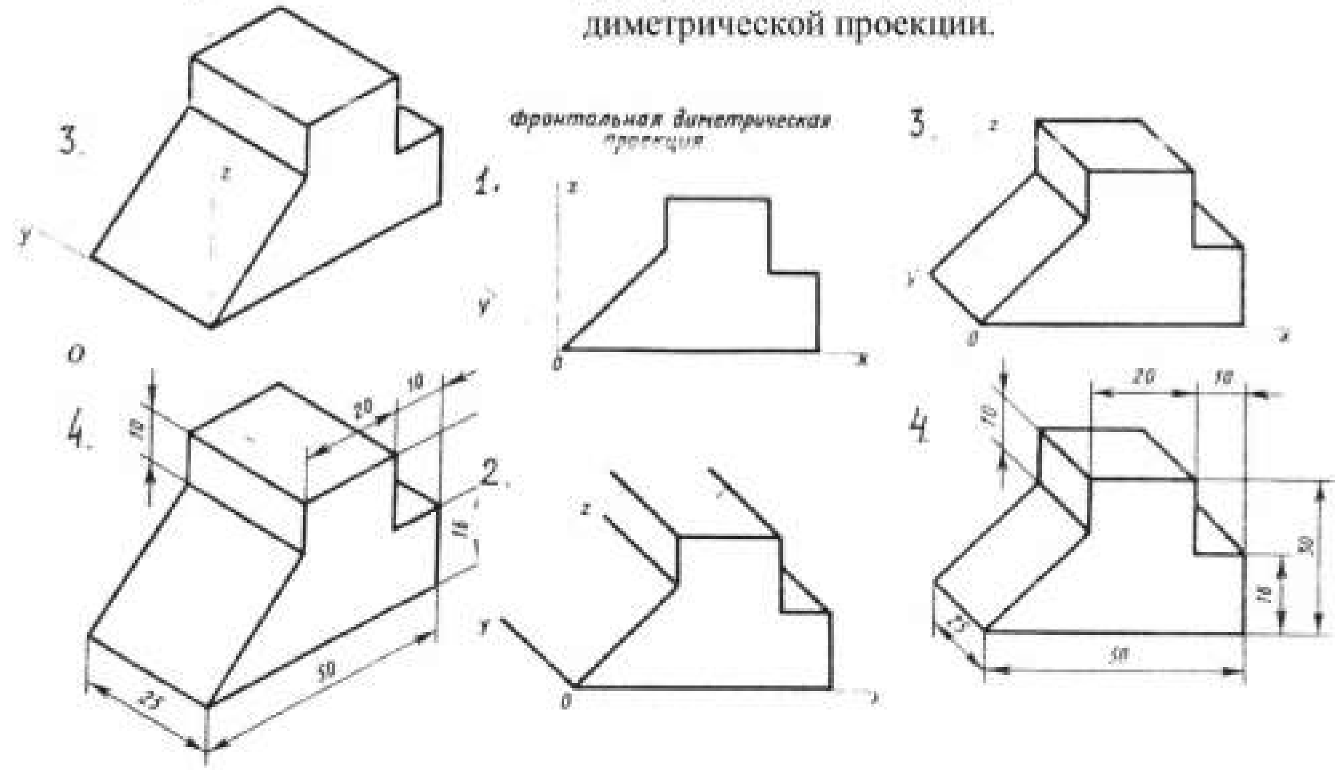
При построении аксонометрической проекции предметов важен правильный выбор её вида. Вид аксонометрической проекции определяется сложностью и особенностью формы изображаемого объекта, необходимостью обеспечить наилучшую наглядность и выразительность изображения объекта. Прямоугольные проекции чаще применяют в качестве наглядных изображений.

Изображение предмета начинают с построения осей выбранной аксонометрической проекции, соответственно которым строятся контурные очертания предмета.



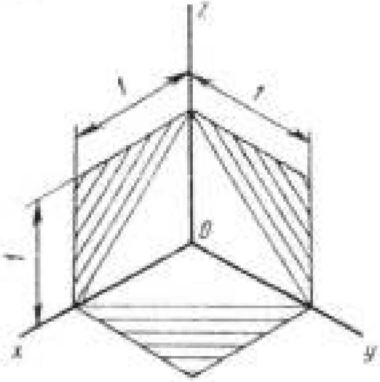
1.Проведём оси. Строят переднюю грань детали, откладывая действительные размеры по осям X, Y, Z.
2.Из вершин полученной фигуры проводят параллельно оси Y рёбра, уходящие вдаль. Вдоль них отклады-вают размер толщины детали.
3.Полученные засечки соединяют.
4.Удаляют лишние линии. Обводят видимый контур.
Внимание на экран!

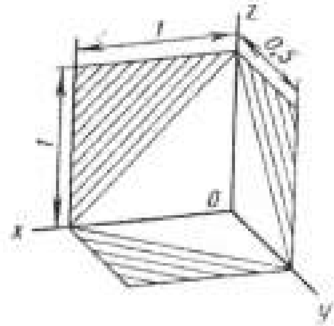
Сравнить аксонометрические проекции моделей, выполненные в изометрии и фронтальной диметрической проекции.

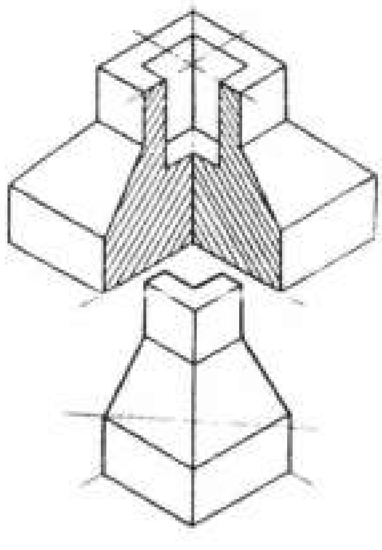


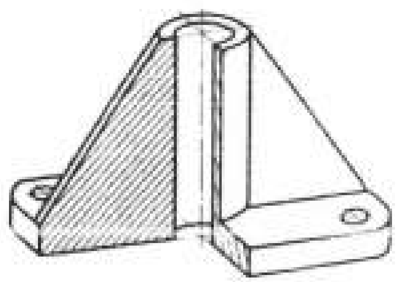
Условности в аксонометрии (штриховка в аксонометрических проекциях).

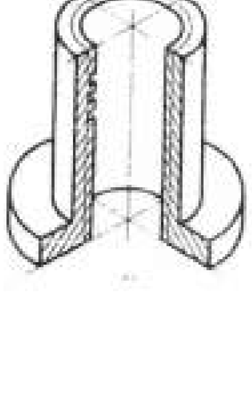
Линии штриховки разрезов и сечений в аксонометрических проекциях выполняют параллельно одной из диагоналей квадратов, стороны которых расположены в соответствующих координатных плоскостях параллельно аксонометрическим



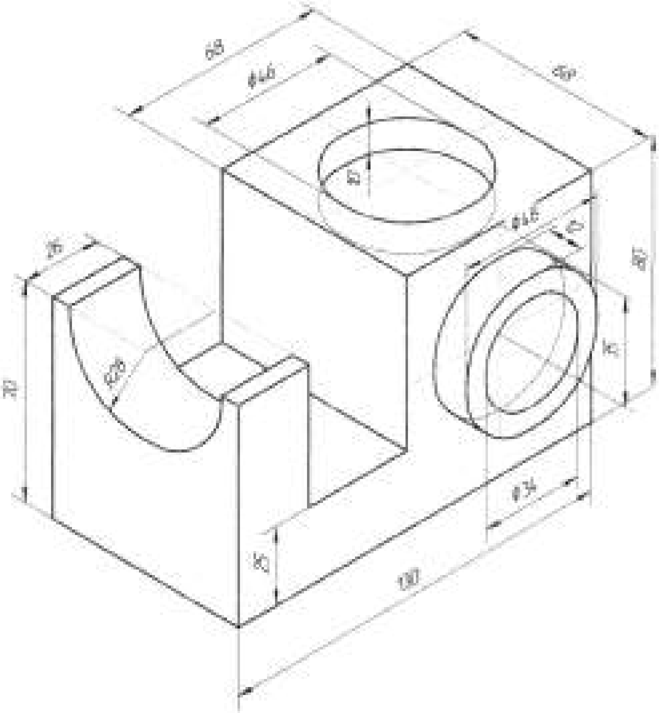




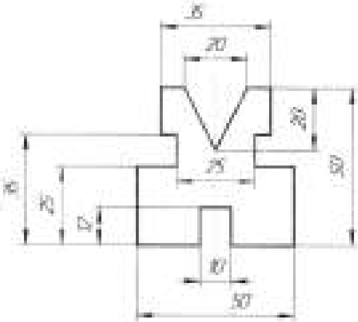




Построить изометрические проекции детали. Размеры не наносить.



Построить изометрические проекции плоской фигуры

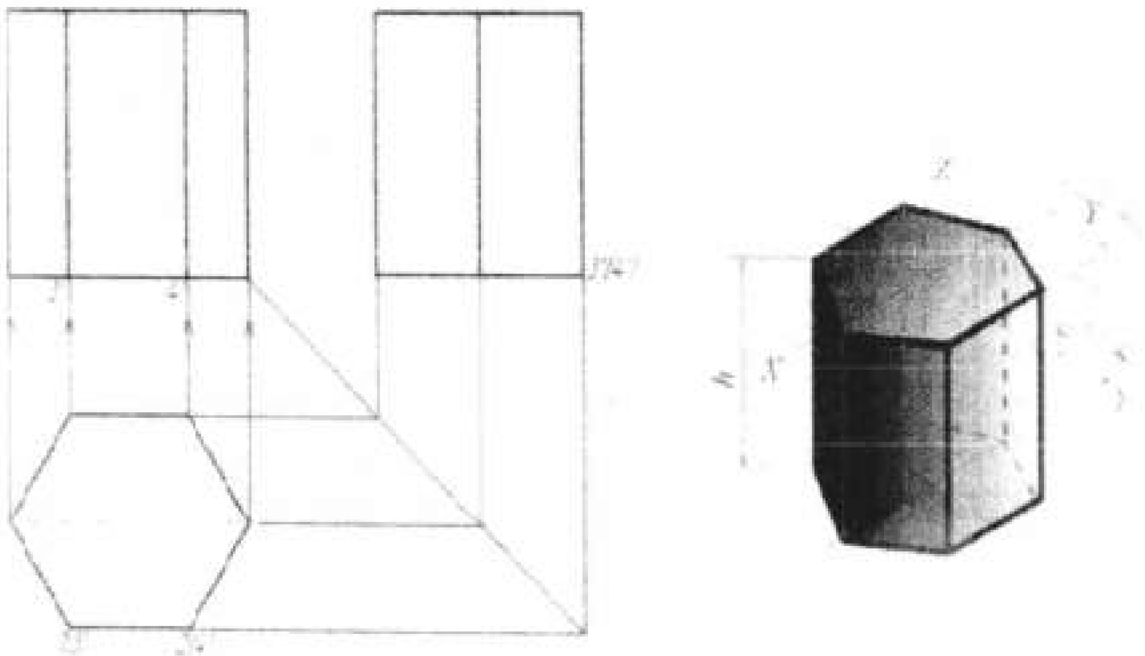


Практическая работа №3

Тема 3.5 Проецирование геометрических тел	1.Построение проекций геометрических тел. 2.Построение комплексных чертежей и геометрических проекций геометрических тел с нахождением проекций точек, принадлежащих поверхности данного тела.
Цель работы:	*уметь:* строить проекции геометрических тел; определять проекции точек, принадлежащих поверхностям, строить аксонометрические проекции геометрических тел; *знать:* способ построения проекций геометрических тел; *формировать общие и профессиональные компетенции:* стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства; использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

Проекция призм

Построение проекций правильной прямой шестиугольной призмы (рисунок 13.1) начинается с выполнения ее горизонтальной проекции - правильного шестиугольника. Из вершин этого шестиугольника проводят вертикальные линии связи и строят фронтальную проекцию нижнего основания призмы. Данная проекция изображается отрезком горизонтальной прямой. От этой прямой вверх откладывают высоту призмы и строят фронтальную проекцию верхнего основания. Затем вычерчивают фронтальные проекции ребер - отрезки вертикальных прямых, равные высоте призмы. Фронтальные проекции передних и задних ребер совпадают. Горизонтальные проекции боковых граней изображаются в виде отрезков прямых. Передняя боковая грань *1234* изображается на плоскости *V* без искажения, а на плоскости *W* - в виде отрезка прямой. Фронтальные и профильные проекции остальных боковых граней изображается с искажением.



1

Рисунок

На рисунке 2 представлены фронтальная, горизонтальная проекции правильной пирамиды и ее изометрическое изображение.

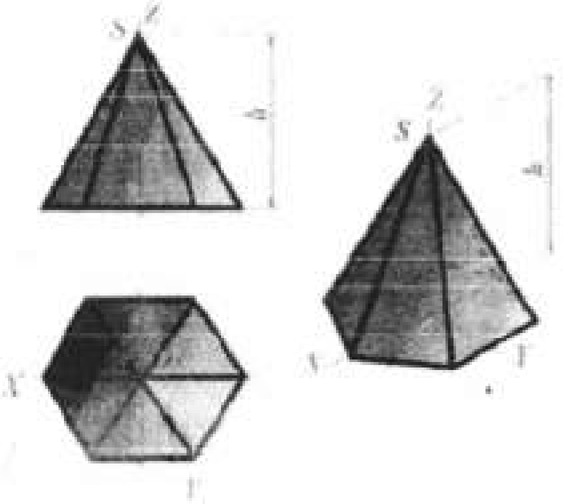


Рисунок 2

Построение горизонтальной и фронтальной проекции цилиндра и изометрической проекции цилиндра показано на рисунке 3.

Построение начинают с изображения основания цилиндра, т.е. двух проекций окружности. Так как окружность расположена на плоскости *H*, то она проецируется на эту плоскость без искажения. Фронтальная проекция окружности представляет собой отрезок горизонтальной прямой линии, равный диаметру окружности основания.

После построения основания на фронтальной проекции проводят две очерковые (крайние) образующие и на них откладывают высоту цилиндра. Проводят отрезок горизонтальной прямой, который является фронтальной проекцией верхнего основания цилиндра.

Во втором случае (рисунок 56) вспомогательной линией, проходящей через точку *A*, будет окружность, расположенная на конической поверхности и параллельная плоскости *H*. Фронтальная проекция этой окружности изображается в виде отрезка b' c' горизонтальной прямой, величина которого равна диаметру вспомогательной окружности. Искомая горизонтальная проекция, *a* точки *A* находится на пересечении линии связи, опущенной из точки a', с горизонтальной проекции вспомогательной окружности.

Если заданная фронтальная проекция b' точки *B* расположена на контурной (очерковой) образующей *SK*, то горизонтальная проекция точки находится без вспомогательных линий (рисунок 56).

В изометрической проекции точку *A*, находящуюся на поверхности конуса, строят по трем координатам (рисунок 13.3 в): $x_A=n$, $y_A=m$, $z_A=h$. Эти координаты последовательно откладывают по направлениям, параллельным изометрическим осям. В рассматриваемом примере от точки *O* по оси x отложена координата $x_A=n$; из конца ее параллельно оси *y* проведена прямая, на которой отложена координата $y_A=m$; из конца отрезка, равного *m*, параллельно оси z проведена прямая, на которой отложена координата $z_A=h$. В результате построений получим искомую точку А

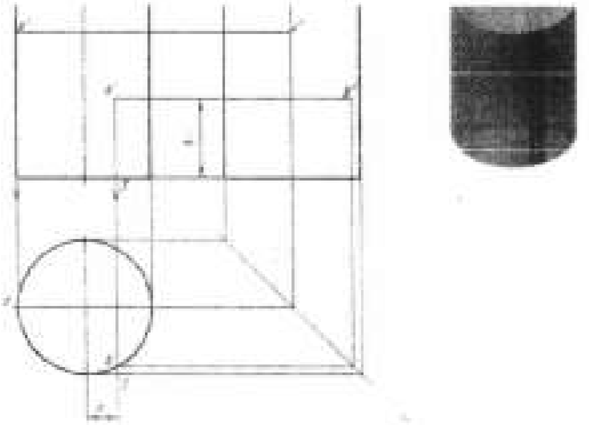


Рисунок 3

Определение недостающих проекций точек *А и В*, расположенных на поверхности цилиндра (рисунок 13.3), по заданным фронтальным проекциям в данном случае затруднений не вызывает, так как вся горизонтальная проекция боковой поверхности цилиндра представляет собой окружность, следовательно, горизонтальные проекции точек *А и В* можно найти, проводя из данных точек, *a' и b'* вертикальные линии связи до их пересечения с окружностью в искомых точках, *a* и *b*.

Профильные проекции точек *А и В* строят также с помощью вертикальных и горизонтальных линий связи.

Проекции конусов

Наглядное изображение прямого кругового конуса показано на рисунке 13.4а Боковая поверхность конуса получена вращением отрезка *BS* вокруг оси, пересекающий отрезок в точке *S.* Последовательность построения двух проекций конуса показана на рисунке 4б,в. Сначала строят две проекции основания. Горизонтальная проекция основания - окружность. Фронтальной проекцией будет отрезок горизонтальной прямой, равный диаметру этой окружности (рисунок 4б). На фронтальной проекции из середины основания восставляют перпендикуляр и на нем откладывают высоту конуса (рисунок 13.4в). Полученную фронтальную проекцию вершины конуса соединяют прямыми с концами фронтальной проекции основания и получают фронтальную проекцию конуса.

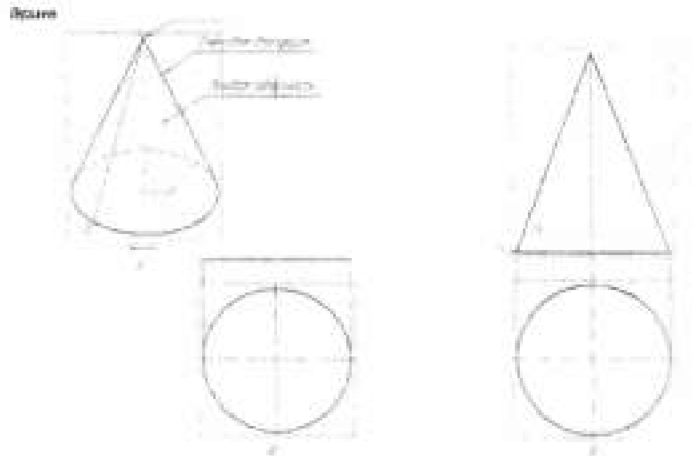


Рисунок 4

Если на поверхности конуса задана одна проекция точки *A* (например, фронтальная проекция на рисунке 5а), то две другие проекции этой точки определяют с помощью вспомогательных линий - образующей, расположенной на поверхности конуса и проведенной через данную точку, или окружности, расположенной в плоскости, параллельной основанию конуса

В первом случае (рисунок 5а) проводят фронтальную проекцию *s' a' f'* вспомогательной образующей. Пользуясь вертикальной линией с вязи, проведенной из точки *f '*, расположенной на фронтальной проекции окружности основания, находят горизонтальную проекцию *sf*

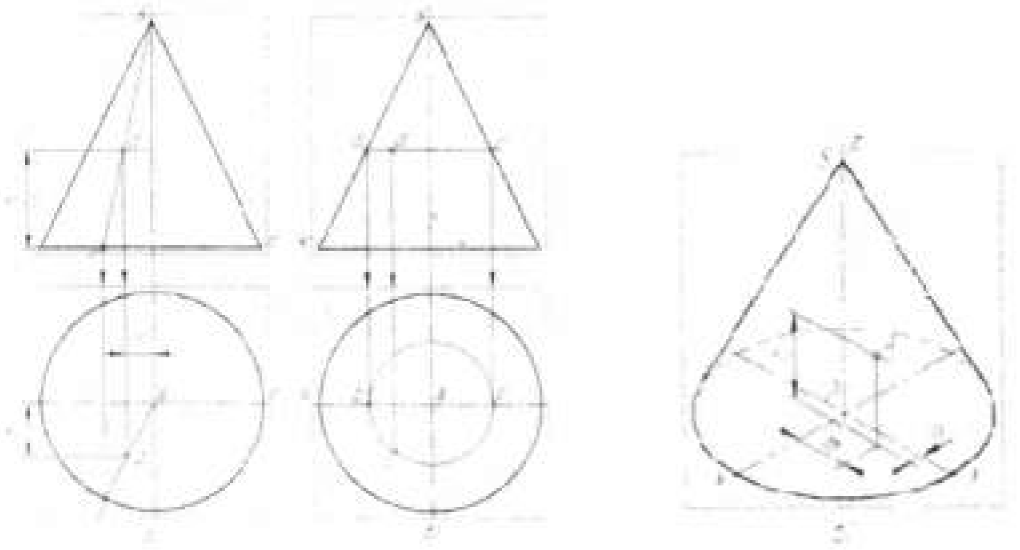


Рисунок 5

Порядок выполнения работы

Задание 1. На листе формата А3 выполнить ортогональные проекции призмы, её изометрическое изображение, определить положение точек 1,2,3,4 на всех видах (рисунок 6)

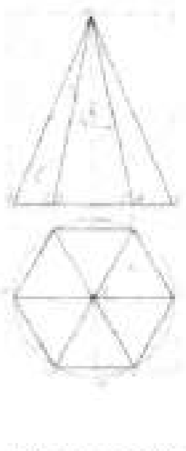


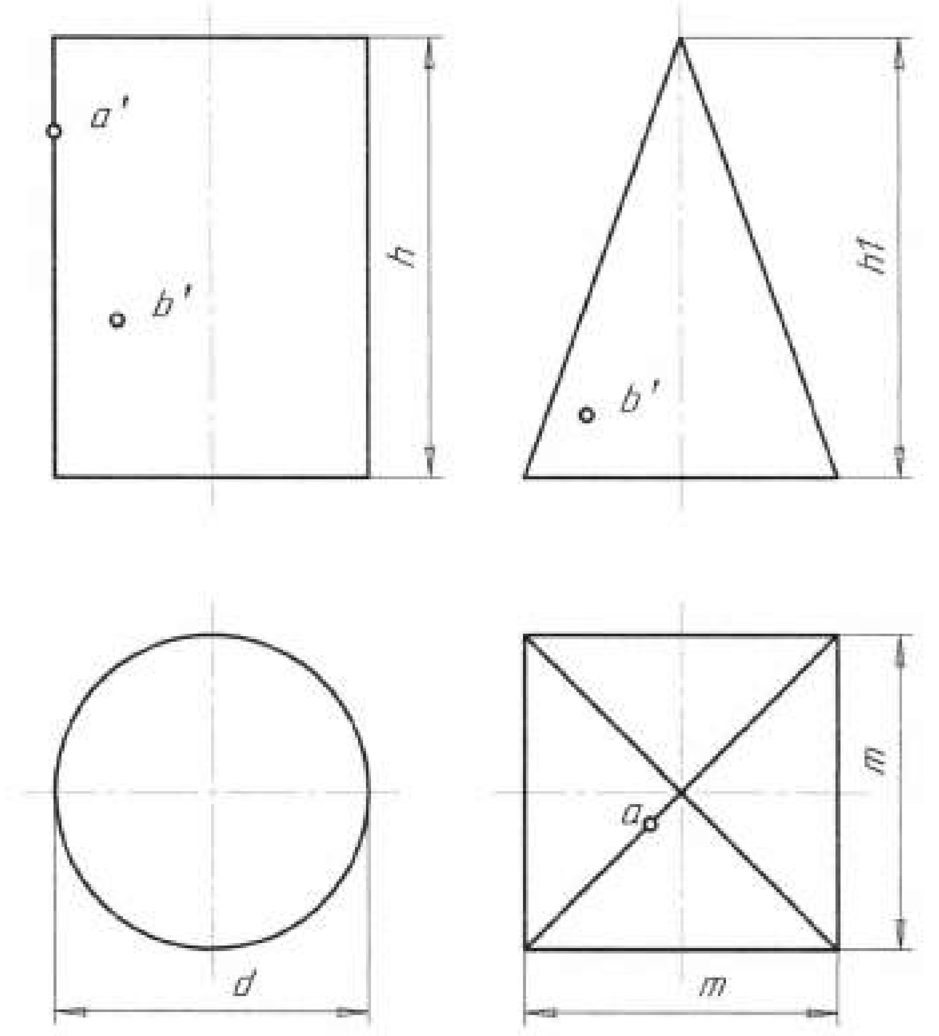
Рисунок 6

Графическая работа №3
Поверхности и тела

Построить в трёх проекциях геометрические тела.

Найти проекции точек, расположенных на их поверхностях.

Построить аксонометрические проекции.



№варианта	h	d	h1	m
1	50	40	60	40

Практическая работа № 4

Тема 3.6 Техническое рисование и элементы технического конструирования.	Плоские фигуры и геометрические тела. Выполнение технических рисунков плоских геометрических фигур.
Цель работы:	*уметь:* выполнять изображения плоских фигур и окружностей в плоскостях, параллельных плоскости проекции; выполнять технические рисунки геометрических тел и моделей *знать:* зависимость технического рисунка от выбора расположения аксонометрических осей *формировать общие и профессиональные компетенции:* стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства; использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

Теоретическая часть

При выполнении рисунка плоских геометрических тел из всех аксонометрических проекций чаще всего используют прямоугольную изометрическую, прямоугольную и косоугольную диметрические проекции. Начинают построение с проведения осей симметрии параллельно аксонометрическим осям. Направление аксонометрических осей без чертежных инструментов можно определить следующими способами.

Для изометрической проекции развернутый угол на глаз делят на шесть частей (рисунок 1а), направления лучей, ближних к горизонтальной линии, будут соответствовать направлению осей Ox и Oy; ось Oz будет иметь вертикальное направление. На рисунке 1б показано построение осей по клеточкам.

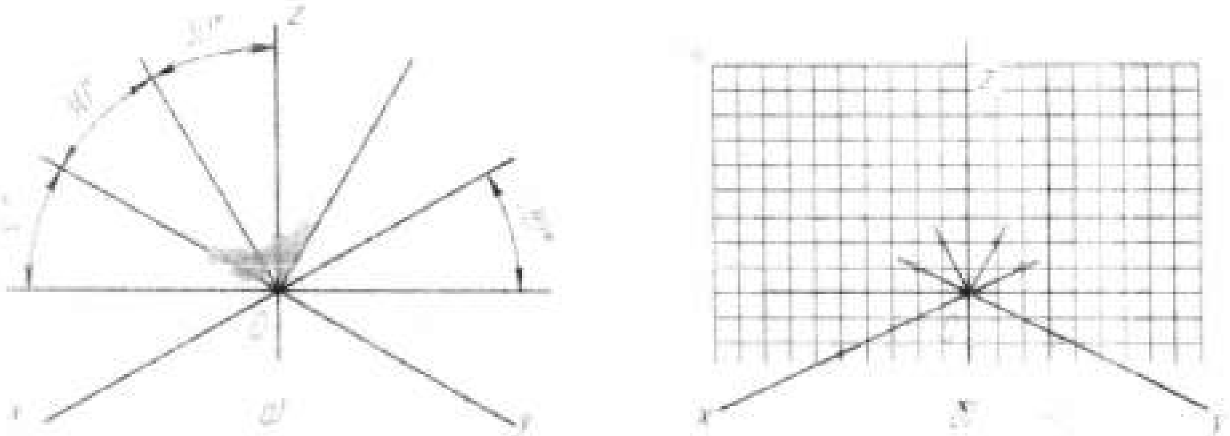


Рисунок 21.1

Для косоугольной диметрической проекции прямой угол делят пополам рисунок 2) и через точки деления проводят ось Oy. Стороны прямого угла являются направлением осей Ox и Oz. На бумаге в клетку прямую иод углом 15° (ось Oy) проводят как диагональ клетки.

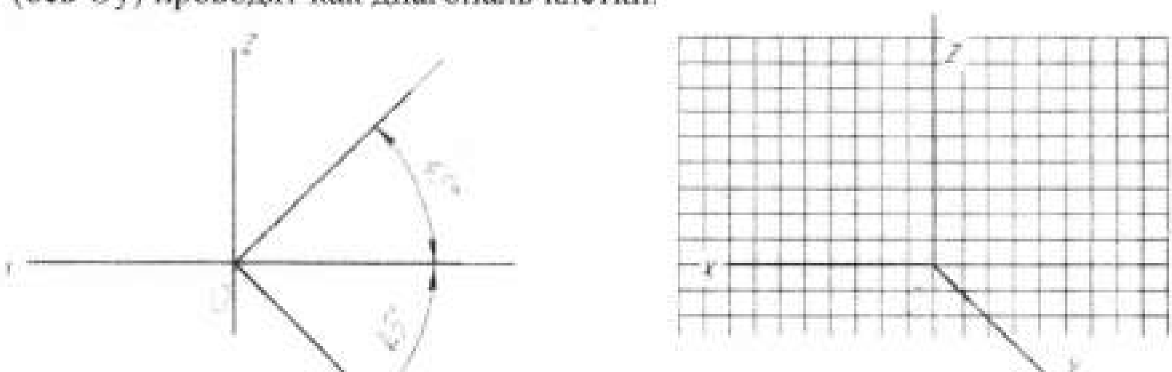


Рисунок 2

Для прямоугольной диметрической проекции (рисунок 3а) по горизонтальной стороне прямого угла откладывают восемь одинаковых, произвольно выбранной длины отрезков. Из конца последнего, восьмого отрезка вертикально вниз проводят прямую и откладывают семь таких же отрезков. Последнюю точку соединяют с точкой О прямой линией, которая будет направлением оси Оу. Для построения направления оси Ох от конца восьмого отрезка, лежащего на горизонтальной стороне прямого угла, вертикально вверх откладывают один отрезок (такой же величины, как и ранее отложенные), полученную точку 1 соединяют с точкой О прямой линией, которая будет направлением оси Ох. Направление оси Oz пройдет от точки О вертикально вверх. На рисунке 3б показано построение направления этих осей на бумаге в клеточку

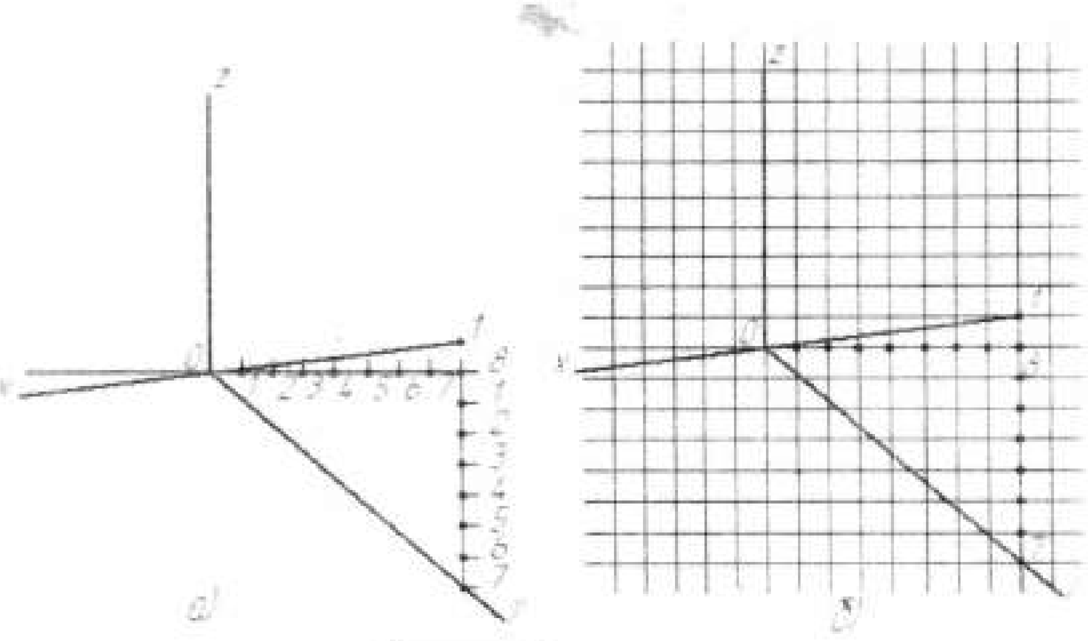


Рисунок 3

Выполняя рисунок плоских геометрических тел, предварительно проводят анализ их формы, мысленно расчленяя ее на геометрические тела и их элементы. Поэтому сначала изучают способы построения отдельных геометрических тел и их элементов.

Чтобы построить геометрическое тело, необходимо сначала построить его основание. В основаниях геометрических тел лежат плоские геометрические фигуры, поэтому рассмотрим способы построения плоских геометрических фигур.

При построении прямоугольников и квадратов их стороны располагают параллельно направлению аксонометрических осей. На рисунке 21.4а, показан пример построения прямоугольника, лежащего в плоскостях xOy и xOz, в прямоугольной изометрической проекции; на рисунке 4б- плоскостях xOz и zOy прямоугольной диметрической проекции и на рисунке 4в - в плоскостях xOy, xOz и zOy косоугольной диметрической проекции

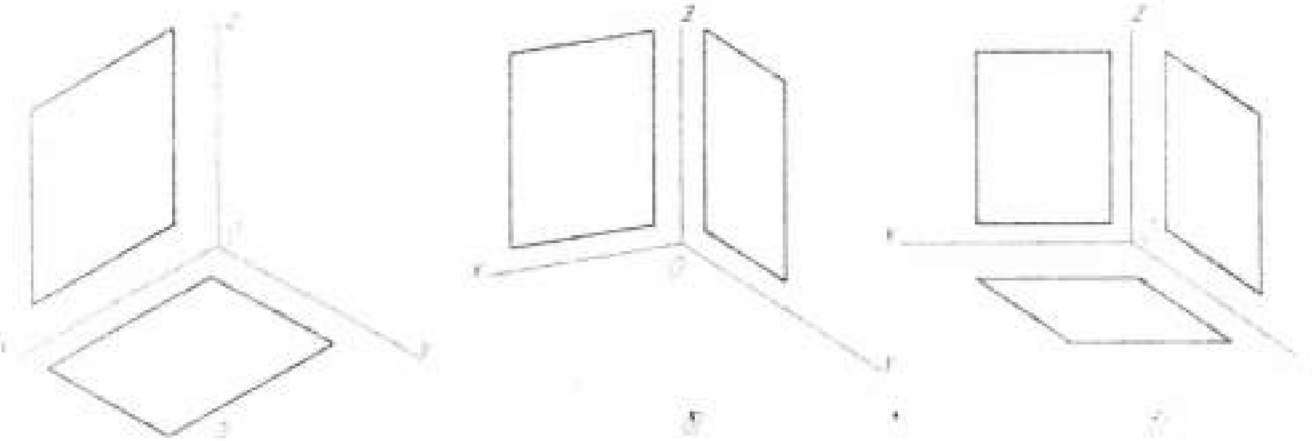


Рисунок 4

В косоугольной диметрической проекции длину прямоугольника в плоскости xOy (сторона, параллельная оси Oy) и ширину в плоскости zOy (сторона параллельная оси Oy) изображают с коэффициентом искажения ~0,5.

При построении равнобедренных и равносторонних треугольников необходимо понять, что их высота перпендикулярна основанию. Поэтому, построив основание такого треугольника в какой-либо плоскости параллельно одной оси, проводят высоту параллельно другой аксонометрической оси.

На рисунке 5а, показано построение равнобедренного треугольника в прямоугольной изометрической проекции в плоскостях xOz и xOy; на рис. 5б - в прямоугольной диметрической проекции в плоскостях xOy и xOz (на плоскости xOy высоту треугольника сокращают половину, т.е. изображают с коэффициентом искажения 0,5); на рисунке 5в - в косоугольной диметрической (кабинетной) проекции в плоскостях xOz и zOy (в плоскости zOy основание изображают с коэффициентом искажения 0,5).

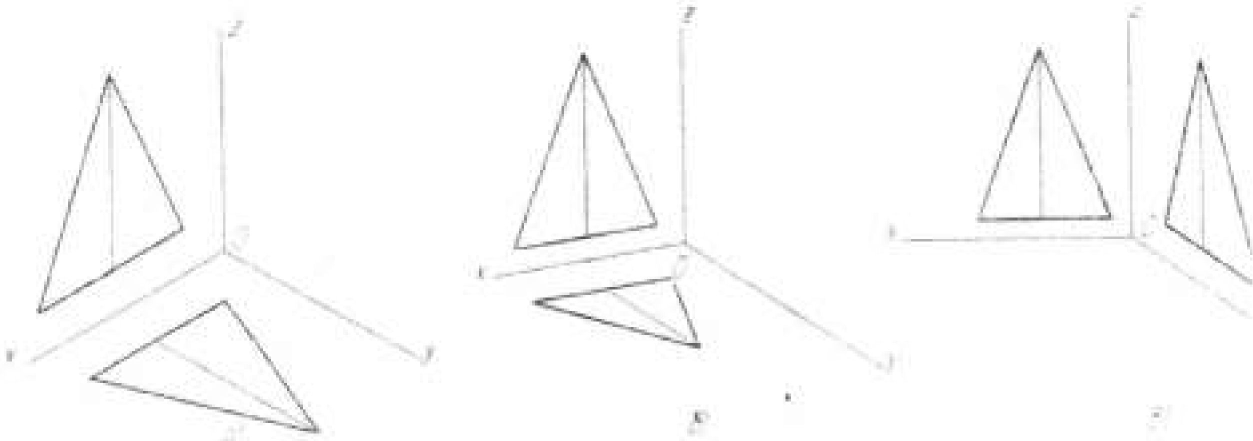


Рисунок 5

Проектирование шестиугольника показано на рисунке 6 в ортогональной проекции и в прямоугольной изометрической проекции. Аналогично строят шестиугольник и в других аксонометрических проекциях.

Для построения шестиугольника предварительно строят квадрат на осях, проведенных через его середину (точка О). Одну ось квадрата делят на четыре, а

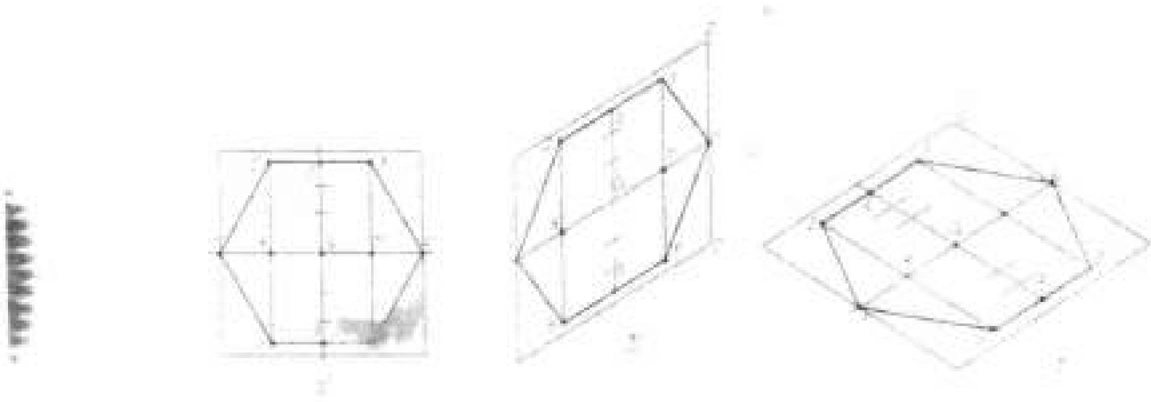


Рисунок 6

другую - на шесть равных частей (рисунок 6а). Ось квадрата, разделенную на четыре части, пересекают стороны квадрата в точках 1 и 4. Эти точки будут вершинами двух углов строящегося шестиугольника. Вторую ось квадрата, разделенную на шесть частей, пересекают две стороны шестиугольника на расстоянии 2,5 деления с каждой стороны от точки О. Эти стороны идут параллельно соответствующим сторонам квадрата, их длину ограничивают две линии, проведенные через точки К и М параллельно соответствующим сторонам квадрата. Точки 2, 3, 5, 6 будут вершинами углов шестиугольника. Последовательно соединив все шесть точек, получают шестиугольник. На рисунке 6б шестиугольник лежит в плоскости xOz, а на рисунке 6 - в плоскости xOy в прямоугольной изометрической проекции.

Построение окружности в прямоугольной изометрической проекции показано на рисунках 7б и в, где она изображается в виде эллипса. Так как окружность вписывается в квадрат (рисунок 7а), то сначала строят в аксонометрии квадрат. Это значительно упрощает выполнение изображения окружности. На рисунке 7б окружность изображена в плоскости xOz, а на рисунке 7в — в плоскости xOy. Сначала строят квадрат, затем отмечаются характерные точки. Точки 3, 7, 8, 9 являются точками, в которых эллипс касается сторон квадрата. Большая ось эллипса совпадает с большой диагональю ромба, в который изобразился квадрат в изометрии. Малая ось эллипса совпадает с малой диагональю ромба.

На рисунке 7а окружность изображена в ортогональной проекции, вписанной в квадрат. Диагональ квадрата, на которой лежат точки a и b, будет в изометрии с той диагональю ромба, с которой совпадает малая ось эллипса. Диагональ квадрата, на которой лежат точки c и d, будет в изометрии с диагональю ромба, с которой совпадает большая ось эллипса.

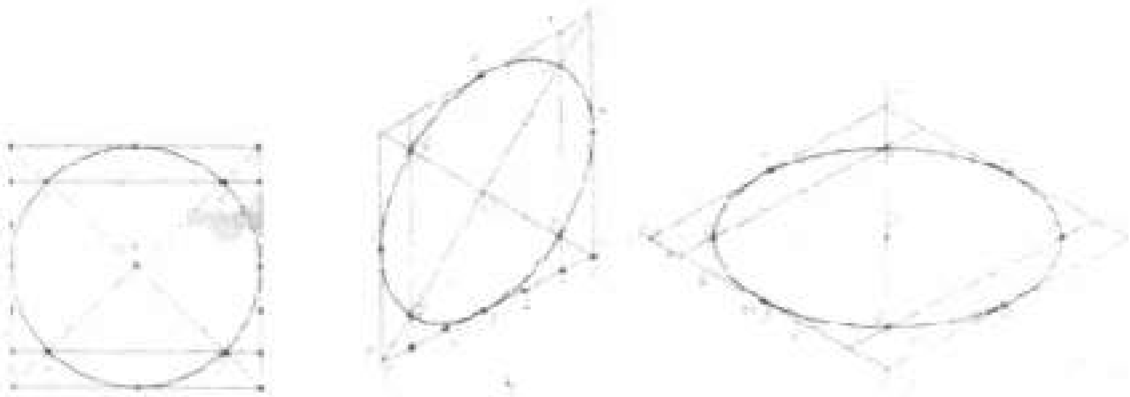


Рисунок 7

Если одну сторону квадрата разделить на шесть частей (рисунок 6а) и через первую и пятую точки деления провести горизонтальный линии, то они пройдут через точки a, d, c и b. А так как точки a и b являются концами малой оси эллипса в изометрии, а точки c и d — концами большой оси эллипса, то для их построения надо сторону квадрата разделить в изометрии на шесть частей и через первую и пятую точки деления параллельно сторонам ромба провести прямые до пересечения их с диагоналями ромба в точках a, b, c и d.

Другим способом эллипс можно построить в аксонометрии по соотношению его осей.

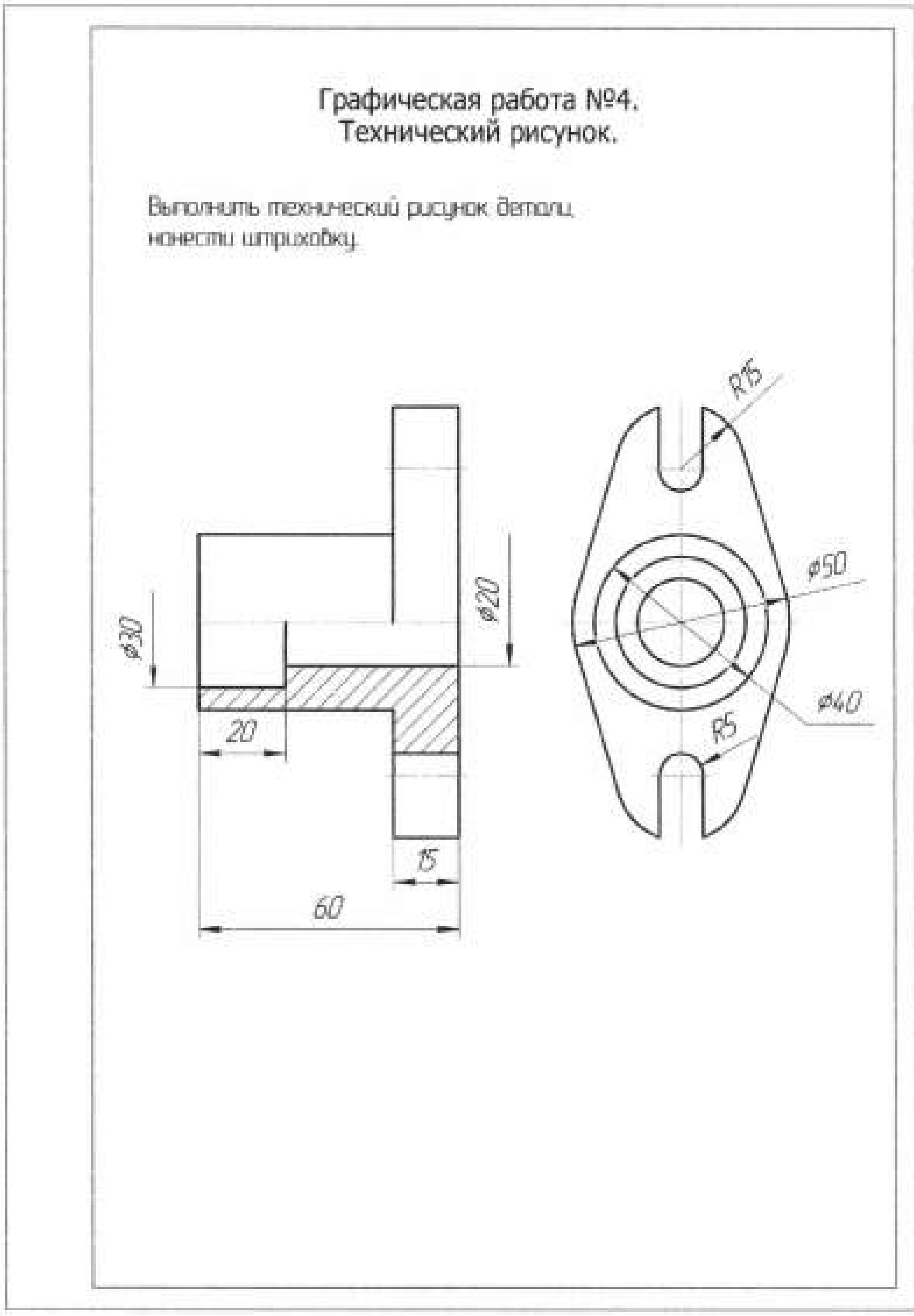
В изометрической проекции отношение большой и малой осей эллипса 10:6 (рисунок 8а). Поэтому проводят две взаимно перпендикулярные прямые. От точки их пересечения (точка O) откладывают по малой оси в обе стороны по три равных отрезка, а по большой оси в обе стороны - по пять таких же отрезков. Отрезки выбирают произвольно, если построение эллипса не связано в размерах с ортогональным чертежом. Если же эллипс строят в соответствии с размерами, заданными на ортогональном чертеже, то величину отрезка определяют двумя способами:

1) большую ось берут равной диаметру заданной окружности и делят ее на 10;

2) большую ось эллипса берут равной диаметру заданной окружности и умножают на 1,22 (коэффициент увеличения), полученную величину делят на 10.

Строя направления осей эллипса, надо помнить о том, что каждая плоскость координат с двух сторон ограничена осями, а третья ось в этой плоскости отсутствует, например, плоскость H ограничена осями Ox и Oy, а ось Z лежит вне ее. Малую ось эллипса всегда располагают в направлении отсутствующей оси, а большую ось проводят перпендикулярно малой. Так в плоскости xOy малая ось расположится в направлении оси Oz, в плоскости xOz - в направлении оси Oy. в плоскости zOy - в направлении оси Ox.

При построении окружности в прямоугольной диметрической проекции соотношение большой и малой осей следующее: для плоскостей xOz - 10:9 (рисунок 86) для плоскостей xOy и zOy - 6:2 (рисунок 21.8в, г). Направление большой и малой осей в прямоугольной диметрии берется так же, как и в изометрической проекции.



Практическая работа № 5

Тема 3.7
Проекции моделей

Анализ геометрической формы модели. Выбор положения модели для наглядного изображения. Построение третьей проекции модели по двум заданным. Построения наглядного изображения модели

Цель работы:

уметь: выполнять проекции моделей по двум заданным вычерчивать аксонометрические проекции модели строить комплексные чертежи моделей по аксонометрическому изображению.
знать: виды аксонометрических проекций
формировать общие и профессиональные компетенции:
стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства;
использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

Теоретическая часть

Наглядное изображение модели выполнено в изометрической проекции на рисунок 1. Требуется построить ее в трех ортогональных проекциях в

натуральную величину.

Сначала изучают конструкцию модели, т. е. проводится мысленное деление ее на составные элементы. Основание модели — прямоугольная плита. На этой плите стоит цилиндр, в верхней части которого проходит прорезь. К цилиндру приставлены два ребра треугольной формы. По вертикальной стороне (грани) ребра сделана цилиндрическая выемка для плотного прилегания ребра к поверхности цилиндра. Габаритные размеры модели: высота — *И*, длина — *Б*, ширина — *А*.

Далее следует выбрать направление проецирования. Помня о том, что фронтальная проекция должна более полно раскрывать форму модели, направление проецирования на плоскость *V* берут по стрелке *P*, для горизонтальной проекции — по стрелке Q, а для построения профильной проекции — по стрелке *R*. Зная габаритные размеры модели, выполняют компоновку чертежа с помощью габаритных прямоугольников. Затем приступают к построению изображений в тонких линиях. Так как модель симметричная, то на всех габаритных прямоугольниках проводят оси симметрии.

В пределах габаритного прямоугольника на плоскости *Н* располагают горизонтальную проекцию нижнего основания модели длиной, *а* и шириной б. Далее строят фронтальную проекцию этого основания. Ее длина, *а* уже построена в пределах габаритного прямоугольника, остается на высоте *с* построить ее верхнюю сторону, проецирующуюся в прямую линию. На профильной проекции ширина *б* основания модели уже построена шириной габаритного прямоугольника, остается на высоте *с* построить верхнюю сторону параллелограмма, которая здесь тоже изобразится прямой линией.

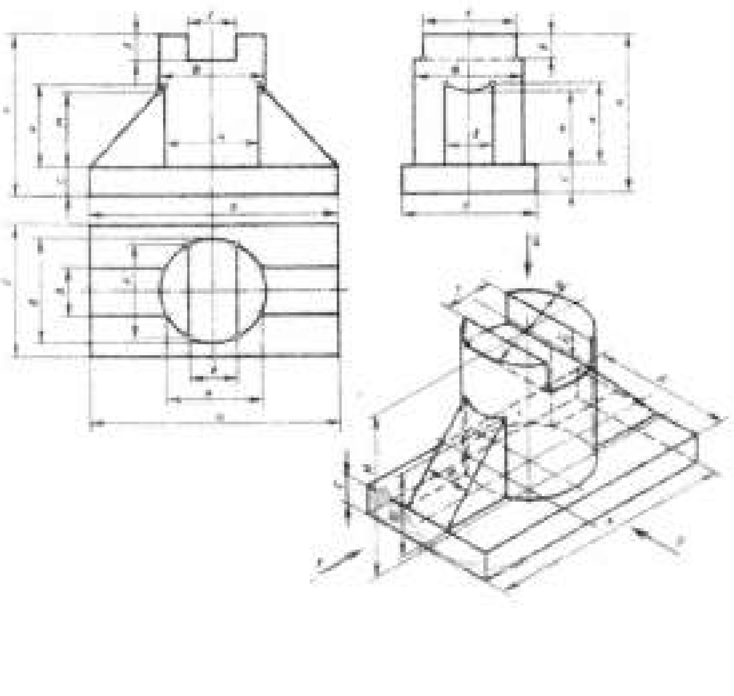


Рисунок 1

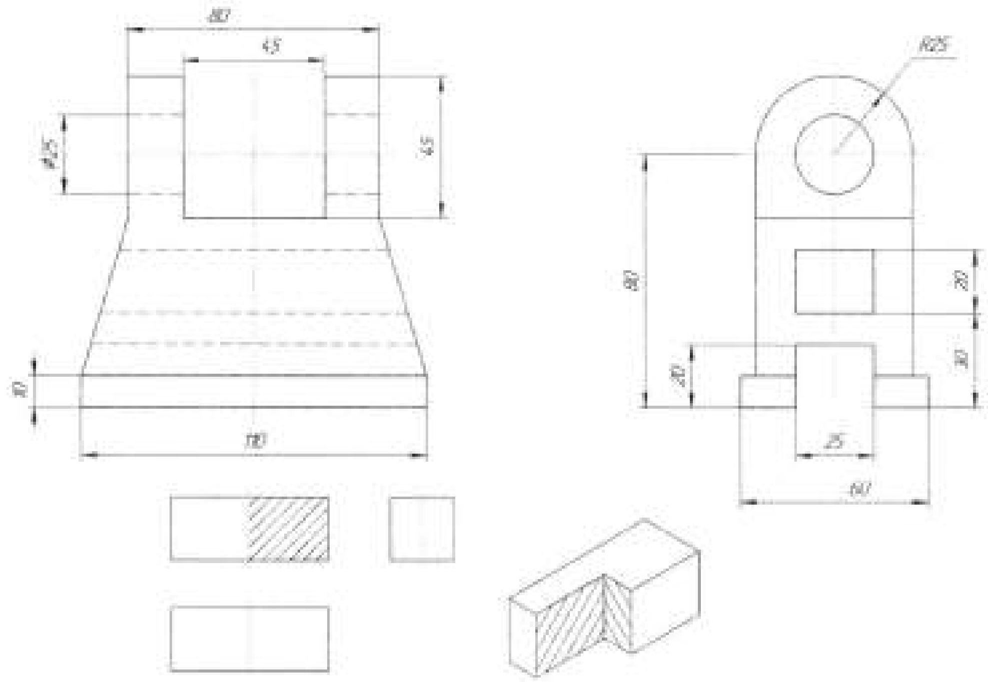
Далее строят три проекции полного цилиндра без прорези. Для этого заданным радиусом на горизонтальной проекции проводят окружность, в которую проецируется цилиндр с центром в точке пересечения осей симметрии. На фронтальной и профильной проекциях от осей симметрии влево и вправо по верхней стороне основания откладывают по радиусу этой окружности и через отложенные точки проводят край образующие цилиндра до верхних линий габаритных прямоугольников, ограничивающих высоту модели. Затем в верхней части цилиндра, сначала на горизонтальной, потом на фронтальной, а затем на профильной проекциях, строят прорезь шириной г и глубиной Э. На фронтальной проекции видно, как прорезь удалила часть цилиндра и часть образующих, расположенных посередине цилиндра и сливающихся с осью на длину *д*. Эти образующие на профильной проекции будут крайними. Вырезанная прорезью часть будет отсутствовать. Очерковыми линиями станут части других образующих длиной *д*, расположенных на расстоянии *е*, взятом с горизонтальной проекции. Внутренние линии пересечения сторон прорези на профильной проекции показывают линией невидимого контура.

Построение треугольных ребер, примыкающих к цилиндру, начинают с горизонтальной проекции. Для этого от горизонтальной оси симметрии вверх и вниз откладывают половину размера в, а через построенные точки проводят прямые линии, в которые проецируются вертикальные стороны треугольных ребер, до пересечения с цилиндром. От точек, где эти прямые пересекли цилиндр, в направлении проекционной связи на плоскости *V* проводят по поверхности цилиндра прямые линии на расстоянии *н*, высотой *к*. По этим прямым боковые стороны треугольных ребер пересекли боковую поверхность цилиндра. На профильной проекции двух треугольных ребер шириной *в* (смотреть горизонтальную проекцию) и высотой *к* (смотреть фронтальную проекцию) совпадают.

Построение чертежа модели может проходить по-разному. Чертеж может выполняться по модели с натуры, по наглядному (аксонометрическому) изображению или по двум заданным проекциям, когда надо построить третью. Двумя заданными проекциями могут быть: фронтальная и горизонтальная, фронтальная и профильная. И в том, и в другом случае построение выполняется аналогично.

Графическая работа №5. Проекции моделей.

По двум данным проекциям построить третью проекцию с применением разрезов, указанных в схеме, изометрическую проекцию с вырезом передней четверти. Нанести размеры.



Практическая работа (Упражнение)

Тема 4.2
Изображения- виды, разрезы, сечения.

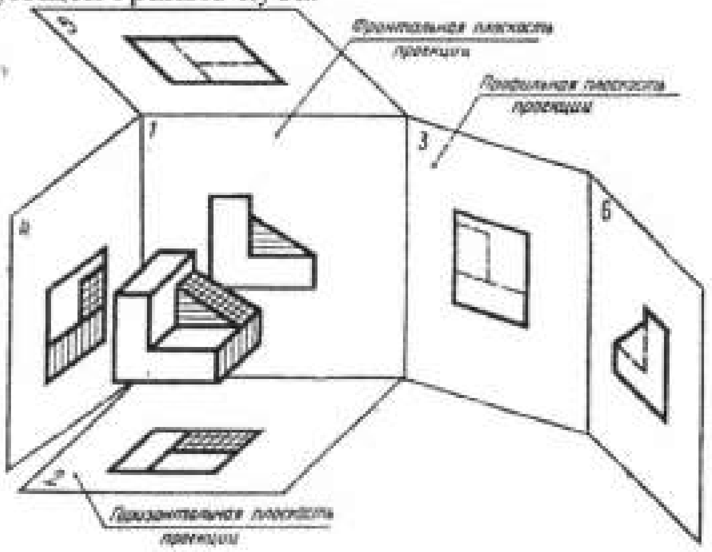
Виды: назначение, расположение и обозначение основных, местных и дополнительных видов.
Разрезы: простые, сложные, местные. Обозначение, расположение разрезов. Соединения половины вида с половиной разреза.
Сечения: вынесенные и наложенные. Расположение и обозначение сечений. Выносные элементы, их обозначение.
Условности и упрощения

Цель работы:

уметь: выполнять и обозначать виды, разрезы, сечения, выносные элементы
соединять половину вида с половиной разреза
выполнять разрезы через тонкие стенки, ребра, спицы и т.д.
изображать различные материалы в разрезах и сечениях.
знать: назначение машиностроительного чертежа
виды изделий и к/д
классификацию видов, разрезов, сечений
выносные элементы.
формировать общие и профессиональные компетенции:
стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства;
использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

Изображения, применяемые на чертежах

Чертеж любого предмета содержит графические изображения видимых и невидимых его поверхностей. Эти изображения получаются путем прямоугольного (ортогонального) проецирования на 6 граней куба, предполагается, что предмет расположен между наблюдателем и соответствующей гранью куба.



ГОСТ 2.305-68* делит изображения, выполняемые на чертежах, на виды, разрезы и сечения, предусматривает применение выносных элементов.

Виды

Видами называются изображения, на которых показана обращенная к наблюдателю видимая часть поверхности предмета

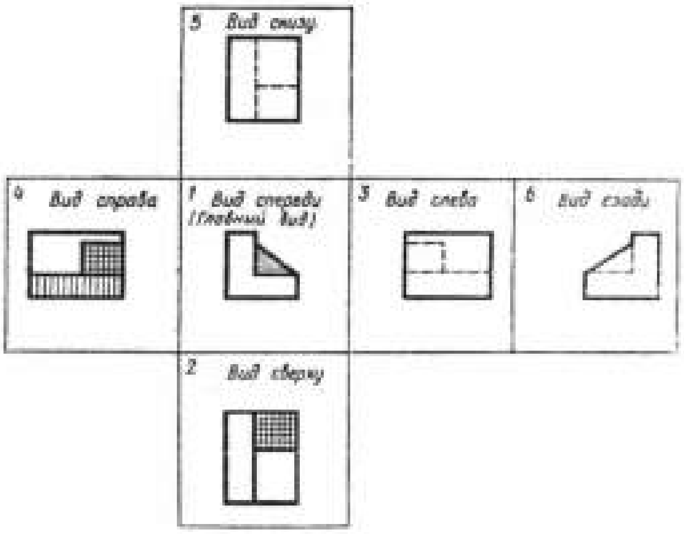
Виды

основные | местные | дополнительные

Основные виды получаются при проецировании предмета на основные плоскости проекций.

ГОСТ 2.305-68 устанавливает названия основных видов:

1.— вид спереди (главный вид)
2.— вид сверху
3.— вид слева
4.— вид справа
5.— вид снизу
6.— вид сзади



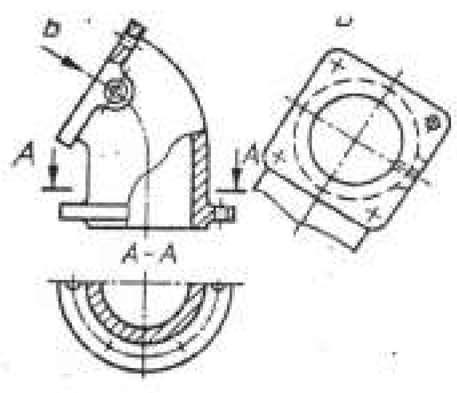
Для обеспечения чтения чертежа основные виды располагаются относительно друг друга в проекционной связи. В этом случае не требуется нанесения на видах надписей, разъясняющих их названия.

ГОСТ 2.305-68* допускает располагать виды вне проекционной связи, на любом месте поля чертежа.

Дополнительные виды

В тех случаях, когда изображение предмета или какой-либо его части не может быть показано на основных видах без искажения формы и размеров, применяют

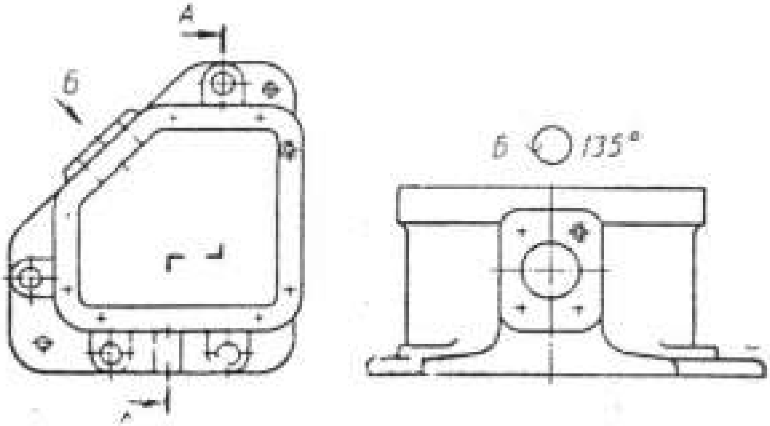
Дополнительные вид должен быть отмечен на чертеже прописной буквой, а у связанного с дополнительным видом изображения предмета должна быть поставлена стрелка, указывающая направление взгляда, с соответствующим буквенным обозначением.



Когда дополнительный вид расположен в непосредственной проекционной связи с соответствующим изображением, стрелку и обозначение вида не наносят.

Дополнительный вид допускается поворачивать, но с сохранением положения, принятого для данного предмета на главном изображении, при этом обозначение вида должно быть дополнено графическим обозначением.

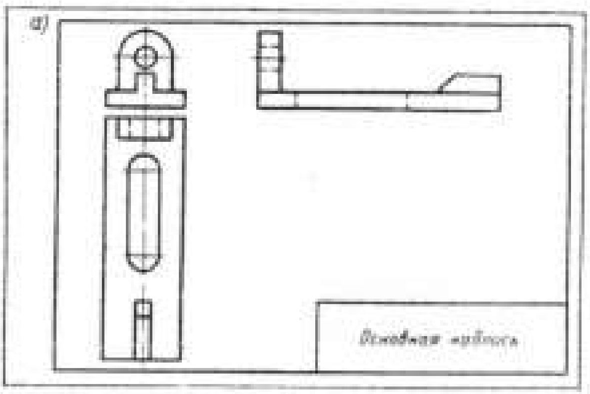
При необходимости указывают угол поворота.



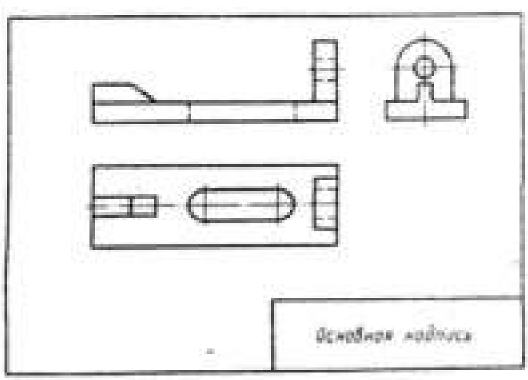
Обозначение вида

Направление проектирования должно быть указано стрелкой около изображения. Над стрелкой и над полученным изображением следует нанести одну и ту же прописную букву.

За главный вид следует принимать изображение, которое полно характеризует форму изделия и облегчает пользование чертежом при изготовлении этого изделия. Главный вид и основные виды должны обеспечивать рациональное использование поля чертежа и создавать удобство для нанесения размеров и текстовых надписей



Неудачное расположение видов



Рациональное расположение видов

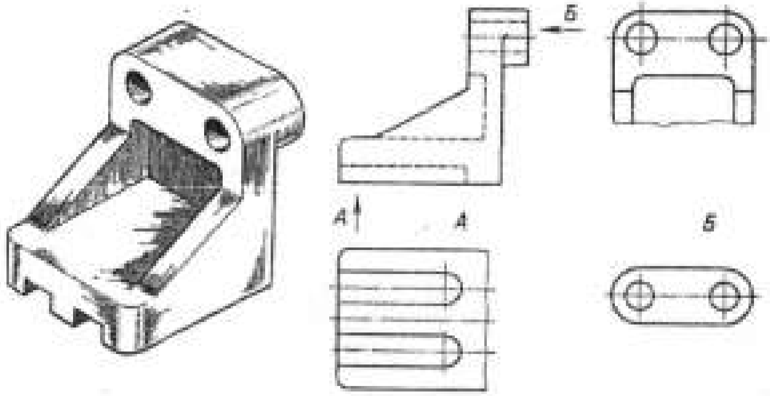
Местные виды

Встречаются случаи, когда из всего вида только часть его необходима для уточнения формы предмета, остальная часть вида не дает дополнительных сведений о предмете. В таких случаях применяют местный вид.

Местный вид — изображение ограниченного места поверхности предмета.

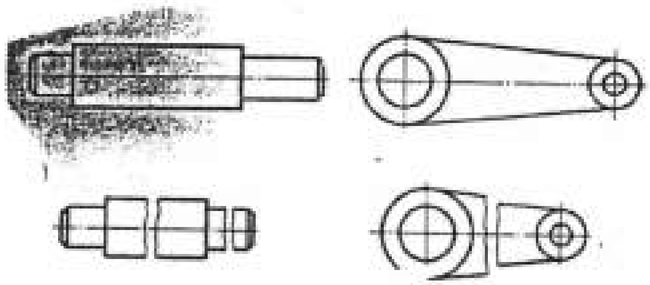
Местный вид ограничивается линией обрыва, которая не должна совпадать с какими-либо другими линиями изображения.

Когда местный вид выполняется в непосредственной проекционной связи с другими видами, направления взгляда и надпись не указываются. При изображении местного вида вне проекционной связи, необходимо стрелкой указывать направление взгляда, а над местным видом наносить соответствующую надпись.



Применение местных видов позволяет уменьшить объем графической работы и экономить место на поле чертежа, обеспечивая полное предоставление о форме предмета. То же самое может быть достигнуто применением видов с разрывами при изображении длинных предметов.

Если длинные предметы имеют участки с постоянным или закономерно изменяющимся поперечным сечением, допускается предметы изображать с разрывами, выполняемыми на этих участках. Контуры разрыва выполняются сплошной волнистой линией.



Разрезы

Большое количество штриховых линий, изображающих на виде контуры невидимых внутренних поверхностей предмета, может значительно затруднить чтение чертежа. Это устраняется применением разрезов.

Разрезом называется изображение предмета, полученное при мысленном рассечении его одной или несколькими секущими плоскостями.

В зависимости от числа секущих плоскостей, разрезы разделяются на простые (при одной секущей плоскости) и сложные (при нескольких секущих плоскостях).

При этом часть предмета, расположенная между наблюдателем и секущей плоскостью, мысленно удаляется, а на плоскости проекций изображается то, что получается в секущей плоскости и что расположено за ней.

В результате выполнение разреза линии внутреннего контура, изображавшееся на виде штрихованными линиями, становится видимым и должны быть изображены сплошными основными линиями.

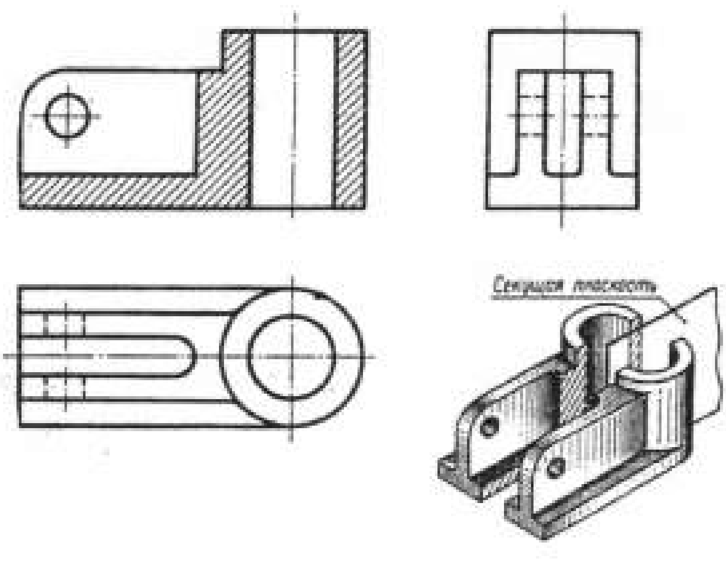
Простые разрезы

Простым разрезом называется разрез, получаемый при применении одной секущей плоскости.

Наиболее часто применяются вертикальные и горизонтальные разрезы.

Фронтальные разрезы

Разрез называется фронтальным, если секущая плоскость параллельна фронтальной плоскости проекций. Деталь рассечена плоскостью, параллельной фронтальной плоскости проекций.



Профильные разрезы

Вертикальный разрез называется профильным, если секущая плоскость параллельна профильной (и) плоскости проекций.

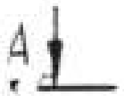
Деталь рассекается секущей плоскостью, параллельной профильной плоскости проекции.

В каждом из примеров секущая плоскость совпадает с плоскостью симметрии детали, а разрез расположен в непосредственной проекционной связи с видом.

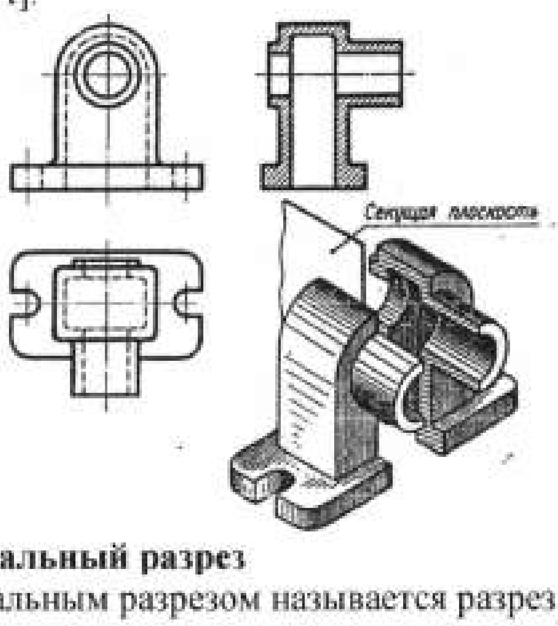
В таких случаях при выполнении горизонтальных, фронтальных и профильных разрезов положение секущей плоскости на чертеже не отмечается.

Обозначение разреза

В остальных случаях положение секущей плоскости отмечается линией сечения со стрелками, указывающими направление взгляда, а над разрезом выполняется надпись, указывающая секущую плоскость. Положение каждой секущей плоскости указывается линией сечения, выполняемой разомкнутой линией. Штрихи линии сечения не должны пересекать контур изображения.



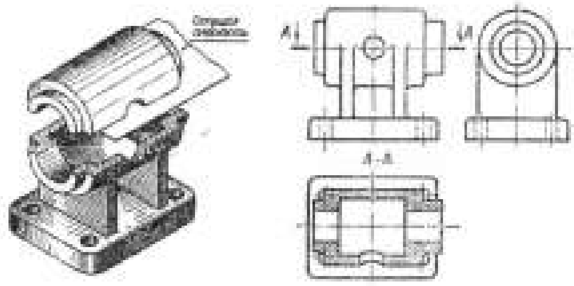
На штрихах линии сечения, перпендикулярно к ним ставят стрелки, указывающие направление взгляда. Стрелки наносятся на расстоянии 2-3 мм от внешнего конца штриха линии сечения. Около каждой стрелки наносится одна и та же прописная буква русского алфавита. Надпись над разрезом содержит 2 буквы, написанные через тире, которым обозначена секущая плоскость [А-А].



Горизонтальный разрез

Горизонтальным разрезом называется разрез, образованный секущей плоскостью, параллельной горизонтальной плоскости проекций.

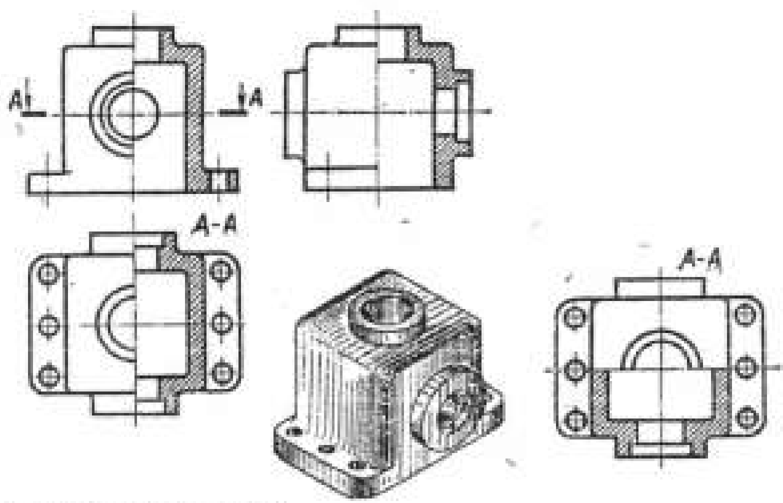
Деталь рассечена плоскостью, параллельной горизонтальной плоскости проекций.



Соединение части вида и части разреза

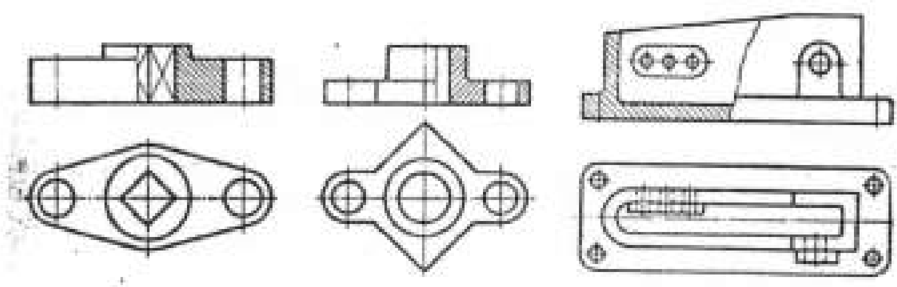
Если деталь симметрична, то на одном изображении допускается соединять часть вида и часть разреза, разделяя их штрихпунктирной тонкой линией, являющейся осью симметрии сплошной тонкой с изломом. Часть разреза может располагаться правее или ниже оси симметрии.

При соединении симметричных частей вида и разреза, если с осью симметрии совпадает проекция какой-либо линии (ребра), то вид от разреза отделяется



сплошной волнистой линией.

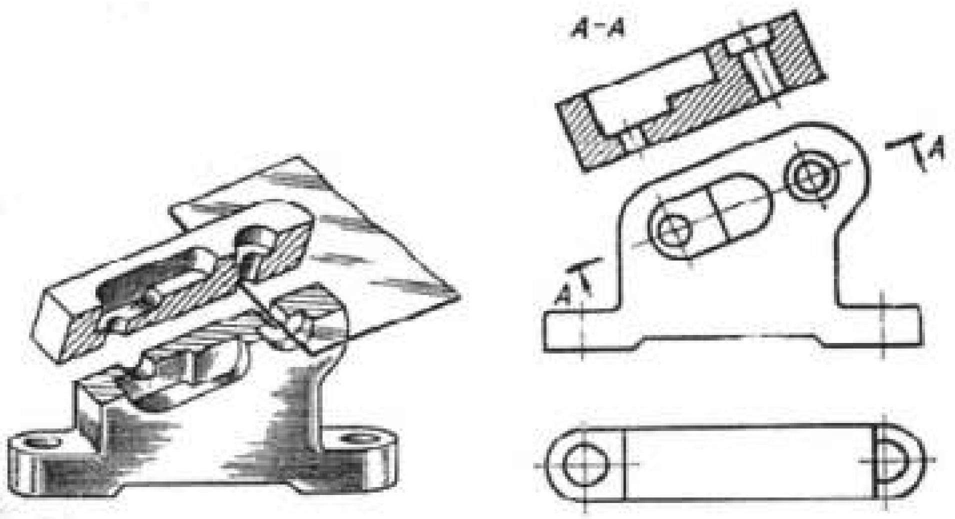
Если деталь несимметрична, то часть вида от половины разреза отделяется сплошной волнистой линией.



Наклонный разрез

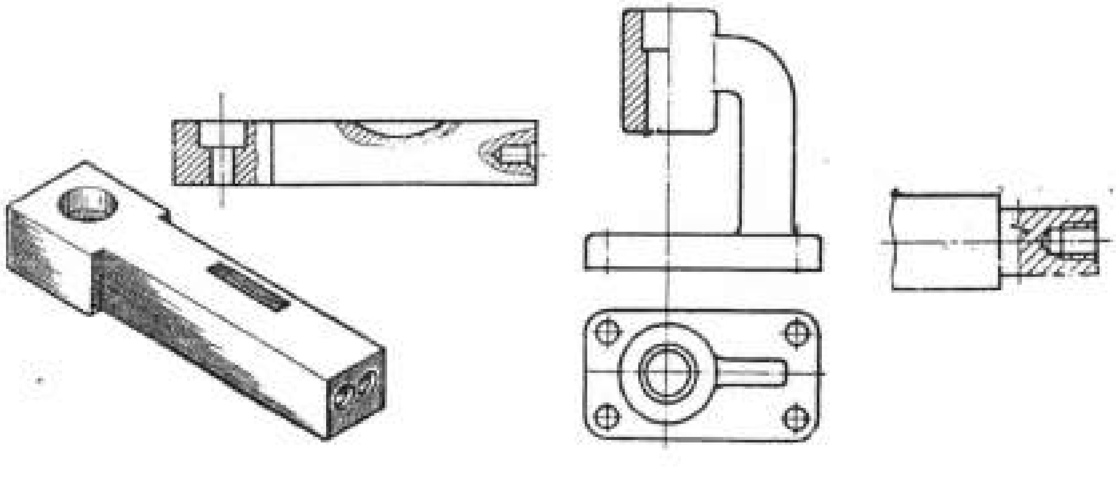
Наклонными называются разрезы, образованные секущими плоскостями, составляющими с горизонтальной плоскостью проекций угол, отличный от прямого.

Наклонные разрезы строятся и располагаются в соответствии с направлением взгляда, указанным стрелками на линии сечения. Допускается располагать наклонные разрезы на любом месте поля чертежа.



Местный разрез

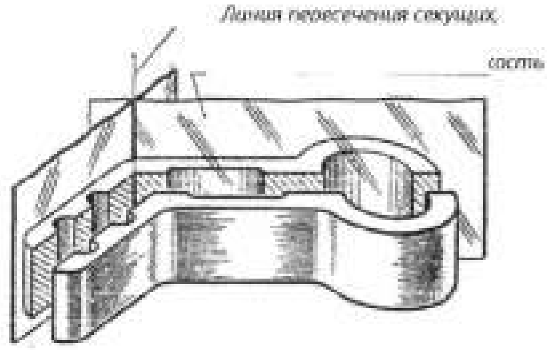
Разрез, служащий для выявления внутренней формы предмета лишь в отдельном, ограниченном месте, называется местным и выделяется на виде сплошной волнистой линией или сплошной тонкой с изломом.

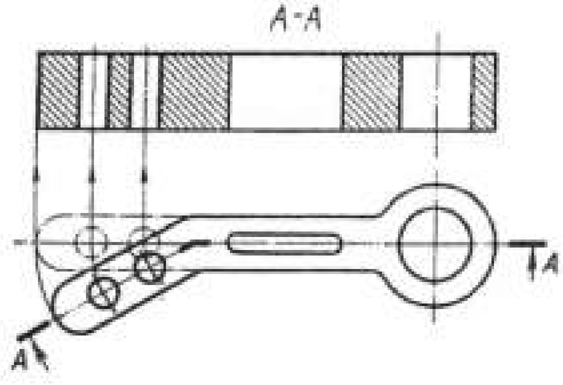


Ломаные разрезы

Сложный разрез называется ломаным, когда секущие плоскости пересекаются между собой.

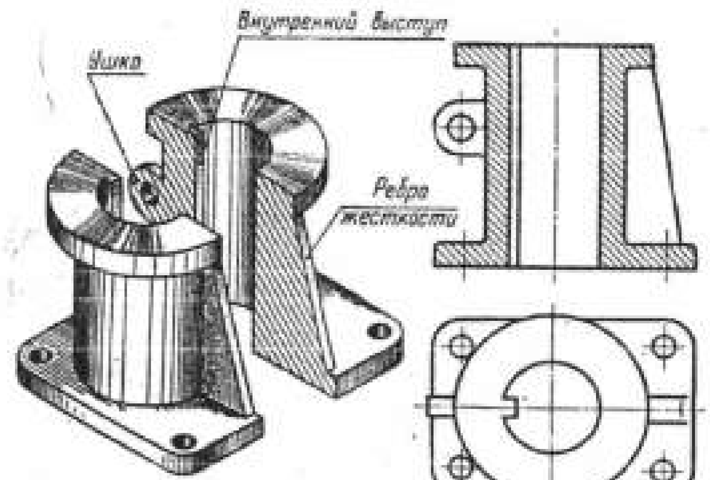
В случае ломаных разрезов секущие плоскости условно поворачиваются около линии их пересечения до совмещения в одну плоскость.





Условности и упрощения, применяемые при выполнении разреза

Такие элементы деталей, как тонкие стрелки, ребра жесткости и т. п. показываются на разрезе незаштрихованными в том случае, когда секущая плоскость направлена вдоль оси или длинной стороны этих элементов деталей



Сложные разрезы

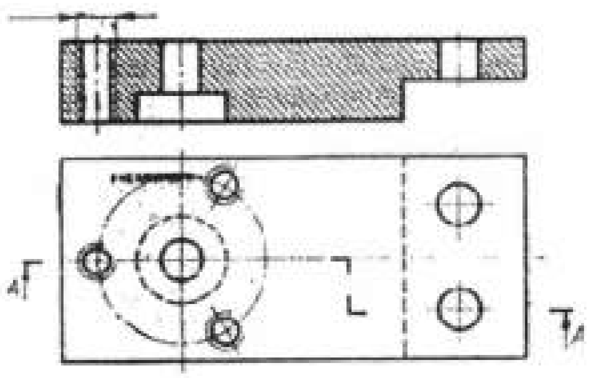
Количество элементов детали, их форма и расположение могут вызывать необходимость выполнения сложных разрезов.

Ступенчатые разрезы

Сложный разрез, образованный несколькими параллельными секущими плоскостями, называется ступенчатым. Ступенчатые разрезы могут быть горизонтальными, фронтальными, профильными и наклонными.

Положение секущих плоскостей указывается штрихами линии сечения со стрелками, отмеченными одной и той же буквой. Линия сечения имеет перегибы, показывающие места перехода от одной секущей плоскости к другой.

Наличие перегибов в линии сечения не отражается на графическом оформлении сложного разреза: он оформляется как простой разрез.

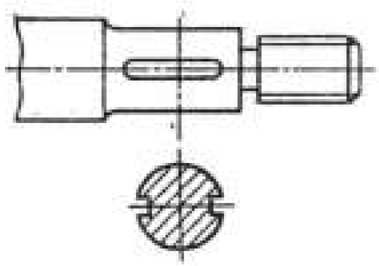


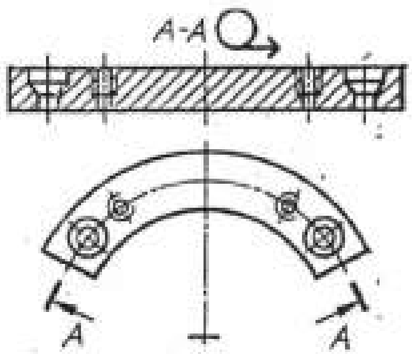
Сечения

Сечение — изображение фигуры, получающейся при мысленном рассечении предмета или несколькими плоскостями.

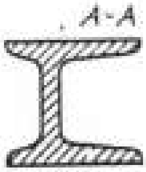
На сечении показывается только то, что получается непосредственно в секущей плоскости.

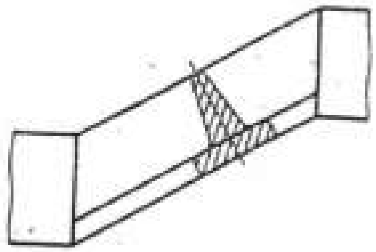
Допускается в качестве секущей применять цилиндрическую поверхность, развертываемую затем в плоскость.





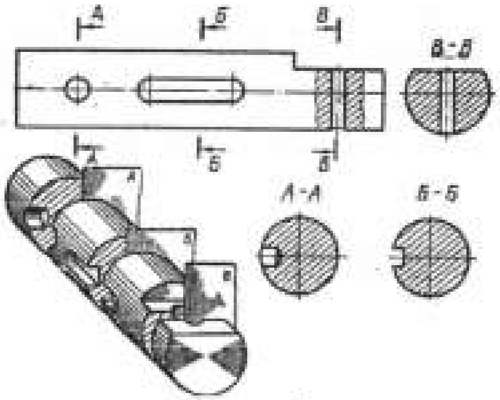
Сечения, не входящие в состав разреза, разделяют на: вынесенные, наложенные. Также на симметричные и несимметричные.





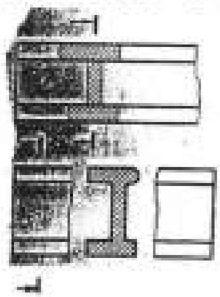
Во всех остальных случаях для линии сечения применяют разомкнутую линию с указанием стрелками направления взгляда и обозначают ее одинаковыми буквами русского алфавита. Сечение сопровождается надписью: «А-А».

Для несимметричных сечений, расположенных в разрезе или наложенных,

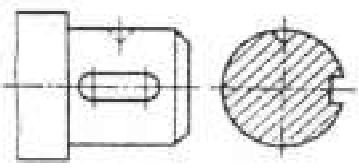


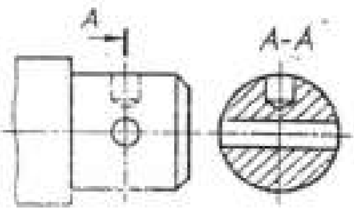
линию сечения проводят со стрелками, но буквами не обозначают.

При совпадении секущей плоскости с осью поверхности вращения,



ограничивающей отверстие или углубление, контур отверстия или углубления в сечении показывается полностью, хотя этот контур и не расположен в секущей плоскости, т. е. сечение оформляется как разрез.





Правила обозначения изображений

Обозначения видов, разрезов и сечений выполняется в соответствии с правилами согласно ГОСТ 2.316-68.

1. Для обозначения применяются прописные буквы русского алфавита, за исключением букв Й, О, Х, Ъ, Ы, Ь.

Буквенные обозначения присваивают в алфавитном порядке без повторения и без пропусков.

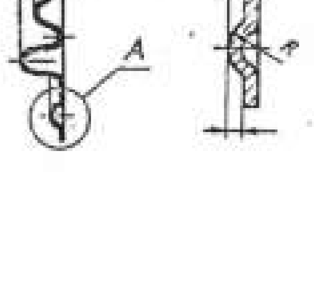
2. Размер шрифта буквенных обозначений должен быть больше размера цифр размерных чисел, применяемых на том же чертеже, приблизительно в 2 раза.

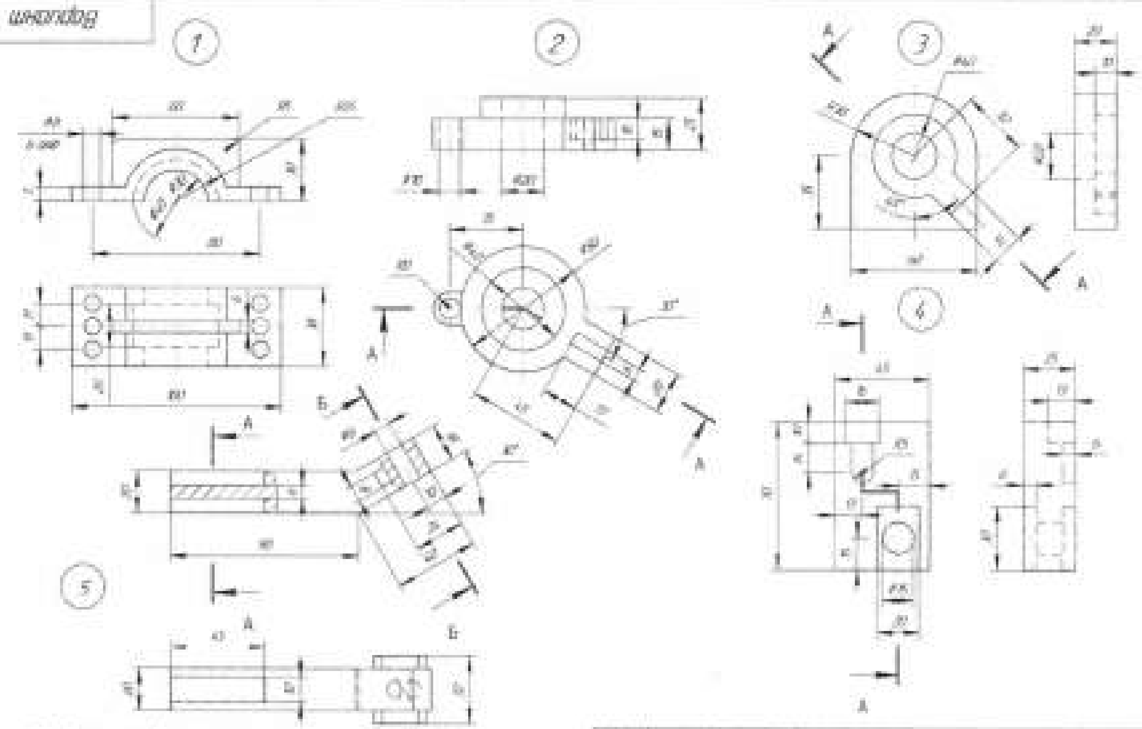
3.

Выносной элемент

Выносной элемент — дополнительное отдельное изображение (обычно увеличенное) какой-либо части предмета, требующей графического и других пояснений в отношении формы, размеров и иных данных.

При применении выносного элемента соответствующее место отмечают на виде, разрезе или сечении замкнутой сплошной тонкой линией — окружностью, овалом с обозначением выносного элемента прописной буквой или сочетанием прописной буквы с арабской цифрой на полке линии — выноски. Над изображением выносного элемента указывают обозначение и масштаб, в котором он вынесен. Выносной элемент располагают ближе к соответствующему месту на изображении предмета.





1.Соединить половину фронтального разреза с половиной вида спереди.
2.Заменить вид спереди разрезом А-А.
3.Заменить вид слева разрезом А-А.
4.Заменить вид слева разрезом А-А.
5.Выполнить главный вид детали и указанные сечения.
На всех изображениях нанести размеры.

Вариант 1

Разрезы,сечения

Практическая работа (Упражнение)

Тема 4.3
Резьба, резьбовые изделия

Основные типы резьб. Условное изображение и обозначение резьбы.
Обозначение и изображение стандартных резьбовых крепежных изделий.
Конструктивные элементы резьбы.

Цель работы:

уметь: изображать и обозначать стандартные и специальные резьбы и резьбовые изделия
знать: классификацию, основные параметры резьбы, условное изображение резьбы
правила изображения стандартных резьбовых изделий
условные обозначения и изображения стандартных резьбовых изделий.
формировать общие и профессиональные компетенции:
стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства;
использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

ТЕМА «РЕЗЬБА, РЕЗЬБОВЫЕ ИЗДЕЛИЯ»

В технике для соединения деталей машин широко применяют ***резьбы.*** Изделия с резьбой можно разделить на 3 группы:

1. Крепёжные изделия, применяемые для соединения деталей машин и механизмов, - болты, гайки, винты, шпильки, а также детали с резьбой для соединения 2-х деталей.
2. Детали с винтовыми поверхностями, применяемые для преобразования вращательного движения в поступательное, например, ходовые и грузовые подъёмные винты, а также детали для передачи вращения (червяк в паре с червячным колесом).
3. Изделия специального значения. К таким изделиям можно отнести металлорежущие инструменты (фрезы, шарошки, свёрла, метчики, винты- шнеки, служащие для разрыхления формовочных материалов в литейных цехах).

В основе образования резьбы лежит принцип получения винтовой линии. (Если в патроне токарного станка закрепить цилиндр и подвести к нему резец, то при равномерном вращении цилиндра и равномерно поступательном движении резца его конец прочертит на поверхности цилиндра винтовую линию).
Винтовая линия - это пространственная кривая. Она может быть цилиндрической, конической, сферической.

Цилиндрическая винтовая линия образуется при равномерном перемещении точки вдоль образующей цилиндра, которая равномерно вращается вокруг оси цилиндра. (Если цилиндру придать равномерно - вращательное движение, а карандашу, приставленному к нему, равномерно - поступательное (снизу-вверх), то на поверхности цилиндра карандаш оставит след в виде цилиндрической винтовой линии).

В технике наиболее распространена цилиндрическая винтовая линия. Винтовая линия может быть *правой,* если линия поднимается снизу слева вверх направо, и левой, если линия поднимается снизу справа вверх налево. (Лист бумаги, имеющей форму прямоугольника треугольника АВС обёртывают вокруг цилиндра, при этом гипотенуза треугольника АВС образует цилиндрическую винтовую линию. Если длина катета АС=Пd длины окружности, то точка В расположится на той образующей, на которой находится точка А. Получится полный оборот винтовой линии вокруг цилиндра. Если гипотенуза АВ будет продолжена, то на цилиндре от точки В начнётся 2-ой оборот винтовой линии. Развёртка в. л. является прямой. Длина развёртки одного оборота в. л.=гипотенузе АВ
Коническая винтовая линия образуется при равномерном движении точки вдоль образующей прямого кругового конуса, которая равномерно вращается вокруг оси.
Фронтальная проекция винтовой линии конуса представляет собой синусоиду с затухающей волной, а горизонтальная - спираль Архимеда. К. в. линия может быть правой и левой.

Винтовая поверхность
Если на поверхности цилиндра по винтовой линии прорезать канавку, то режущая кромка резца образует *винтовую поверхность.* Характер этой поверхности зависит от формы головки резца.

Винтовой поверхностью называют поверхность, которую описывает какая - либо образующая, перемещающая по винтовой линии.

В технике применяются винтовые поверхности сложного образования: *цилиндроид, коноид, наклонный геликоид и винтовой цилиндр круглого нормального сечения.* Для образования этих поверхностей в качестве направляющих используется винтовые линии. Поверхности, образованные с помощью винтовых линий, называют *винтовыми поверхностями.*

1. Поверхность винтового цилиндроида - при конструировании и изготовлении режущих инструментов.
2. Коноид- в транспортирующих устройствах (винтовые конвейеры), при устройстве винтовых лестниц, въезды многоэтажные гаражи(пандусы).
3. Наклонный геликоид - используется в резьбах
4. Битовой цилиндр круглого нормального сечения - применяется в змеевиках, пружинах.

Теоретически образование резьбы можно представить так: плоскую фигуру (треугольник, квадрат, трапецию) перемещают по поверхности цилиндра так, чтобы вершины фигуры скользили по винтовым линиям, а её плоскость проходила через ось цилиндра. В результате образуется винтовой выступ, ограниченный винтовыми и цилиндрическими поверхностями.

Резьбой называется поверхность, образованная при винтовом движении плоского контура по цилиндрической или конической поверхности. При этом образуется винтовой выступ соответствующего профиля.

Резьба - это винтовая нарезка, имеющая определённый профиль, диаметр и шаг. Она нарезается на деталях, имеющих цилиндрическую или коническую поверхность. ГОСТ11708-82 определяет термины, определения и основные параметры резьбы. (d, d_1 d_2P, ход резьбы)
Резьбу можно нарезать на стержне - наружная резьба; в отверстии - внутренняя резьба.

Нарезание резьбы на стержне осуществляется специальными режущими инструментами - резцом или плашкой; в отверстии - резцом или метчиком. Если резьба выполняется с помощью режущих инструментом, то этот процесс называется *нарезкой резьбы.* Если резьба выполняется нажимным инструментом, то такой процесс называется *накаткой резьбы.*

Резьба состоит выступов (витки резьбы) и канавок. Резьба нарезается за несколько проходов резца, который при каждом следующем проходе увеличивает ширину и глубину канавки. Последний проход резца даёт полный профиль заданной резьбы.

Профиль резьбы зависит от формы заточки резца.
Профиль резьбы представляет собой контур сечения витки резьбы, полученный секущей плоскостью, проходящей через ось резьбы.

Угол профиля- угол между его боковыми сторонами. Широко применяемые в технике резьбы стандартизованы. Стандарт на резьбу устанавливает её d, шаг P и форму и размеры профиля.

Если применяется нестандартная резьба (специальная) то на изображении такой резьбы проставляют все её размеры.

Классификация резьбы.

По назначению	По форме профиля	По хар-ру пов-ти	По располо-жению	По числу заходов	По направ. винт.линии
Крепёжные	Круглая, треуг-ая	цилиндри-ческая, коническая	внешняя внутренняя	однозаход, многозаход.	правая, левая
Ходовые	трап., прямоуг.				
специальные					

Многозаходная резьба: если на одном и том же участке поверхности стержня нарезать несколько винтовых линий, равномерно смещённых по окружности относительно друг друга, то получим многозаходную резьбу (2-х, 3-х, 6-ти). Число заходов резьбы в готовом изделии определяют по торцовой поверхности нарезанного стержня, где отчётливо видны концы винтовых ниток в виде полукругов.

Изображение резьбы.

ГОСТ 2.311-68 устанавливает правила изображения и нанесений изображений резьбы на чертежах.
Резьба на чертежах изображается условно, независимо от формы её профиля.

Профили резьбы и их основные параметры.

По профилю резьбы делятся на
1) треугольные
2) трапецеидальные
3) упорные
4) прямоугольные
5) круглые

6)

Треугольные резьбы

а) цилиндрическая метрическая резьба с d 1 до 600 мм

б) метрическая коническая

в) трубная резьба (в трубопроводах)

г) резьба метрическая для деталей из пластмассы (приборостроение, машиностроение)

трапецеидальная резьба - на кодовых винтах различных станков в штурвальных винтах.

Упорная резьба - в домкратах большой грузоподъёмности, на грузовых крюках подъём, машино - винтовых прессах, в прокатных станах.

Круглая - в пожарной арматуре, на крюках грузоподъёмных машин для предохранительных стекол и корпусов электроосветительной арматуры, в цоколях и патронах электрических ламп.

Технологические элементы резьбы.

К технологическим элементам резьбы относятся:

1. Сбег резьбы
1. Недорез
2. Недовод
3. Проточки

4.Фаски

Обозначение стандартной резьбы.

1. Метрическая

M24

M24x1

M24xl LH

M24x3(Pl) LH

M24LH-6g

M24-6H

2. Трапецеидальная

Tr20xl-6g

3. Упорная S40LH-6H

4. Круглая Rd20xl-6g

5. Трубная цилиндрическая

G1-A

G1-B

6. Трубная коническая

R- наружная

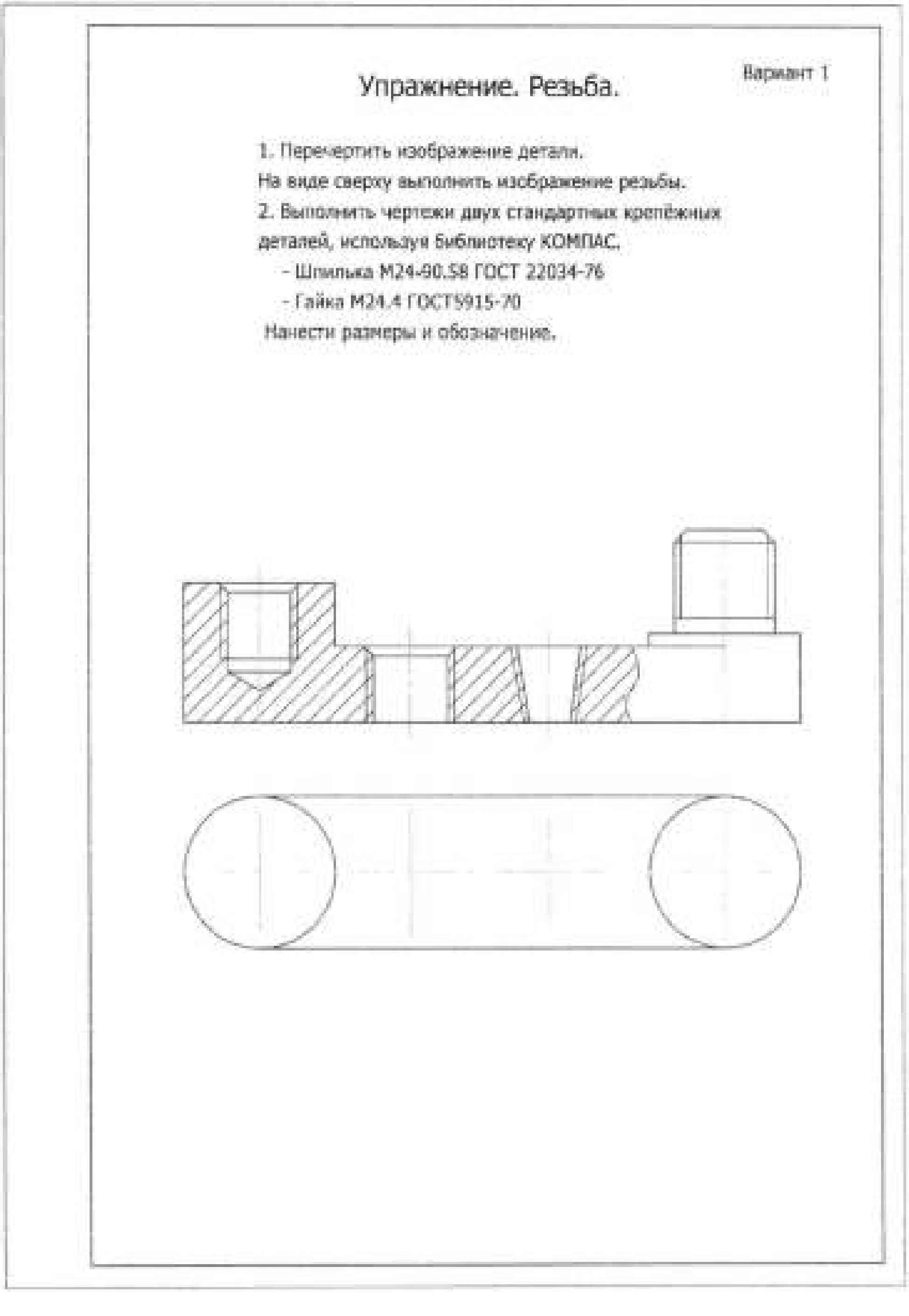
Rc- внутренняя

Обозначение стандартных изделий

Болт 2M16xl,5.6g x95.68.09 ГОСТ7798-70

Гайка M24-6H.6 ГОСТ5915-70

Винт M8-6g x50.58 ГОСТ1491-80 Шпилька M24-6g x80.36 ГОСТ22032-76



Практическая работа № 6а

Тема 4.4 Эскизы деталей и рабочие чертежи	Последовательность выполнения эскиза деталей
Цель работы:	*уметь:* выполнять эскизы технических деталей *знать*: последовательность выполнения эскиза детали с натуры *формировать общие и профессиональные компетенции:* стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства; использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

Эскизы деталей и рабочие чертежи

Эскизом называется **конструкторский** документ временного характера, выполненный от руки, без применения чертёжных инструментов без масштаба, но с соблюдений пропорций.
Деталь - изделие из однородного по наименованию и марке материала.

Глазомерный масштаб - обусловленная пропорциональность наносимых линий (ширина предмета к его длине). При этом должна сохранятся пропорция в размерах всей детали в целом.

Эскизы выполняются в следующих случаях:

1. При проектировании новых конструкций
2. При ремонте оборудования
3. При необходимости изготовить деталь самому эскизу
4. При составлении рабочего чертежа имеющейся детали

Эскизы рекомендуется выполнять от руки на листах клетчатой бумаге или миллиметровой, мягким карандашом.
Но прежде, чем приступить к выполнению эскиза технической детали, должны определить и выбрать *главный вид детали.*

Рекомендации по выбору главного вида

Главный вид детали - это изображение, которое даёт наибольшее представление о его форме и размерах.
1. Для деталей, имеющих форму тела вращения или близкой к ней, главный вид располагают так, чтобы ось этой детали была параллельно основной надписи.
2. Для плоских деталей главный вид выбирают так, чтобы опорная поверхность была параллельно основной надписи.
3. Для корпусных деталей (литьём, штамповкой) главный вид выбирают так какое положение она занимает при эксплуатации (в сборочных единицах).

Порядок выполнения эскиза

1. Ознакомление с деталью (Сделать анализ геометрической формы детали, т.е. изучить из каких геометрических тел состоит её форма и как эти тела **связаны между собой, ознакомиться с её конструкцией - определить в ней отверстия, канавки, проточки, выступы, фаски и др. элементы)
2. Выбор главного вида
3. Установить количество изображений (вид, разрезы, сечения, выносной элемент). Количество изображений должно быть мин., но достаточным, чтобы представить форму предмета.
4. Выбор формата (А4, А3)
5. Компоновка (расположение) изображений на рабочем поле формата эскиза
6. Выполнение изображений (видов, разрезов, сечений, выносных элементов, конструктивных элементов (фаски, проточки)). Тут же выполняют и штриховку.
7. Нанесение размерной сетки, а затем размерного числа.

8. Обозначить шероховатость поверхности.
9. Записать технические требования, марку материала.
10. Заполнить основную и дополнительную надписи.

Технические требования

Кроме изображения детали с размерами чертёж может содержать текстовую надпись, состоящую из технических требований (техническая характеристика). ГОСТ 2.316-68 содержит правила нанесения на чертежах надписей, тех. требований, таблицы. Содержание текста и надписей должно быть кратким и точным. Текст надписей и таблиц размещают параллельно основной надписи чертежа. (Текстовая часть, надписи, таблицы содержит данные, которые невозможно выразить графически или условными обозначениями).

В учебных целях технические требования будут следующие:

1. Требования, предъявляемые к материалу, заготовке, термообработке
   240.. .260HB
   46.. .46HRC

2. Размеры, допуски размеров
   Неуказанные предельные отклонения размеров: отверстий по H14, валов по h14, ост. ±JT14/2

3. Неуказанные литейные радиусы R1...3 мм.

Обозначение материала

На рабочих чертежах помещают необходимые данные о материале, из которого изготовлена деталь. В основной надписи чертежа детали указывают вид, наименование и марку материала в соответствии с его стандартом.

1. Углеродистая сталь обыкновенного качества Ст. 3ГОСТ3 80-94
2. Углеродистая качественная конструкционная сталь Сталь45ГОСТ1050-88
3. Серый чугун СЧ18ГОСТ1412-85
4. Латунь - медно-цинковая сплав Л85ГОСТ15527-70
5. Алюминий АЛ2ГОСТ2685-75

Нанесение размеров

Нанесение размеров должно соответствовать технологии изготовления детали, т.е. учитывать последовательность операций обработки заготовки.
Все размеры должны наноситься от базовой поверхности.
Различают базы: *технологические, конструкторские, измерительные, сборочные, вспомогательные*
Размеры детали можно наносить от баз 3-мя способами: цепным, координатным, комбинированным.

А - выносной элемент- дополнительное отдельное изображение, какой- либо части предмета, требующей пояснения в отношении формы и размеров.

Обмер деталей

Измерение и контроль размеров деталей подробно рассматриваются в курсе «Метрология, стандартизация и сертификация».
В курсе ИГ при выполнении эскизов основное внимание уделяют анализу и изображению формы детали, а не точности измерений.
Поэтому для определения размеров детали при выполнении эскизов используют металлические линейки, кронциркули, нутромеры.
Более точные измерения проводят с помощью штангенциркуля. Размеры радиусов, скруглений, впадин, галтелей измеряют радиусомером.
Шаг резьбы измеряют с помощью резьбовых шаблонов (резьбомеров).

Порядок выполнения эскиза

1. Ознакомиться с деталью (сделать анализ геометрической формы детали, ознакомиться с её конструкцией)
2. Выбрать главный вид детали (главный вид-это изображение, которое даёт наибольшее представление о его форме и размерах)
3. Установить количество изображений (виды, разрезы, сечения, выносные элементы). Количество изображений д. б. минимальным, но достаточным, чтобы представить форму предмета
4. Выбрать формат
5. Выполнить компоновку изображений
6. Выполнить изображения
7. Нанести размерную сетку, а затем размерные числа
8. Записать технические требования, марку материала
9. Обозначить шероховатость поверхности
10. Заполнить основную и дополнительную надписи

Примеры выбора главного вида

Графическая работа №6а. Эскиз детали.

Эскиз - это чертеж, выполненный «от руки», в глазомерном масштабе, с соблюдением пропорций изображаемого предмета, по правилам прямоугольного проецирования и содержащий все данные для изготовления изделия и предназначенный для разового использования в производстве.

Эскизы деталей, как правило, выполняются в следующих случаях:

- при разработке конструкции новой детали;
- при необходимости доработки конструкции детали в производстве;
- для разового изготовления детали в случае выхода ее из строя в процессе эксплуатации.

Эскиз выполняется с соблюдением всех правил выполнения чертежей деталей, установленных стандартом. Размеры на эскизе должны соответствовать действительным размерам детали. Каждый эскиз сопровождается основной надписью.

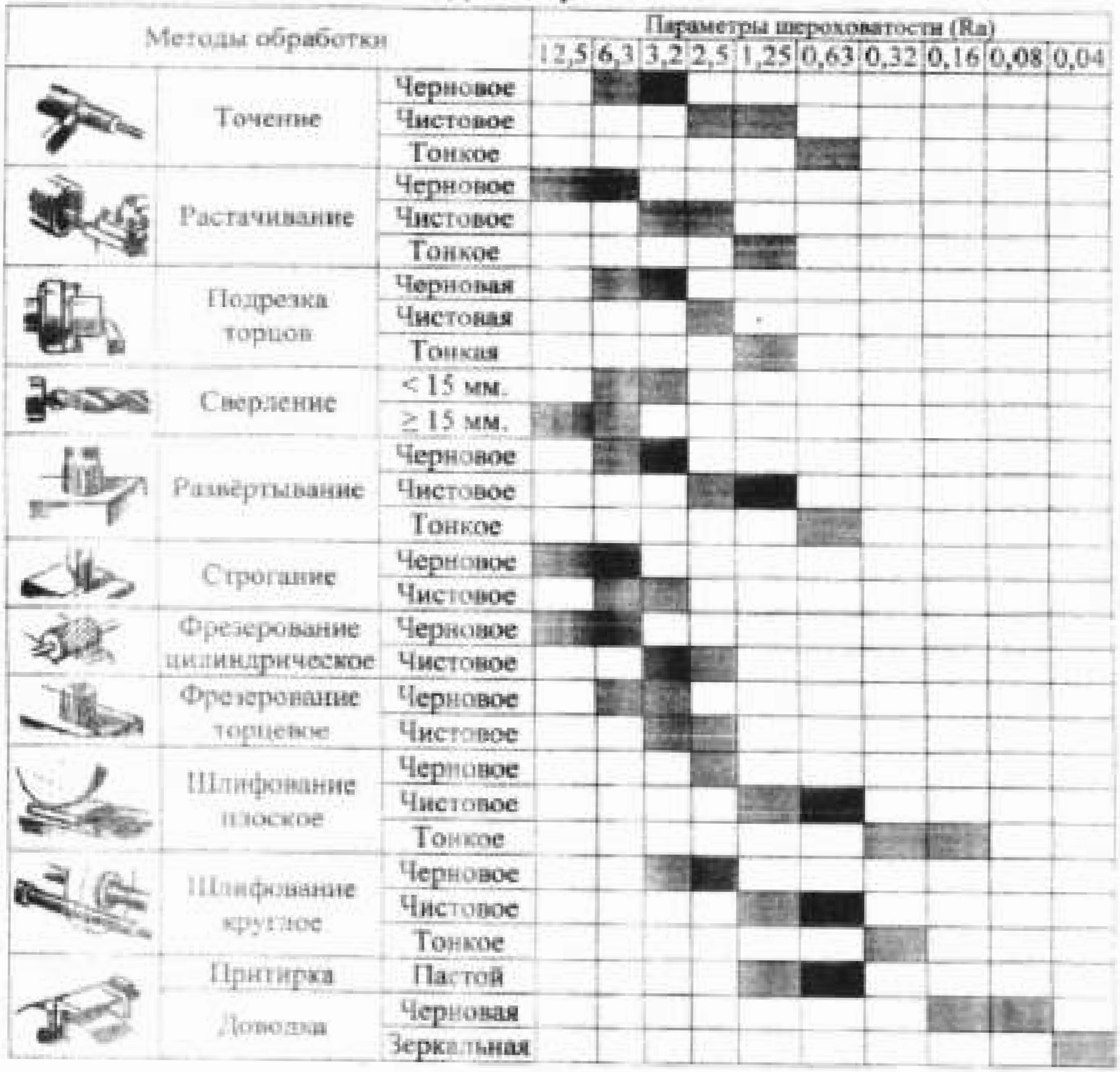
Разница между чертежом и эскизом заключается в том, что на эскизе графа «масштаб» не заполняется и вслучае выполнения выносных элементов вместо масштаба над изображением наносится надпись «увеличено».

Задание - выполнить эскиз детали, выданной преподавателем.

Практическая работа № 66

Тема 4.4 Эскизы деталей и рабочие чертежи	Последовательность выполнения рабочих чертежей деталей
Цель работы:	*уметь:* выполнять и читать рабочие чертежи технических деталей *знать:* требования к рабочим чертежам детали, по ГОСТ2.109-73 требования к деталям, выполняемым механической обработкой, литьем рабочий чертежи изделия основного и вспомогательного производства *формировать общие и профессиональные компетенции:* стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства; использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

Шероховатость поверхности стальных деталей при различных видах обработки.



Методы обработки		12,5	6,3	3,2	2,5	1,25	0,63	0,32	0,16	0,08	0,04
		Параметры шероховатости (Ra)									
Точение	Черновое										
	Чистовое										
	Тонкое										
Растачивание	Черновое										
	Чистовое										
	Тонкое										
Подрезка торцов	Черновая										
	Чистовая										
	Тонкая										
Сверление	< 15 мм.										
	≥ 15 мм.										
Развёртывание	Черновое										
	Чистовое										
	Тонкое										
Строгание	Черновое										
	Чистовое										
Фрезерование цилиндрическое	Черновое										
	Чистовое										
Фрезерование торцевое	Черновое										
	Чистовое										
Шлифование плоское	Черновое										
	Чистовое										
	Тонкое										
Шлифование круглое	Черновое										
	Чистовое										
	Тонкое										
Притирка	Пастой										
Доводка	Черновая										
	Зеркальная										

- более предпочтительное значение
- менее предпочтительное значение

Рабочий чертеж детали

Задание: выполнить рабочий чертёж по эскизу детали (графическая работа №6). Рабочие чертежи деталей должны быть выполнены с учетом следующих требований:

1.Деталь на рабочем чертеже вычерчивается в том же положении, какое она занимает при ее изготовлении.

2.Главный вид детали выбирается с учетом следующих условий:

-по возможности большее количество осей отверстий и других элементов ориентируют параллельно фронтальной плоскости проекций, на которой изображается главный вид;

-привалочная плоскость детали (плоскость, по которой деталь соединяется с другой деталью) должна, быть расположена горизонтально или параллельно профильной плоскости проекций, если изображается вид слева.

3.Детали, имеющие плоскости симметрии, изображаются не полностью рассеченными, а в соединении с видом.

4.Масштаб выносного элемента следует выбирать таким, чтобы можно было свободно показать его форму и нанести все размеры.

5.Размеры формы элементов деталей указываются по возможности на одном изображении, на котором данный элемент имеет более полное изображение. Размеры диаметров отверстий проставляются на разрезах этих отверстий. Размеры некруглых отверстий и пазов проставляются на тех изображениях, на которых показана форма отверстий.

6. Записать технические требования. Размещаются эти требования над основной надписью. Ширина колонки должна быть не более 185 мм

Графическая работа №6б. Рабочий чертёж детали.

Чертеж детали. Под чертежом детали понимают конструкторский документ, содержащийизображение детали и другие данные,необходимые для ее изготовления и контроля. Рабочие чертежи разрабатывают на каждую деталь. Наряду с изображениями формы всех элементов детали и их размерами рабочий чертеж в общем случае содержит также следующие данные:

- предельные отклонения размеров, формы и расположения поверхностей, правила указаний которых установлены в ГОСТ 2.307 68 и ГОСТ 2.308 79;
- обозначения шероховатости поверхностей, установленные ГОСТ 2.309 73;
- обозначения покрытий, термической и других видов обра-ботки, установленные ГОСТ 2.310 68;
- текстовую часть, состоящую из технических требований и технических характеристик;
- надписи и таблицы с размерами и другими параметрами, техническими требованиями, контрольными комплексами, условными обозначениями, правила нанесения которых установлены в ГОСТ 2.316 68.

Выбор числа изображений.

Количество изображений предмета, в том числе и детали на чертеже или эскизе,должнобыть наименьшим, но обеспечивающим полное представление о предмете при применении установленных соответствующих стандартных обозначений, знаков и надписей.

Для деталей типа тел вращения достаточно одного изображения на плоскости проекций, параллельной оси тела: вида, разреза. Одного изображения достаточно также для деталей типа валов, втулок с резьбой с обозначением резьбы. Для деталей типа тел вращения с различными конструктивными элементами, например отверстиями, срезами, пазами, главное изображение дополняют одним или несколькими видами, разрезами, сечениями, которые выявляют форму этих элементов, а так-же выносными элементами.

Выбор главного изображения детали.

Главное изображение детали выбирают с учетом технологии ее изготовления. Если в процессе изготовления детали одно из ее положений заведомо является преобладающим, то на главном изображении деталь рекомендуется показывать в этом положении.

Выбор формата и планировки чертежа.

Формат чертежа или эскиза выбирают в зависимости от сложности и размеров детали с учетом возможности как увеличения изображения по сравнению с натурой для сложных и мелких, так и уменьшения для простых по форме и крупных деталей. Изображения на чертеже должны обеспечивать ясность всех элементов детали. Для мелких элементов детали используют выносные элементы. Прежде чем выбрать формат чертежа, тщательно анализируют форму детали и опреде-ляют количество необходимых изображений.

Задание - выполнить чертёж детали по предварительно выполненному эскизу детали, нанести размеры, записать технические требования.

Практическая работа № 7

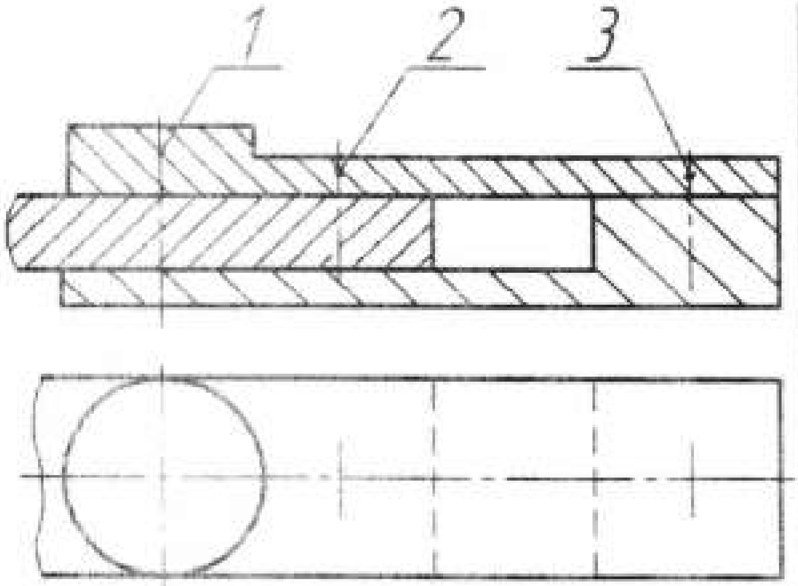
Тема 4.5 Разъемные и неразъемные соединения деталей	Разъемные соединения. Виды соединений и изображение их на чертеже.
Цель работы:	*уметь:* изображать болтовое, винтовое, шпилечное соединение упрощенно по ГОСТ2.315-68 *знать:* резьбовые соединения и их изображение на чертеже *формировать общие и профессиональные компетенции:* стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства; использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

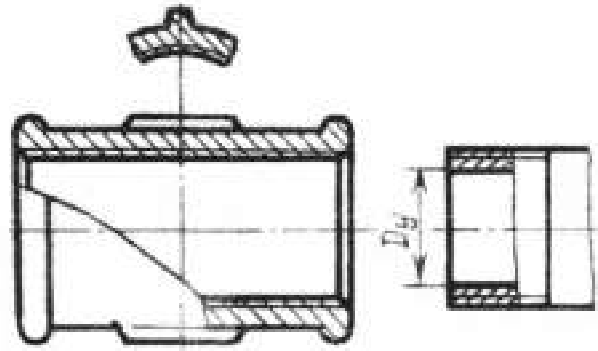
Соединения резьбовые

Перечертить изображение деталей в масштабе 2:1. Изобразить упрощённо по Г ОСТ 2.315-68 соединение деталей

1) болтом Ml2 (ГОСТ 7798-70);
2) винтом М8 (ГОСТ 1491-80);
3) шпилькой Ml0 (ГОСТ 22036-76)

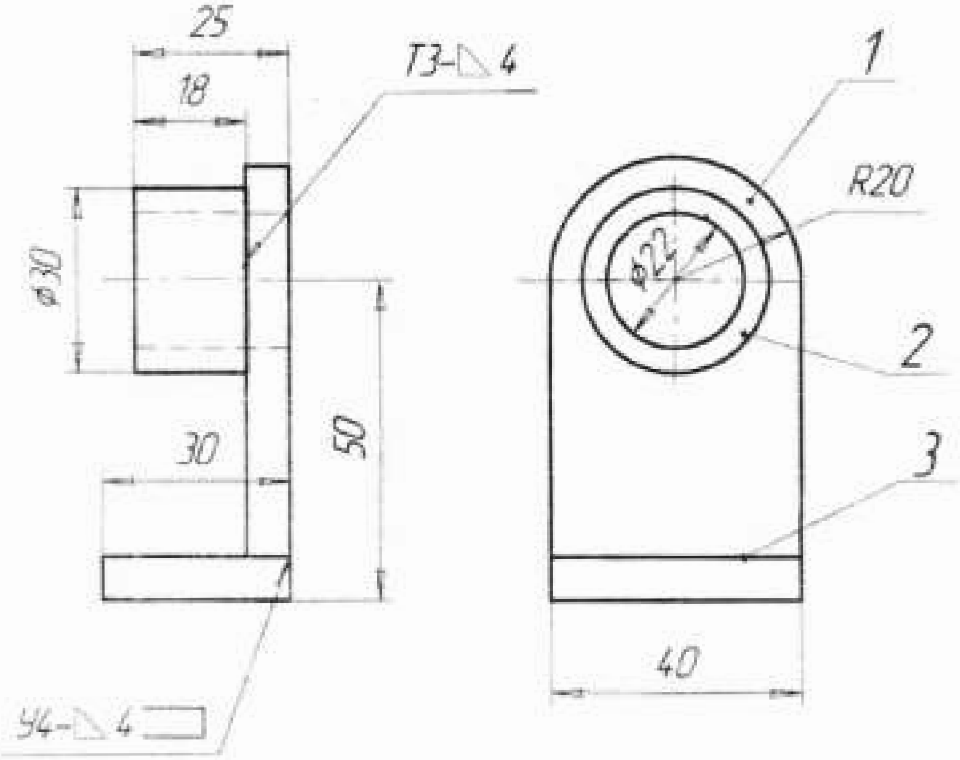
Изобразить соединение муфты с трубой.
Условный проход Dy - 8 мм.
Выполнить в масштабе 4:1.





Практическая работа № 8

Тема 4.5 Разъемные и неразъемные соединения деталей	Неразъемные соединения. Виды соединений и изображение их на чертеже.
Цель работы:	*уметь:* изображать сварные соединения *знать*: понятие сборочного чертежа, составление спецификации *формировать общие и профессиональные компетенции:* стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства; использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности



1. Сварные швы выполнены по ГОСТ5264-80
2. Электроды марки Э38 ГОСТ9467-75

					ТМКЧ 02.08.05.000СБ			
Изм	Лист	№ докум	Подп	Дата	Опора	Лит	Масса	Масштаб
Разраб	Бондарь Р.В				Сборочный чертеж	у		1:1
Пров						Лист 1	Листов 1	
Т.контр						ТАМКТС		
Н.контр								
Утв								

1.Команда **Файл-Создать-Лист**
2.**Показать всё**
3.Команда **Настройка-Параметры текущего листа – Параметры листа-Формат-Оформление**
4.**Файл-Сохранить как** (Папка Компас 5.11, имя файла **Опора**) Сохранить
5.В диалоговом окне **Информация о докумете** заполнить 2 текстовых окна **Автор и Комментарий** (Сборочный чертеж)
6.Меню **Компоновка-Создать вид**. В диалоговом окне создать вид 1, масштаб 1:1, имя файла **Главный вид**
7.На экране появился курсор в виде символа начала координат. Щелчком ЛКМ ближе к левой стороне формата расположим точку начала координат.
8.На экране появился **системный символ начала координат**.
9.Подключим **сетку**.
10.Меню **Увеличить масштаб**. Теперь можно приступать к вычерчиванию чертежа детали.
11.На странице **Геометрические построения** включить **Ввод прямоугольника**. Задаём параметры h=7,w=30
12.Привязка **Ближайшая точка**
13.Присоединяем к началу координат и щелкаем ЛКМ
14.Вводим еще прямоугольник. Задаем параметры h=63, w=7. Шаг курсора 1мм , привязка **Выравнивание**
15.**Ввод параллельной прямой**. Вводим dis=50мм Стиль **Осевая**. Создать объект
16.При помощи команды **Отрезок** строим прямоугольник с h=30,w=18
17.Оформляем вид слева.
Команда **Ввд прямоугольника**. Построение прямоугольника начнем с нижнего левого угла. Воспользуемся **Локальной** привязкой **Выравнивание**.

Изм	Лист	№ докум	Подп	Дата	Методические указания к сборочному чертежу
Разраб	Бондарь Р.В.				Опора Сборочный чертеж
Пров					Лит: у · Лист: 1 · Листов: 1
Н.контр					ТАМКТС
Утв					

Перв. примен. · Справ. № · Подп. и дата · Инв. № дубл. · Взам. инв. № · Подп. и дата · Инв. № подл.

Копировал Формат А4

18.Строим прямоугольник с h=7,w=40мм.
19.Локальная привязка **Выравнивание** фиксирует точку +1 и проведем **Осевую линию**.
20.Строим вертикальные отрезки на высоту 43мм ,меняя тип линии на **Основную**.
21.Строим дугу по 2-м точкам **rad=20мм**.
22.Ввод окружности rad=15мм.
23.Ввод окружности rad=11мм.
24.Строим невидимую окружность на главном виде rad=11мм.
Ввод вспомогательной прямой dis=11мм.
25.Ввод **Отрезок** ,меняем Стиль линии на **Штриховую**.
26.Команда **Удалить – Вспомогательные линии в текущем виде**.
27.Сохранить документ.
28.Строим **Линии выноски** для обозначения сварных швов
29.Включим команду **Линии выноски**.
30.Указать **точку** начала полки(вверху)
31.Щелкнуть на кнопке **Параметры** .
В диалоговом окне **Параметры линии-выноски** включить кнопку **Наружний сварной шов** в группе **Тип стрелки**.
Щелчком ОК закрыть диалоговое окно.
32.Для формирования ответвлений указать **точку 2**
33.Щелчком на поле **Ввод текста** в строке параметров вызвать на экран диалоговое окно **Введите текст**.
В текстовом поле 1 введите текст Т3-⊿4.
34.Для ввода знака ⊿ щелкнуть на кнопке **Вставить-Спец знак**. Нужный знак находиться в разделе **Швы сварных соединений** диалогового окна **Спецзнак**.
35.Построить линии выноски других сварных швов
36.Для простановки размеров включим страницу **Размеры и технологические обозначения** Инструментальной панели , Включить кнопку **Линейный размер**.
37.Ввод обозначений позиций.
На Панели расширенных команд включить кнопку **Обозначение позиции**.

В ответ на запрос системы **Укажите точку начала полки** щелкните мышью в точке1 (вверху)/

Щелчком на кнопке **Параметры** можно изменить направление полки.

В ответ на запрос системы **Укажите точку начала ответвления** щелкнуть в точке 2 (на чертеже)

Щелкнуть на кнопке **Создать объект**. Команда остается в активном состоянии.

Для выравнивания обозначений позиций по горизонтали используем привязку **Выравнивание**. При необходимости для смены номера позиции воспользуемся окном **Введите текст**.

Щелчком на кнопке **Создать объект** закончим построение обозначения позиций.

38.Команда **Компоновка–Технические требования–Ввод**

39.Команда **Компоновка–Основная надпись**.

40.Команда **Показать всё**

41.Включить кнопку **Просмотр для печати**.

42.Вывод на принтер.

Инв. № подл. | Подп. и дата | Взам. инв. № | Инв. № дубл. | Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Методические указания к сборочному чертежу	Лист 3

Формат	Зона	Поз.	Обозначение	Наименование	Кол.	Приме-чание
				Документация		
А4			ТМКЧ 02.08.05.000СБ	Сборочный чертеж		
				Детали		
Б4		1	ТМКЧ 02.08.05.001	Планка	1	
Б4		2	ТМКЧ 02.08.05.002	Бобышка	1	
Б4		3	ТМКЧ 02.08.05.003	Основание	1	

Перв. примен.

Справ. №

Подп. и дата

Инв. № дубл.

Взам. инв. №

Подп. и дата

Инв. № подл.

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	ТМКЧ 02.08.05.000		
Разраб.		БондарьР.В			Опора	Лит.	Лист	Листов
Пров.						У		1
Н.контр.						ТАМКТС		
Утв.								

Копировал Формат А4

Создание спецификации к сборочному чертежу ОПОРА

Создание спецификации в ручном режиме является самым простым способом получения спецификации в КОМПАС-ГРАФИК Для этого достаточно минимальных знаний о модуле проектирования спецификаций

1.Для создания новой спецификации выполнить команду **Файл–Создать–Спецификацию** или нажать кнопку **Новая спецификация** на Панели управления На панели появится бланк спецификации. Сразу после создания специфи-кация переходит в так называемый **нормальный режим**. Данный режим предназначен именно для заполнения бланка и элементы оформления в нем автоматически гасятся.
2.На Панели управления появилось много новых кнопок– система перешла в режим работы со спецификацией
3.По умолчанию система создает простую спецификацию по ГОСТ 2.106-68
Команда **Настойка–Параметры текущей спецификации**
В диалоговом окне **Настройка параметров текущей спецификации** в качестве стиля документа должен быть установлен соответствующий стиль
4.Команда **Настройка–Настройка спецификации**.
В диалоговом окне **Настройка спецификации** отключить опцию **Связь сборочного чертежа со спецификацией**.
5.Команда **Файл–Сохранить как**. В диалоговом окне **Укажите имя файла для записи** откройте папку Blok, а в поле **Имя файла** ввести имядокумента **ТМКЧ 02.08.05.000**
6.Команда **Сохранить**.
7.Теперь можно приступить к вводу информации в бланк специ-

Перв. примен.
Справ. №
Подп. и дата
Инв. № дубл.
Взам. инв. №
Подп. и дата
Инв. № подл.

Методические указания к созданию спецификации

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
Разраб.		Бондарь Р.Б.		
Пров.				
Н.контр.				
Утв.				

Создание спецификации к сборочному чертежу ОПОРА

Лит.	Лист	Листов
у	1	3

ТАМКТС

фикации. Ввод данных начинается с создания какого-либо раздела.

8.Команда **Редактор-Добавить раздел**. В диалоговом окне **Выберите раздел и тип объекта** сделать текущим раздел **Детали** и щелкнуть на кнопке **Создать**.

9.В бланке спецификации появилось название раздела, а его первая строка стала доступной для редактирования. В ячейке **Позиция** система автоматически проставила номер 1 первой позиции. Заполним первую строку. После заполнения строки Enter **не** нажимать. Для перехода к нужной ячейке щелкнуть мышью или клавиатурными командами **Tab** для перехода слева направо и **Shift+Tab** справа налево.

10.Строка, относящаяся к конкретному объекту спецификации так и называется **объект**. После заолнения всех ячеек строки необходимо подтвердить создание объекта. Для этого необходимо щелкнуть мышью в любом свободом месте спецификации.

11.Для создания второго объекта выполнить команду **Редактор-Добавить базовый объект**. Система создаст новую строку, которую мы должны заполнить. Подтвердить создание объекта щелчком мыши в свободном месте спецификации. Иток повторить нужное количество раз.

12.Приступаем к созданию раздела **Документация**.
Редактор-**Добавить раздел-Документация**.
Заголовок раздела **Документация** появился перед разделом **Детали**, как это предписывается стандартом.

13.Ни один раздел в спецификации КОМПАС-ГРАФИК не может быть пустым, поэтому одновременно с созданием раздели система открыла строку для ввода объекта спецификации. Заполняем строку **Сборочный чертеж**. После заполнения ячеек подтвердите создание объекта с помощью клавиатурой команды Ctrl+Enter.

После создания объекта раздела **Документация** остается текущим. По умолчанию в разделе **Документация** активен лишь режим автоматической сортировки. Режимы простановки позиций и подключения геометрии отключены.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Методические указания к созданию спецификации	Лист 2

14.Мы закончили формирование ввод данных в таблицу спецификации. Мы работаем в **основном режиме**.
Для того, чтобы получить доступ к штампу, нужно перейти в **режим разметки страниц**. Для смена режима щелкнуть на кнопке **Разметка страниц** на Панели управления. Чтобы увидеть всю страницу целиком щелкнуть на кнопке **Масштаб по высоте листа** в Строке текущего состояния.
В режиме **разметки страниц** можно заполнить основную надпись спецификации. Для заполнения основной надписи всех страниц достаточно заполнить лишь первую из них. Все остальные автоматически наследуют данные с первой страницы. Расчет номеров листов выполняется тоже автоматически.
15.Щелкнуть на кнопке **Масштаб по ширине листа** в Строке параметров. Выполнить двойной щелчок мышью в области штампа – система перейдет в режим его редактирования.
16.Заполнить **Основную надпись**. Для выхода из режима работы с основной надписью достаточно просто щелкнуть мышью вне его.
17.Чтобы увидеть всю страницу целиком достаточно щелкнуть на кнопке **Масштаб по высоте листа** в Строке текущего состояния. Спецификация готова.
18.Сохранить ее на диске.

Инв. № подл. | Подп. и дата | Взам. инв. № | Инв. № дубл. | Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Методические указания к созданию спецификации	Лист 3

Практическая работа № 9

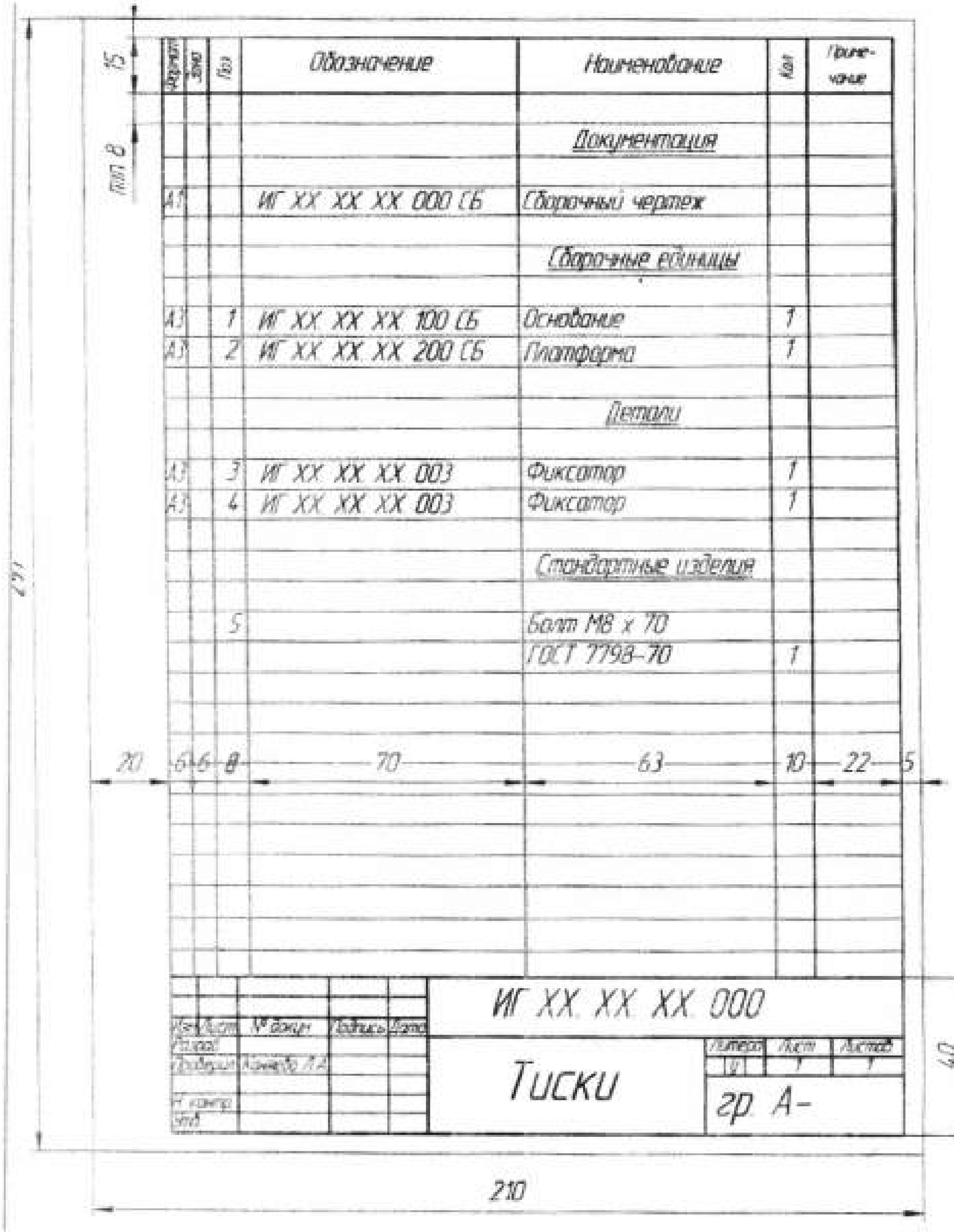
Тема 4.7 Чтение и деталирование чертежей

Назначение сборочной единицы. Работа сборочной единицы. Количество деталей, входящих в сборочную единицу.
Деталирование сборочного чертежа. Порядок деталирования сборочного чертежа. Увязка сопрягаемых размеров.

Цель работы:

уметь: читать и деталировать сборочный чертеж.
знать: назначение и работу сборочной единицы габаритные, установочные присоединительные размеры
формировать общие и профессиональные компетенции:
стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства;
использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

Основные размеры и пример заполнения первого листа спецификации (к сборочному чертежу)



Формат	Зона	Поз.	Обозначение	Наименование	Кол.	Примечание
				Документация		
			М400.18.00.00 СБ	Сборочный чертеж		
				Детали		
		1	М400.18.00.01	Корпус	1	
		2	М400.18.00.02	Губка подвижная	1	
		3	М400.18.00.03	Направляющая	1	
		4	М400.18.00.04	Втулка	1	
		5	М400.18.00.05	Винт	1	
		6	М400.18.00.06	Пластина	2	
		7	М400.18.00.07	Кольцо	1	
				Стандартные изделия		
		8		Винт М10х12.58 ГОСТ 1476—84	1	
		9		Винт А.М6х10.58 ГОСТ 1491—80	[illegible]	
		10		Гайка М6.5 ГОСТ 5915—70	[illegible]	
		11		Шпилька М6х30.58 ГОСТ 22034—76	[illegible]	
		12		Штифт 6h8х40 ГОСТ 3128—70	1	

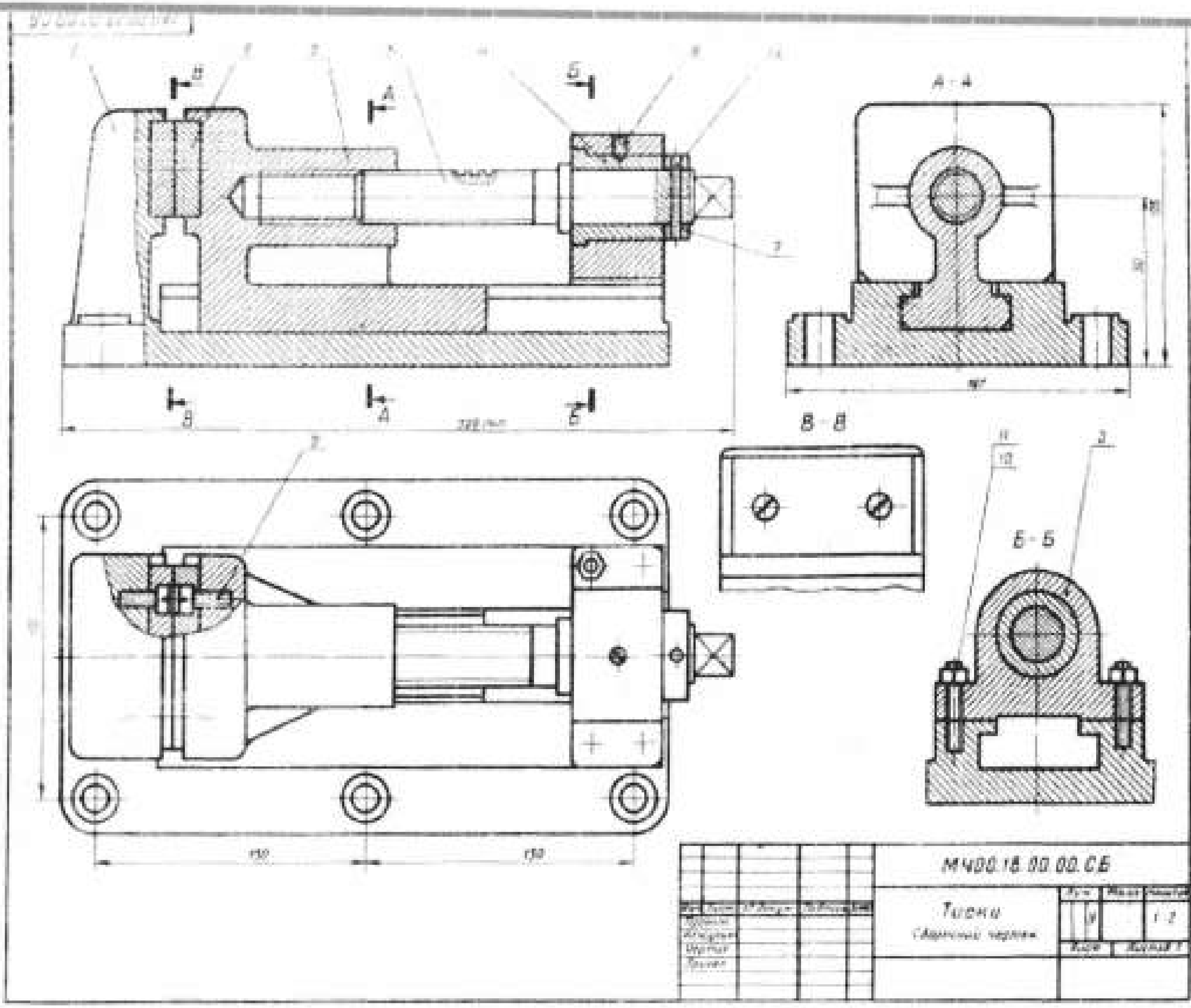
[illegible]ски данной конструкции служат для закрепления обрабатываемых деталей на металлорежущих станках. [illegible] устанавливаются на столе сверлильного или [illegible] станка и закрепляются (детали крепления тисков к столу не показаны). Обрабатываемую деталь за[illegible] между двумя пластинами 6. Винт 5, имеющий упорную резьбу, удерживается от осевого перемещения кольцом 7 и штифтом 12. Чтобы втулка не вращалась вокруг своей оси, установлен винт 8. При вращении винта 5 подвижная губка 2 будет перемещаться по направляющему пазу корпуса 1, зажимая пластинами обрабатываемую деталь.

Задание

Выполнить чертежи деталей 1 ... 7. Деталь 1 или 2 вычертить в аксонометрической проекции.
Материал деталей 1 ... 3 — чугун СЧ25 ГОСТ 1412—85, 4 ... 7 — сталь Ст5 ГОСТ 380—71.

Ответьте на вопросы

Сколько отверстий в детали 6?
Покажите контур направляющего паза корпуса 1.
Назовите все детали, изображенные на разрезах А-А и Б-Б.



Общие сведения о схемах

Схемами называются конструкторские документы, на которых составные части изделия, их взаимное расположение и связи между ними показаны в виде условных графических изображений.

В современной технике широко используются механические, пневматические, гидравлические и электрические устройства и приводы. Изучение принципа и последовательность действия таких устройств по чертежам общих видов и сборочным чертежам часто затруднительно. Поэтому кроме чертежей часто составляют специальные схемы, позволяющие значительно быстрее разобраться в принципе и последовательности действия того или иного устройства.

Схемы просты по выполнению и достаточно наглядны; они могут быть выполнены в прямоугольных и аксонометрических проекциях.
Масштаб при выполнении схем выбирается произвольный, пропорции между размерами элементов изделия тоже, как правило, не соблюдаются.

Разновидности схем

Виды и типы схем *(кроме электрических)* определены в *ГОСТ 2.701-84*, в котором установлены обозначения схем и общие требования к их выполнению.

Виды схем

В зависимости от характера элементов и линий связей, входящих в состав устройства, схемы подразделяются на виды, каждый из которых часто обозначается буквой: кинематические - ***К***, гидравлические – ***Г***, пневматические – ***П***, электрические – ***Э***, оптические – ***О*** и др.

Типы схем

Схемы в зависимости от основного назначения делятся на типы, каждый из которых обычно обозначается цифрой:

1 – структурные;
2 – функциональные;
3 – принципиальные;
4 – соединения *(монтажные)*;
5 – подключения;
6 – общие;
7 – расположения и др.

Структурные схемы служат для общего ознакомления с изделием и определяют взаимосвязь составных частей изделия и их назначение; элементы схемы вычерчиваются простыми геометрическими фигурами *(прямоугольниками)* и прямыми линиями или аналитической записью, попускающей применение *ЭВМ*.

Функциональные схемы поясняют процессы, протекающие в изделии или в его функциональной части; в них должны быть указаны наименования всех изображенных функциональных частей.

Принципиальные схемы (полные) определяют полный состав элементов изделия и связей между ними, давая детальное представление о принципах действия изделия.

Схемы соединений (монтажные) показывают соединения составных частей изделия, а также места присоединений и вводов и выявляют провода, кабели, трубопроводы и их арматуру.

Схемы подключения показывают внешние подключения изделия к коммуникациям или устройствам.

Наименование схемы определяется ее видом и типом, например, схема гидравлическая принципиальная, схема электрическая функциональная и т. п. Шифр схемы, входящий в состав ее обозначения, состоит из буквы, определяющей вид схемы и цифры, определяющей ее тип. Например, схема гидравлическая принципиальная имеет шифр ***Г3***, схема электрическая структурная – ***Э1***.

Для изделия, в состав которого входят элементы разных видов, может быть разработана комбинированная схема, содержащая элементы и связи разных видов. Комбинированная схема обозначается буквой ***"С"***, а ее наименование определяется комбинированными видами и типом. Например, схема принципиальная гидрокинематическая.

При составлении схем применяются следующие термины:

Элемент схемы – составная часть схемы, выполняющая определенную функцию *(назначение)* в изделии, которая не может быть разделена на части, имеющие самостоятельное функциональное назначение.
Например, насос, соединительная муфта, конденсатор, резистор и т. п.

Устройство – совокупность элементов, представляющих одну конструкцию, например, механизм храповой, печатная плата, шкаф.

Функциональная группа – совокупность элементов, выполняющих в изделии определенную функцию и не объединенных в одну конструкцию.

Функциональная часть – элемент, оборудование или функциональная группа.

Линии взаимосвязи – отрезок линии на схеме, показывающий связь между функциональными частями изделия.

При выполнении схемы масштабы не соблюдаются.
Действительное пространственное расположение составных частей изделия может на схеме не учитываться или учитываться приближенно.
Элементы, входящие в состав изделия, изображаются на схемах, как правило, в виде условных графических обозначений, устанавливаемых стандартами Единой системы конструкторской документации (*ЕСКД*).
Связь между элементами схемы показывается линиями взаимосвязи, которые условно представляют собой коммуникации *(трубопроводы, провода, кабели и т. п.)* и кинематические связи *(например, валы)*.
Условные обозначения элементов общего применения на схемах устанавливает *ГОСТ 2.721-74*.

Условные графические обозначения общего применения для использования в электрических, гидравлических, пневматических и комбинированных схемах приведены в таблице…
На схемах должно быть наименьшее число изломов и пересечений линий связи, изображаемых горизонтальными и вертикальными участками.
Схемы следует выполнять компактно, но без ущерба для ясности и удобства их чтения.

Элементы, составляющие отдельное устройство, допускается выделять на схемах штрихпунктирными тонкими линиями с указанием этого устройства.
На схеме одного вида допускается изображать элементы схем других видов, непосредственно влияющих на действие изделия. Эти элементы и их связи изображаются тоже тонкими штрихпунктирными линиями.

Схеме присваивается обозначение того изделия, действие которого отображено на схеме. После этого обозначения записывается шифр схемы. Наименование схемы указывается в основной надписи после наименования изделия.

Кинематические схемы

Кинематические схемы устанавливают состав механизмов и поясняют взаимодействие их элементов. Условные обозначения на таких схемах представляют собой изображения механизмов и их составных частей, напоминающие их лишь в общих чертах.

Каждый элемент, изображенный на схеме условно, должен иметь свое обозначение: порядковый номер или буквенно-цифровое позиционное обозначение. Для каждого вида схем установлены правила нанесения таких обозначений.

На гидравлических, пневматических и электрических схемах обозначения заносятся в перечень элементов, оформляемый в виде таблицы, заполняемый сверху вниз. Правила выполнения кинематических схем изложены в *ГОСТ 2.703-68*. Условные графические обозначения элементов машин и механизмов устанавливает *ГОСТ 2.770-68*.

На кинематических схемах валы, оси, стержни, шатуны, кривошипы и т. п. изображают сплошными основными линиями толщиной ***s***. Элементы, изображаемые условно и упрощенно, выполняют сплошными линиями толщиной ***s/2***.

Кинематические схемы выполняют, как правило, в виде развертки: все геометрические оси условно считаются расположенными в одной плоскости или в параллельных плоскостях.
Каждому кинематическому элементу, изображенному на схеме, как правило, присваивают порядковый номер, начиная от источника движения. Валы нумеруются римскими цифрами, остальные элементы – арабскими.
Порядковый номер элемента проставляют на полке линии-выноски. Под полкой линии-выноски указывают основные характеристики и параметры кинематического элемента.

В соответствии с *ГОСТ 2.703-68* на схемах следует указывать следующие характеристики и параметры элементов кинематических схем:

- источник движения – наименование, тип, характеристика;
- шкив ременной передачи – диаметр шкива;
- зубчатое колесо – число зубьев, модуль, а для косозубых колес – также направление и угол наклона зубьев;
- червяк – модуль осевой, число заходов;
- ходовой винт – ход винтовой линии, число заходов, надпись «лев.» *(только для левых резьб)* и т. п.

Гидравлические и пневматические принципиальные схемы

Правила выполнения гидравлических и пневматических схем устанавливает *ГОСТ 2.704-76*.
Условные графические обозначения элементов, применяемых в этих схемах,

выполняют по *ГОСТ 2.780-96*, *ГОСТ 2.781-96* и *ГОСТ 2.784-96*.
Каждый элемент или устройство, входящее в изделие и изображенное на схеме, имеет позиционное обозначение, состоящее из прописной буквы русского алфавита и цифры.
Буквы и цифры выполняют одним размером стандартного шрифта.

Буквенное обозначение состоит из одной или двух букв: начальных или характерных в названии элемента. Например, бак – ***Б***, клапан обратный – ***КО*** и т. п.
Таблица буквенных обозначений помещена в обязательном приложении к *ГОСТ 2.704-76* – «Правила выполнения гидравлических и пневматических схем».
Например, гидробак – ***Б***, гидро *(пневмо)* клапан – ***К***, гидро *(пневмо)* клапан предохранительный – ***КП***, фильтр – ***Ф***, насос – ***Н*** и т. п.

Порядковый номер, входящий в цифровое обозначение элемента, назначается с единицы в пределах группы одинаковых элементов с одинаковыми буквенными обозначениями.
Например, Фильтр – ***Ф1***, ***Ф2*** и т. п.
Порядковые номера обозначаются обычно в зависимости от расположения элементов на схеме – сверху вниз и слева направо. Позиционное обозначение наносят на схеме рядом, справа или над условным графическим изображением элемента.
Данные об элементах записываются в стандартной таблице перечня элементов над основной надписью. Если вся таблица перечня не помещается над основной надписью схемы *(много элементов)*, то ее выполняют на отдельном листе формата *А4*.

Элементы и устройства изображают на схемах, как правило, в исходном положении. Например, пружины изображают в состоянии предварительного сжатия, обратный клапан – в закрытом положении и т. п.

Линии связи *(трубопроводы)* на схемах обозначают порядковыми номерами, начиная с единицы, которые на схеме проставляют около концов изображения этих линий. На линиях связи допускается указывать направление потока рабочей среды *(жидкости, воздуха)* в виде треугольников. Если линия связи представляет собой внутренний канал в каком-либо элементе, то перед порядковым номером линии связи через точку ставится номер этого элемента.

Электрические принципиальные схемы

Электрические схемы имеют классификацию, термины и определения, которые устанавливает *ГОСТ 2.701- 84*. Они выполняются в соответствии с *ГОСТ 2.702-75* «Схемы электрические. Общие требования к выполнению».

Существует значительное число стандартов, содержащих условные графические обозначения элементов, применяемых в электрических схемах. На схеме рекомендуется указывать характеристики входных и выходных цепей изделия *(род тока, напряжение, частота и т. п.)*. Схемы вычерчиваются для изделий, находящихся в отключенном положении.

Каждый элемент, входящий в изделие и изображенный на схеме, имеет буквенно-цифровое позиционное обозначение, составленного из буквы и порядкового номера, стоящего после буквы.

Стандарты устанавливают буквенно-цифровые обозначения для наиболее распространенных элементов.
Например, резистор –***R***, конденсатор – ***C***, катушка индуктивности или дроссель – ***L***, амперметр – ***PA***, вольтметр – ***VP***, двигатель *(мотор)* – ***M***, батарея аккумуляторная или гальваническая – ***GB***, выключатель *(переключатель, ключ, контроллер, рубильник и т. п.)* – ***S***, генератор – ***G***, транзистор и диод полупроводниковый, предохранительное устройство – ***VD***, предохранитель – ***F***, трансформатор – ***T***, электромагнит *(или муфта электромагнитная)* – ***Y***.

Порядковые номера элементов присваивают, начиная с единицы в пределах групп элементов с одинаковым буквенным обозначением, например, ***B1***, ***B2***, ***B3*** и т. д. Если в изделие входит только один элемент данной группы, то порядковый номер в его позиционном обозначении может не указываться. Цифры порядковых номеров элементов и их буквенные позиционные обозначения выполняются шрифтом одного размера.
Позиционные обозначения заносятся в перечень элементов; последовательность и порядок записи позиционных обозначений устанавливает *ГОСТ 2.701-81*.

Грузовые перевозки классифицируются по ряду признаков, описывающих их основные сферы и способы применения. Схема классификации приведена на рис. 1.

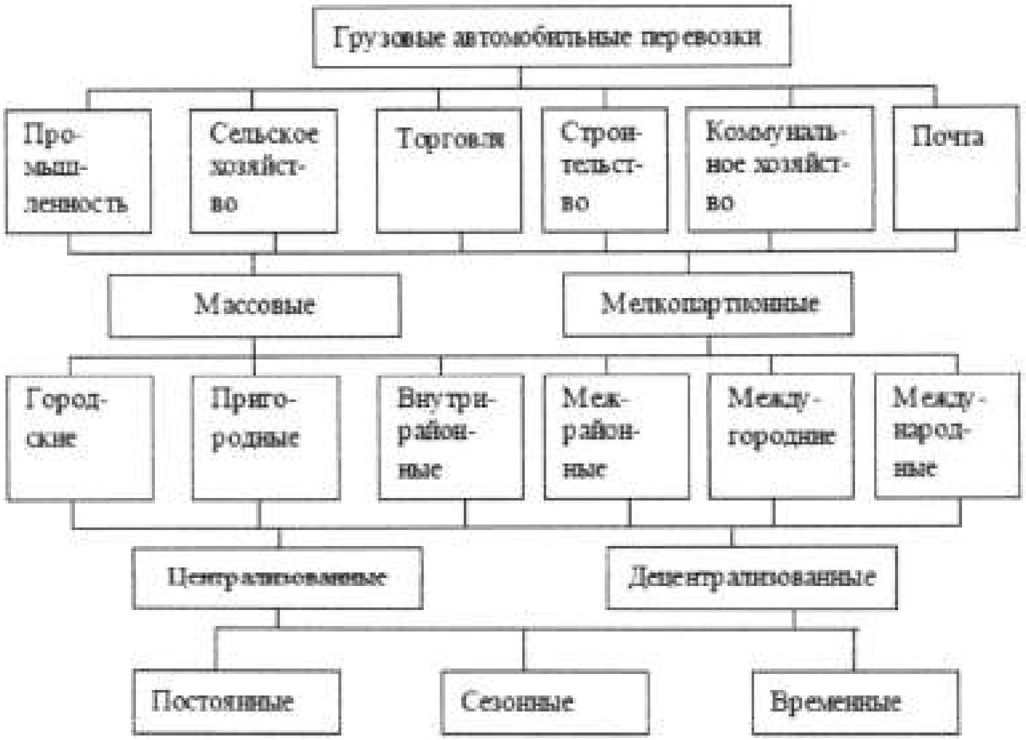


Рис. 1. Классификация грузовых автомобильных перевозок

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
ФГБОУ ВО
«Тульский государственный университет»
Технический колледж им. С.И. Мосина

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ "ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА"

для студентов специальности

«Организация перевозок и управление на транспорте (по видам)»

Тула 2022

Утверждено:
на заседании цикловой комиссии
общепрофессиональных дисциплин
Председатель цикловой комиссии
____________ Овчинникова А.Я.
«13» января 2022 г. протокол № 6

ВВЕДЕНИЕ

В Программе дисциплины предусмотрена самостоятельная работа по подготовке к тестированию.
В методическом пособии даны рекомендации для выполнения этой работы, конкретизирующие поставленные задачи.

1. ПОДГОТОВКА К ТЕСТИРОВАНИЮ

Для подготовки к тестированию студент должен просмотреть свои записи, произведенные на занятии, а также страницы учебника, указанные преподавателем по данной теме. В результате студентом должны быть найдены ответы на вопросы:

Тема " Системы автоматизированного проектирования на персональных компьютерах "

1. Системы автоматизированного проектирования на персональных компьютерах, используемые для разработки конструкторской документации.

Тема " Общие сведения о чертёжно-графическом редакторе «КОМПАС»"

1. Интерфейс редактора.
2. Панель управления.
3. Панель текущего состояния.
4. Панель управления изображением.
5. Компактная панель.
6. Панель свойств

Тема " Работа в «КОМПАС»"

1. Использование панели инструментов для вычерчивания различных графических примитивов.

Тема " Основные сведения по оформлению чертежей "

1. Линии чертежа, их назначение и выполнение.
2. Форматы, основная надпись чертежа.
3. Масштабы.

Тема " Чертёжный шрифт и выполнение надписей на чертежах"

1. Типы шрифтов. Основные параметры чертёжного шрифта.

Тема " Основные правила нанесения размеров"

1. Правила нанесения линейных, угловых, диаметральных и радиальных размеров.
2. Упрощения при нанесении размеров.

Тема " Геометрические построения и приёмы вычерчивания контуров технических деталей "

1. Деление окружности на равные части.
2. Сопряжения.
3. Уклон и конусность.

Тема " Проецирование точки. Комплексный чертёж точки "

1. Проецирование точки на три плоскости проекций.

Тема " Проецирование отрезка прямой линии"

1. Проецирование отрезка на три плоскости проекций.

Тема " Проецирование плоскости "

1. Проецирование плоскости на три плоскости проекций.

Тема " Аксонометрические проекции"

1. Виды аксонометрических проекций.
2. Изображение геометрических фигур в аксонометрии.

Тема " Проецирование геометрических тел"

1. Построение проекций геометрических тел.
2. Построение комплексных чертежей и аксонометрических проекций геометрических тел.

Тема " Техническое рисование с элементами технического конструирования "

1. Выполнение технических рисунков плоских геометрических фигур.
2. Выполнение технических рисунков геометрических тел.

Тема " Проекции моделей"

1. Построение комплексных чертежей моделей.
2. Построение наглядного изображения модели.

Тема " Машиностроительное черчение. Основные положения"

1. Назначение машиностроительного чертежа.

Тема " Изображения – виды, разрезы, сечения "

1. Виды: назначение, расположение и обозначение основных, местных и дополнительных видов.
2. Разрезы: горизонтальный, вертикальный (фронт, и проф.) и наклонный. Сложные разрезы. Обозначение, расположение разрезов. Местные разрезы. Соединение половины вида с половиной разреза.

3. Сечения вынесенные и наложенные. Расположение сечений, обозначения. Выносные элементы, их обозначение.
4. Условности и упрощения. Разрезы через тонкие стенки, ребра, спицы и т.д.

Тема " Резьба "

1. Основные типы резьб. Условное изображение и обозначение резьбы.
2. Обозначения и изображения стандартных резьбовых крепёжных изделий.
3. Конструктивные элементы резьбы.

Тема " Эскизы деталей и рабочие чертежи "

1. Последовательность выполнения эскизов деталей и рабочих чертежей.

Тема " Разъёмные и неразъёмные соединения "

1. Виды соединений и изображение их на чертеже

Тема " Общие сведения об изделиях и составлении сборочных чертежей "

1. Комплект конструкторской документации. Чертеж общего вида, его назначение и содержание. Сборочный чертеж, его назначение и содержание
2. Последовательность выполнения сборочного чертежа.
3. Назначение спецификации. Порядок заполнения спецификации.

Тема " Чтение и деталирование чертежей "

1. Назначение сборочной единицы. Работа сборочной единицы. Количество деталей, входящих в сборочную единицу.
2. Деталирование сборочного чертежа. Порядок деталирования сборочных чертежей. Увязка сопрягаемых размеров.

Тема " Общие сведения о схемах "

1. Графические способы отображения информации

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО
«Тульский государственный университет»
Технический колледж имени С.И. Мосина

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению самостоятельных работ

Междисциплинарный курс

ТЕХНОЛОГИЯ ПЕРЕВОЗОЧНОГО ПРОЦЕССА (НА АВТОМОБИЛЬНОМ ТРАНСПОРТЕ)

Для студентов специальности 23.02.01
«Организация перевозок и управление на транспорте (по видам)»

Тула

Утверждена
на заседании цикловой комиссий эксплуатации автомобильного транспорта
Протокол от «13» 01 2022 г. № 6
Председатель цикловой комиссии Д.Г. Рязанцев

Цель самостоятельной работы – приобрести навыки самостоятельной организации работы по изучению теоретического лекционного материала, по подготовке к практическим занятиям, промежуточному тестированию и зачету по читаемому курсу.

1. Содержание самостоятельной работы

Самостоятельная работа студентов при изучении дисциплины должна обеспечивать работу по следующим направлениям:

1. Подготовка к контрольным работам и зачету;
2. Подготовка к практическим занятиям;
3. Оформление отчетов по практическим занятиям.

2.Подготовка к контрольным работам

Для подготовки к контрольным работам студент должен изучить свой конспект лекций, составленный на занятиях и соответствующие страницы учебников, указанных преподавателем по изучаемым темам.

В результате этой работы студентом должны быть найдены ответы на следующие вопросы:

Контрольная работа 1

1. Производственный процесс и продукция транспорта.
2. Транспорт и его значение для экономики.
3. Классификация автомобильных перевозок.
4. Этапы разработки технологического процесса перевозок грузов.
5. Система управления грузовыми автомобильными перевозками
6. Классификация, основные задачи и структура АТП - перевозчика.
7. История развития АТП в России.
8. Система управления пассажирскими автомобильными перевозками.
9. Система управления международными автомобильными перевозками.
10. Производственная структура службы эксплуатации АТП ее задачи.
11. Функции коммерческой группы АТП.
12. Функции диспетчерской группы АТП.
13. Функции учетно-расчетной группы АТП.
14. Технология диспетчерского регулирования автоперевозками.

15. Технология таксомоторных перевозок.
16.Последовательность технологических операций грузовых перевозок.
17.Функции технической службы АТП.
18.Методы обеспечения работоспособности автомобилей.
19. Система ТО и ТР подвижного состава.
20. Нормативы ТО и методы их корректирования.

Контрольная работа 2

1. Учет и анализ результатов выполнения перевозок.
2. Особенности осуществления международных автомобильных перевозок.
3. Особенности учета и контроля за выполнением МАП.
4. Назначение товарно-транспортной накладной и ее заполнение.
5. Структура и функции транспортного контроля в России.
6. Назначение путевого листа и его заполнение.
7. Функции коммерческой группы АТП.
8. Функции учетно-расчетной группы АТП.
9. Прием и увольнение сотрудников АТП.
10. Обязанности и права руководителей и специалистов АТП.
11. Виды договоров на перевозку грузов.
12. Аттестация сотрудников АТП.
13.Функции диспетчеров в транспортном процессе. Их права и обязанности.
14.Контроль за соблюдением водителями правил дорожного движения.
15. Требования к профессиональному отбору и обучению водителей.
16. Требования, предъявляемые к работникам АТП.
17. Прием и увольнение сотрудников АТП.
18. Обязанности работников отдела безопасности движения.
19 Организация труда и отдыха водителей.
20. Аттестация сотрудников АТП.
21.Обязанности и права руководителей и специалистов АТП.
22.Методика разработки кабинета по безопасности дорожного движения.
23. Организация труда и отдыха водителей при осуществлении МАП.
24. Организация труда и отдыха водителей при осуществлении внутренних перевозок.

2. Подготовка к практическим занятиям

Подготовка к практическим занятиям производится разбором и повторением материала, изученного на лекциях.

3. Оформление отчетов

Отчеты по практическим занятиям выполняются на листах бумаги формата А4, куда вносятся результаты расчетов, анализа, структурные схемы и делаются выводы.

Литература

Основные источники:

1. Гатиятуллин М.Х. Автомобильные перевозки [Электронный ресурс] : учебное пособие / М.Х. Гатиятуллин, Р.Р. Загидуллин. — Электрон. текстовые данные. — Казань: Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2016. — 163 с. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/73302.html

2. Горев, А. Э. Теория транспортных процессов и систем : учебник для СПО / А. Э. Горев. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 217 с. — (Серия : Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01197-5. - https://biblio-online.ru/book/B7C145FE-2C72-49D5-967A-830976E7E70B

3. Герами, В. Д. Управление транспортными системами. Транспортное обеспечение логистики : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. Д. Герами, А. В. Колик. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 438 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-6890-3. - https://biblio-online.ru/book/08FD518E-B56C-4F69-B43D-3DAB262FC5DB

4. Горев, А. Э. Информационные технологии в профессиональной деятельности (автомобильный транспорт) [Электронный ресурс] : учебник для СПО / А. Э. Горев. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 271 с. — (Серия : Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01603-1.- Режим доступа: https://biblio-online.ru/book/3C8B23E9-9ED1-49C7-BF65-0DA6C11347DF, по паролю

5. Горев, А. Э. Информационные технологии на транспорте : учебник для академического бакалавриата / А. Э. Горев. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 271 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-01330-6.- https://biblio-online.ru/book/827550A9-5100-4542-89E0-17A358881D64

6. Карманов К.Н. Управление возрастной структурой автомобильного парка [Электронный ресурс] : учебное пособие / К.Н. Карманов, А.Н. Мельников, И.Х. Хасанов. — Электрон. текстовые данные. — Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2015. — 132 c. — 978-5-7410-1184-3. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/33661.html

Дополнительные источники:

1. Организация перевозок грузов : учебник для среднего профессионального образования / В. М. Семёнов [и др.] ; под ред. В. М. Семёнова .— 4-е изд., стер. — Москва : Академия, 2012 .— 300 с. : ил. — (Среднее профессиональное образование : Эксплуатация транспорта) .— Библиогр. в конце кн. — ISBN 978-5-7695-8876-1 (в пер.) .

2. Беляев, В. М. Грузовые перевозки : учебное пособие / В. М. Беляев .— Москва : Академия, 2011 .— 170 с. : ил. — (Непрерывное профессиональное образование: Логистика) .— Библиогр. в конце кн. — ISBN 978-5-7695-7449-8 (в пер.) .

3. Виноградов, В. М. Организация производства технического обслуживания и текущего ремонта автомобилей: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. М. Виноградов, И. В. Бухтеева, В. Н. Редин. - 2-е изд., перераб.. - Москва: Академия, 2012. - 270 с. : ил.. - (Среднее профессиональное образование: Автомобильный транспорт). - (Соответствует ФГОС) . - ISBN 978-5-7695-7620-1

4. Журнал «Безопасность труда в промышленности», http://elibrary.ru/projects/subscription/rus_titles_open.asp

Интернет-ресурсы:

1. Электронный читальный зал "БИБЛИОТЕХ" : учебники авторов ТулГУ по всем дисциплинам.- Режим доступа: https://tsutula.bibliotech.ru/, по паролю.- Загл. С экрана.
2. ЭБС IPRBooks универсальная базовая коллекция изданий.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/, по паролю.- .- Загл. с экрана.
3. Научная Электронная Библиотека eLibrary – библиотека электронной периодики, режим доступа: http://elibrary.ru/ , по паролю.- Загл. с экрана.
4. НЭБ КиберЛенинка научная электронная библиотека открытого доступа, режим доступа http://cyberleninka.ru/ ,свободный.- Загл. с экрана.
5. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа :http: //window.edu.ru. -Загл. с экрана.